Державний заклад
«ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені К. Д. УШИНСЬКОГО»

К. В. Нєдялкова, А. В. Тумбрукакі

Формування вмінь майбутніх учителів математики оцінювати навчальні досягнення учнів:

методичні рекомендації

Одеса
2020

УДК: 378:37.011.3-051:51(075)
Т83

Рекомендовано до друку вченою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського».

Протокол №___ від ______2020 року.

Рецензенти:

Папач О. І., кандидат педагогічних наук, завідувач кафедри методики викладання і змісту освіти КЗВО «Одеська академія неперервної освіти»

Олефір О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Нєдялкова К. В., Тумбрукакі А. В.
Формування вмінь майбутніх учителів математики оцінювати навчальні досягнення учнів: методичні рекомендації. Одеса: ТОВ «Рекламсервіс», 2020. 36 с.

Розроблені методичні рекомендації містять завдання із різних тем курсу шкільної математики щодо формування вмінь майбутніх учителів оцінювати начальні досягнення здобувачів середньої освіти. Представлені матеріали впроваджено у процес викладання дисципліни педагогічного ЗВО «Методика навчання шкільного курсу математики» у контексті формування фахових компетентностей майбутніх учителів математики.

Рекомендовано студентам, магістрантам, аспірантам, викладачам, методистам, учителям.

ЗМІСТ

1. Теоретико-методичні засади оцінювання навчальних досягнень здобувачів середньої освіти……………………………………………………………………. 4

2. Зміст дидактичної гри «Оціни розв'язання» (формування складової фахової компетентності майбутніх учителів математики щодо оцінювання навчальних досягнень учнів) …………………………………………………………..………. 12

2.1. Раціональні рівняння та нерівності………………………………………. 12

2.2. Ірраціональні рівняння та нерівності…………………………………….. 16

2.3. Показникові та логарифмічні рівняння та нерівності…………………… 19

2.4. Тригонометричні рівняння………………………………………………….. 23

2.5.Завдання для самостійної роботи…………………………………………. 27

2.6. Завдання для самоконтролю……………………………………………… 30

Список використаних джерел………………………………………………… 34

1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ОЦІНЮВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ ЗДОБУВАЧІВ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Обов’язковим компонентом освітнього процесу є контроль знань, умінь та навичок, тобто перевірка його результативності. Шлях учня до поставленої навчальної мети буде більш системним, прогнозованим й ефективним у разі, коли він розумітиме кінцеву мету навчання, практичне застосування набутих знань, послідовність кроків для досягнення поставлених навчальних завдань та отримуватиме оперативну й достовірну інформацію про результативність власної пізнавальної діяльності. Для забезпечення ефективного управління навчальним процесом учитель повинен оперативно отримувати інформацію про ритмічність навчальної роботи учня, якість виконаних навчальних завдань, правильність та глибину розуміння вивченого матеріалу. Для цього необхідно забезпечити функціонування цілісної системи, яка забезпечить ефективний моніторинг навчальних досягнень учня на всьому проміжку його навчальної діяльності.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ З МАТЕМАТИКИ

До навчальних досягнень учнів з математики, які безпосередньо підлягають оцінюванню, належать:

- ❖ теоретичні знання, що стосуються математичних понять, тверджень, теорем, властивостей, ознак, методів та ідей математики;
- ❖ знання, що стосується способів діяльності, які можна подати у вигляді системи дій (правила, алгоритми);
- ❖ здатність безпосередньо здійснювати уже відомі способи діяльності відповідно до засвоєних правил, алгоритмів (наприклад, виконувати певне тотожне перетворення виразу, розв’язувати рівняння певного виду, виконувати геометричні побудови, досліджувати функцію на монотонність, розв’язувати текстові задачі розглянутих типів тощо);
- ❖ здатність застосовувати набуті знання і вміння для розв’язування

навчальних і практичних задач, коли шлях, спосіб такого розв'язання потрібно попередньо визначити (знайти) самому.

Відповідно до ступеня оволодіння зазначеними знаннями і способами діяльності виокремлюються такі рівні навчальних досягнень школярів з математики:

I – початковий рівень, коли у результаті вивчення навчального матеріалу учень:

- називає математичний об'єкт (вираз, формули, геометричну фігуру, символ), але тільки в тому випадку, коли цей об'єкт (його зображення, опис, характеристика) запропонована йому безпосередньо;
- за допомогою вчителя виконує елементарні завдання.

II – середній рівень, коли учень повторює інформацію, операції, дії, засвоєні ним у процесі навчання, здатний розв'язувати завдання за зразком.

III – достатній рівень, коли учень самостійно застосовує знання в стандартних ситуаціях, уміє виконувати математичні операції, загальна методика і послідовність (алгоритм) який йому знайомі, але зміст та умови виконання змінені.

IV – високий рівень, коли учень здатний самостійно орієнтуватися в нових для нього ситуаціях, складати план дій і виконувати його, пропонувати нові, невідомі йому раніше розв'язання, тобто його діяльність має дослідницький характер.

Оцінювання якості математичної підготовки учнів з математики здійснюється в двох аспектах: *рівень володіння теоретичними знаннями,* який можна виявити в процесі усного опитування, та *якість практичних умінь і навичок,* тобто здатність до застосування вивченого матеріалу під час розв'язування задач і вправ.

Оцінювання здійснюється в системі тематичного контролю знань, коли бали виставляються за вивчення окремих тем, розділів та під час державної атестації.

КРИТЕРІЇ ДЛЯ ПІДСУМКОВОГО (ТЕМАТИЧНОГО) ОЦІНЮВАНЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ

Рівні навчальних досягнень учнів	Бали	Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів
І.Початковий	**1**	Учень: *розпізнає* один із кількох запропонованих математичних об'єктів (символів, виразів, геометричних фігур тощо), вмиливши його серед інших; *читає* і *записує числа*, переписує даний математичний вираз, формулу; *зображає* найпростіші геометричні фігури (малює ескіз).
	2	Учень: *виконує* однокрокові дії з числами, найпростішими виразами; *впізнає* окремі математичні об'єкти і пояснює свій вибір.
	3	Учень: *співставляє* дані або словесно описані математичні об'єкти за їх суттєвими властивостями; *за допомогою вчителя виконує* елементарні завдання.
ІІ. Середній	**4**	Учень: *відтворює* означення математичних понять і Формулювання тверджень; *формулює* деякі властивості математичних об'єктів; *виконує* за зразком завдання обов'язкового рівня.
	5	Учень: *ілюструє* означення математичних понять, формулювань теорем і правил виконання математичних дій прикладами із пояснень вчителя або підручника; *розв'язує* завдання обов'язкового рівня за відомими алгоритмами з частковим поясненням.
	6	Учень: *ілюструє* означення математичних понять, формулювань теорем і правил виконання математичних дій власними прикладами; *самостійно* розв'язує завдання обов'язкового рівня з достатнім поясненням; *записує* математичний вираз, формулу за словесним формулюванням і навпаки.
	7	Учень: *застосовує* означення математичних понять та їх властивостей для розв'язування завдань у знайомих ситуаціях;

III. Достатній		*знає* залежності між елементами математичних об'єктів; *самостійно виправляє* вказані йому помилки; *розв'язує* завдання, передбачені програмою, без достатніх пояснень.
	8	Учень: *володіє* визначеним програмаю навчальним матеріалом; *розв'язує* завдання, передбачені програмою, з частковим поясненням; *частково аргументує* математичні міркування й розв'язування завдань.
	9	Учень: *вільно володіє* визначеним програмою навчальним матеріалом; *самостійно виконує* завдання в знайомих ситуаціях із достатнім поясненням; *виправляє* допущені помилки; *повністю аргументує* обґрунтування математичних тверджень; *розв'язує* завдання з достатнім поясненням.
IV. Високий	**10**	Знання, вміння й навички учня повністю відповідають вимогам програми, зокрема, учень: *усвідомлює* нові для нього математичні факти, ідеї, вміє доводити передбачені програмою математичні твердження з достатнім обґрунтуванням; *під керівництвом учителя знаходить* джерела інформації та самостійно використовує їх; *розв'язує* завдання з повним поясненням і обґрунтуванням.
	11	Учень: *вільно і правильно висловлює* відповідні математичні міркування, переконливо аргументує їх; *самостійно знаходить* джерела інформації та працює з ними; *використовує* набуті знання і вміння в незнайомих для нього ситуаціях; *знає* передбачені програмою основні методи розв'язування завдання і вміє їх застосовувати з необхідним обґрунтуванням.
	12	Учень: *виявляє* варіативність мислення і раціональність у виборі способу розв'язування математичної проблеми; *вміє* узагальнювати й систематизувати набуті знання; *здатний до розв'язування* нестандартних задач і вправ.

Розв'язати задачу – означає виконати те, що вимагається в задачі. Внаслідок розв'язування задач на обчислення, побудову або дослідження дістають *розв'язок*. Внаслідок розв'язування задач на доведення дістають не розв'язок, а *підтвердження* сформульованого в задачі твердження.

Перш за все, не слід ототожнювати поняття *«розв'язок» і «відповідь»*. Ми пишемо одну відповідь, хоча задача може мати кілька розв'язків; відповідь дають і тоді, коли задача не має розв'язків.

Крім того, не треба плутати поняття *«розв'язок», «розв'язання» і «розв'язування»*. Перше поняття означає кінцевий результат розв'язування, відповідь або частину відповіді; друге – логічну конструкцію, сукупність всіх міркувань, що призвели до потрібного висновку; третє – процес міркувань. Тому коли письмово оформлюється процес пошуку розв'язку, це робиться під рубрикою «Розв'язання».

<u>Розв'язок</u> задачі буває правильним і неправильним, точним і наближеним, загальним і частинним.

<u>Розв'язування</u> буває усним і письмовим, самостійним і колективним і т.ін.

<u>Розв'язання</u> кожної задачі повинно бути:

1) безпомилковим; 2) обгрунтованим; 3) повним; 4) раціональним.

Безпомилкове розв'язання.

Безпомилковим вважають таке розв'язання, яке не містить ніяких помилок. Помилки ж в розв'язаннях математичних задач бувають різного роду:

1) *Алгоритмічними* називають помилки, пов'язані з неправильним застосуванням алгоритмів при обчисленнях, перетвореннях виразів тощо. <u>Наприклад</u>: $3^2 = 6$, $\lg a \cdot \lg b = \lg ab$.
2) *Логічні* помилки виникають в результаті спотворення законів логіки. <u>Наприклад</u>: ототожнення рівносильних рівнянь і рівнянь-наслідків.
3) *Графічні* помилки припускаються в рисунках. <u>Наприклад</u>: зображення синусоїди як об'єднання кількох півдуг кола.

4) *Термінологічні* помилки, прикладом яких є: «довжина круга», «площа кола», «апофема бічної грані піраміди».
5) *Ситуаційними* називають помилки, що виникають у результаті неправильного розуміння ситуацій.

Залежно від ступеня важливості в школі прийнято розрізняти грубі та негрубі помилки, а також недоліки.

Грубими називають ті помилки, які свідчать, що учень не засвоїв основ теорії, не знає найважливіших правил, теорем, формул.

Негрубими слід вважати, наприклад, помилки в обчисленнях, допущені внаслідок неуважності, неправильне вживання символів, зображення суцільними невидимих ліній у стереометричних рисунках.

До недоліків звичайно відносять записи відповідей, що допускають спрощення; порушення вимог щодо рисунків до геометричних задач тощо.

Обґрунтованість розв'язання.

Якщо учень знайде розв'язок, але не обгрунтує його, то не можна вважати, що він впорався з задачею.

У молодших класах учні часто навіть не відчувають потреби в обґрунтуваннях. Трапляються випадки, коли вони ототожнюють розв'язування задачі з угадуванням. Якщо, наприклад, запитати шостикласників, просте чи складене число 1021, вони, пересвідчившись, що це число не ділиться ні на 2, ні на 3, ні на 5, відповідають, що це число просте. Така відповідь правильна, але не обґрунтована.

Учні старших класів розуміють, що при розв'язуванні задач треба кожний крок обґрунтовувати, але часто не роблять цього, бо вважають, що «це і так очевидно». Деякі моменти розв'язання задач, які справді очевидні, та ті, які учні обґрунтовували раніше, можна залишати без обґрунтування. Але залишати необґрунтованими зовсім неочевидні положення в розв'язанні з повним поясненням не можна.

Зазначимо, що у процесі пошуку розв’язання для того, щоб не гальмувати його процес, можна деякі моменти залишити необґрунтованими, але потім запропонувати довести те, що спочатку прийняли без доведення.

Повнота розв’язання.

Якщо задача має кілька розв’язків, а учень знайде тільки один з них, таке розв’язання не можна вважати закінченим; воно неповне.

<u>Наприклад</u>: спростити вираз $a+\sqrt{a^2-2a+1}$. Більшість учнів розв’язують цю задачу так: $a+\sqrt{a^2-2a+1}=a+\sqrt{(a-1)^2}=a+(a-1)=2a-1$. Таке розв’язання неповне; воно правильне тільки при $a\geq 1$. Щоб розв’язати задачу повністю, треба розглянути випадок, коли $a<1$. У цьому випадку маємо: $a+\sqrt{a^2-2a+1}=a+\sqrt{(a-1)^2}=a-(a-1)=1$. Отже загальна відповідь має бути такою: $a+\sqrt{a^2-2a+1}=\begin{cases}2a-1, a\geq 1;\\ 1, a<1.\end{cases}$

Раціональність розв’язання.

Одну задачу часто можна розв’язати кількома різними способами. Деякі з цих способів простіші, швидше ведуть до мети; інші навпаки, складні і громіздкі. Отже, спосіб розв’язання, який швидше веде до мети, називають раціональнішим.

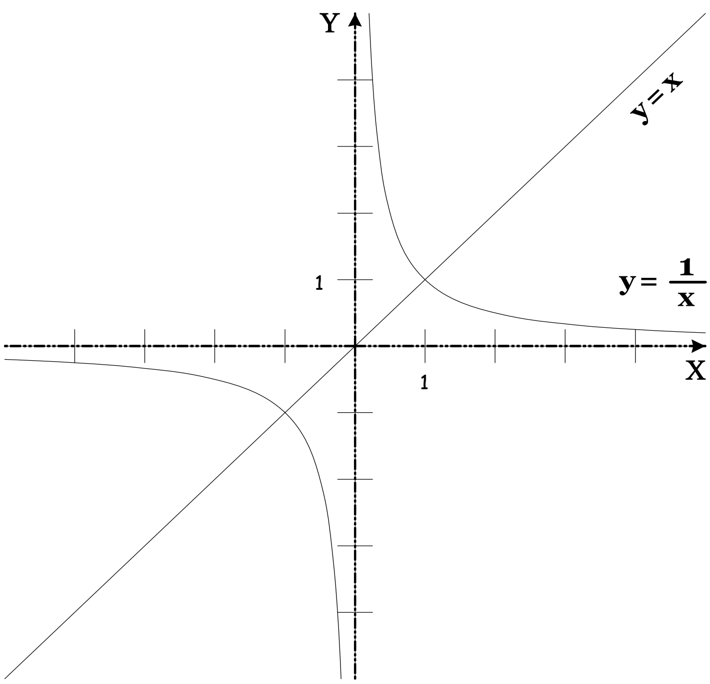

Рис. 1

Наприклад: розв’яжіть нерівність: $\frac{1}{x} < x$. Найраціональніше розв’язання цієї задачі – графічне. Побудувавши в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{1}{x}$ і $y = x$, відразу можемо записати відповідь: $(-1;0)$ і $(1;\infty)$ (рис. 1).

Ще приклад: знайдіть об’єм трикутної піраміди, бічні ребра якої дорівнюють 4 см, 3 см, 5 см, а всі плоскі кути при вершині прямі.

Якщо, розв’язуючи цю задачу, знаходити спочатку довжини сторін основи піраміди, а потім площу її основи і висоту, то такий спосіб розв’язування буде громіздкий і нелегкий. Якщо ж за основу піраміди взяти одну з бічних граней, то задачу можна розв’язати усно.

Чи треба знижувати учням оцінки за нераціональні розв’язання задач? Не завжди. Знижувати оцінки можна тільки за явно нераціональне розв’язання порівняно неважких задач, в яких учень виконує непотрібні обчислення, перетворення, побудови та ін., що свідчить про поверхове розуміння задачі.

2. ЗМІСТ ДИДАКТИЧНОЇ ГРИ «ОЦІНИ РОЗВ'ЯЗАННЯ» (формування складової фахової компетентності майбутніх учителів математики щодо оцінювання навчальних досягнень учнів)

Мета: формування знань, умінь і навичок студентів – майбутніх учителів математики оцінювати розв'язання математичних задач «учнями».

Для проведення цієї гри необхідно підготувати презентацію в PowerPoint, де спочатку на слайді пропонується розв'язання конкретної математичної задачі «учнями», яке студенти повинні оцінити за усіма критеріями (безпомилковість, повнота, раціональність, обґрунтованість), і якщо таке розв'язання містить помилки, охарактеризувати їх. На наступному слайді пропонується коментар до такого розв'язання з вірною відповіддю, що обговорюється (або студенти займаються самооцінюванням).

Примітка. В даному варіанті гри акцент зроблено на розв'язуванні рівнянь і нерівностей шкільного курсу математики. На розсуд викладача коло задач, розв'язання яких розглядається, можна розширити.

2.1. Раціональні рівняння та нерівності

1. ***Розв'язати рівняння*** $x^2 - 2x - 1 = 0$**.**

Розв'язання: За формулою маємо: $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Враховуючи, що $\sqrt{2} = 2{,}4...$, і округляючи значення кореня до першого знака після коми, запишемо: $x_1 \approx 2{,}4$, $x_2 \approx -0{,}6$.

Коментар: таке округлення неприпустимо, якщо в задачі немає вимоги знайти розв'язання з точністю до деякого знака після коми.

Правильна відповідь: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

2. ***Розв'язати нерівність*:** $\frac{x-4}{x-3} > 0$.

Розв'язання: Нерівність рівносильна системі: $\begin{cases} x-4>0 \\ x-3\neq 0 \end{cases}$, розв'язавши яку отримаємо $x>4$. Перевіримо $x=5$. *Відповідь*: $(4;+\infty)$.

Коментар: відповідь неправильна, так як не досліджено знак знаменника.

Правильна відповідь: $(-\infty;3)\bigcup(4;+\infty)$.

3. ***Розв'язати нерівність*:** $\frac{x-4}{2-x} > 0$.

Розв'язання: Дана нерівність равносильна системі: $\begin{cases} x-4>0 \\ 2-x>0 \end{cases}$, розв'язуючи яку одержимо: $x\in(-\infty;2)\bigcup(4;+\infty)$. Це і є відповідь.

Коментар: одержана система не має розв'язків. Фактично була розв'язана сукупність нерівностей.

Правильна відповідь: $(2;4)$.

4. ***Розв'язати нерівність*:** $\frac{x-5}{3-x} > 0$.

Розв'язання: Дана нерівність равносильна системі: $\begin{cases} x-5>0 \\ 3-x>0 \end{cases}$, розв'язуючи яку одержимо: $\varnothing$. Це і є відповідь.

Коментар: Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем, одна з яких дійсно не має розв'язків.

Правильна відповідь: $(3;5)$.

5. ***Розв'язати нерівність*:** $(x-2)(3-x)(x-4)>0$.

Розв'язання: Скористаємося методом інтервалів. $f(x)=(x-2)(3-x)(x-4)$; $f(x)=0$ при $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$. Наносимо нулі функції на числову вісь. Визначаємо знак $f(x)$ в точці $x=0$, яка належить лівому проміжку.

$f(0)=-2\cdot 3\cdot(-4)=24>0$. Отже, на проміжку $(-\infty;2)$ $f(x)>0$. Функція $f(x)$ не має коренів парної кратності, тому при переході через точки 2, 3, 4 знак цієї функції всякий раз змінюється на протилежний. Відповідь: $(-\infty;2)\cup(3;4)$.

Коментар: розв'язання вірно, достатньо обґрунтовано.

Правильна відповідь: $(-\infty;2)\cup(3;4)$.

6. *Розв'язати нерівність*: $\dfrac{(x-1)^2}{(x-3)(x-4)}>0$.

Розв'язання: Скористаємося методом інтервалів. $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{(x-3)(x-4)}$.

Знайдемо нулі функції і значення x, при яких функція $f(x)$ не існує: $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=4$.

Знайдемо, наприклад, $f(5)=\dfrac{16}{2\cdot 1}>0$. Отже, при $x>4$ $f(x)>0$. А далі змінюємо знаки на проміжках на вісі. Отримаємо відповідь: $(1;3)\cup(4;+\infty)$.

Коментар: знаки функції $f(x)$ на решті проміжках визначені невірно, так як $x=1$ є коренем парної кратності і при переході через цю точку функція знака не змінює.

Правильна відповідь: $(-\infty;1)\cup(1;3)\cup(4;+\infty)$.

7. *Розв'язати нерівність*: $\dfrac{(x-8)^2}{x-7}>0$.

Розв'язання: Чисельник цього дробу завжди додатній, тому, щоб дріб був додатній, достатньо, щоб $x-7>0$. Відповідь: $(7;+\infty)$.

Коментар: Вихідна нерівність строга, а чисельник завжди невід'ємний, тому точку $x=8$ треба виключити із відповіді.

Правильна відповідь: $(7;8)\cup(8;+\infty)$.

8. ***Розв'язати нерівність*:** $\frac{(x-8)^2}{x-10} \geq 0$**.**

Розв'язання: Чисельник цього дробу завжди невід'ємний, тому, щоб дріб був невід'ємний, достатньо, щоб $x - 10 > 0$. Відповідь: $(10;+\infty)$.

Коментар: при $x = 8$ нерівність виконується, так як нерівність нестрога.

Правильна відповідь: $\{8\} \cup (10;+\infty)$.

9. ***Розв'язати нерівність*:** $\frac{2}{x-2} < 1$**.**

Розв'язання: помножуючи обидві частини нерівності на $x-2$, маємо: $2 < x-2$, звідки $x > 4$. Відповідь: $(4;+\infty)$.

Коментар: Нерівність не можна помножати на вираз, знак якого невідомий! Вирішуючи нерівність таким чином, треба було б записати, що вихідна нерівність равносильна такій сукупності двох систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 < x-2 \\ x-2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 > x-2 \\ x-2 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

Правильна відповідь: $(-\infty;2) \cup (4;+\infty)$.

10. ***Розв'язати нерівність*:** $\frac{x^2+11}{x+5} \leq 2$**.**

Розв'язання: Перенесемо 2 в леву частину нерівності і виконаємо перетворення, одержимо $\frac{(x-1)^2}{x+5} \leq 0$. Далі вирішуємо методом інтервалів.

Ответ: $(-\infty;-5) \cup \{1\}$.

Коментар: нерівність розв'язано правильно.

Правильна відповідь: $(-\infty;-5) \cup \{1\}$.

11. ***Розв'язати нерівність*:** $x^2 - 3x + 5 > 0$**.**

Розв'язання: $D = 9 - 4 \cdot 5 = -11 < 0$. Отже, розв'язків немає.

Відповідь: ∅.

Коментар: Відсутність коренів квадратного тричлена не означає відсутність розв'язків відповідної квадратної нерівності. Можно розв'язати, використовуючи графік або метод інтервалів. Нулі функції $f(x)=x^2-3x+5$ відсутні (на числову пряму ніякі точки не наносимо). Обчислюємо $f(x)$ в зручній точці із R, наприклад, в точці $x=0$.

Правильна відповідь: R.

2.2. Ірраціональні рівняння та нерівності

1. ***Розв'язати рівняння:*** $\sqrt{x+4}=x-2$.

Розв'язання: Підносимо обидві частини рівняння до квадрату, одержимо: $x+4=x^2-4x+4$, далі: $x^2-5x=0$, $x_1=0$, $x_2=5$; x_1 і x_2 входять в ОДЗ. Відповідь: 0; 5.

Коментар: Хоча $x=0$ і входить в ОДЗ, однак, корнем не є: $\sqrt{4}\neq-2$. Сторонній корінь з'явився тому, що права частина рівняння в даній ОДЗ може приймати і від'ємні значення.

Правильна відповідь: 5.

2. ***Розв'язати рівняння*:** $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}=0$.

Розв'язання: $\sqrt{x}=0$ або $\sqrt{x-1}=0$; $x_1=0$, $x_2=1$. Відповідь: 0;1.

Коментар: добуток двох функцій дорівнює нулю, якщо одна з них дорівнює нулю, а інша при цьому має смисл! Тому дане рівняння рівносильно такій сукупності: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\x-1\geq0\end{cases}\\\begin{cases}x-1=0\\x\geq0\end{cases}\end{array}\right.$.

Правильна відповідь: 1.

3. *Розв'язати рівняння*: $1+\sqrt{x^2-2x+1}=x$.

Розв'язання: $\sqrt{x^2-2x+1}=x-1$; $x^2-2x+1=(x-1)^2 \Leftrightarrow 0=0$.

Отже, відповідь: $(-\infty;+\infty)$.

Коментар: Невірно. Не враховано ОДЗ. Фактично, вихідне рівняння рівносильно системі: $\begin{cases} 0=0 \\ x-1\geq 0 \end{cases}$.

Правильна відповідь: $[1;+\infty)$.

4. *Розв'язати нерівність* : $\sqrt{x-3}<-\sqrt{5}+1$.

Розв'язання: піднесемо обидві частини нерівності до квадрату, одержимо $x-3<5-2\sqrt{5}+1$; $x<9-2\sqrt{5}$. Відповідь: $(-\infty;9-2\sqrt{5})$.

Коментар: Піднесення до квадрату у даному випадку неприпустимо, так як $-\sqrt{5}+1<0$. Функція $y=\sqrt{x-3}$ приймає тільки невід'ємні значення, тому нерівність не може виконуватися ні при яких значеннях x.

Правильна відповідь: $\emptyset$.

5. *Розв'язати рівняння*: $\sqrt{x-3}=\sqrt{5}+1$.

Розв'язання: піднесемо обидві частини рівняння до квадрату, одержимо: $x-3<5+2\sqrt{5}+1$, $x<9+2\sqrt{5}$. Відповідь: $(-\infty;9+2\sqrt{5})$.

Коментар: не враховано умову існування $\sqrt{x-3}$, тобто $x-3\geq 0$.

Правильна відповідь: $[3;9+2\sqrt{5})$.

6. *Розв'язати нерівність*: $\sqrt{2x-5}>-1$.

Розв'язання: оскільки одна із частин нерівності від'ємна, підносити його до квадрату не можна. Ліва частина нерівності невід'ємна при всіх значеннях x, при яких вона визначена, тобто $2x-5\geq 0$. Отже, $\sqrt{2x-5}\geq 0>-1$. Розв'язанням є $x\geq\frac{5}{2}$. Ответ: $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Коментар: розв'язаня вірно. Попередження: перш, ніж підносити до квадрату, подумайте, чи можна це робити. Дехто, не підносячи до квадрату, вважає, що розв'язанням є будь-яке x.

Правильна відповідь: $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$.

7. ***Розв'язати нерівність*****:** $\sqrt{2-x^2} < x+1$**.**

Розв'язання: Підносимо до квадрату обидві частини нерівності, одержимо: $2-x^2 < x^2+2x+1 \Leftrightarrow 2x^2+2x+1>0$. Вирішуючи останню нерівність, маємо: $\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$. Крім того, $2-x^2 \geq 0$. Так як $-\sqrt{2} < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, то розв'язанням вихідної нерівності буде: $\left[-\sqrt{2};\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\sqrt{2}\right]$. Це і є відповідь.

Коментар: розв'язання невірне, так як при піднесенні до квадрату слід також вимагати, щоб $x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$, а $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < -1$.

Правильна відповідь: $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\sqrt{2}\right]$.

8. ***Розв'язати нерівність*****:** $\sqrt{x+1} > x-1$**.**

Розв'язання: піднесемо обидві частини нерівності до квадрату, після перетворень одержимо: $x^2-3x<0 \Rightarrow 0<x<3$. Звертаємо увагу, що при одержаних x $\sqrt{x+1}$ існує. Відповідь: $(0;3)$.

Коментар: Насправді, вірна відповідь є ширшою множиною. Піднесення до квадрату припустимо лише в тому випадку, коли $x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$. Якщо ж $x-1<0 \Rightarrow x<1$, то деякі із таких x, що задовольняють умові $x+1\geq 0$ (ОДЗ вихідної нерівності) також входять у шукану множину, а саме, $-1 \le x < 1$, так як при них виконується умова $\sqrt{x+1} \ge 0 >$деякого від'ємного числа.

Правильна відповідь: $[-1;3)$.

9. ***Розв'язати нерівність*: $\sqrt{x+1} > x$.**

Розв'язання: піднесемо обидві частини нерівності до квадрату, одержимо $x+1 > x^2$; вирішуючи цю нерівність, маємо: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. З урахуванням, що $x \ge 0$ (щоб можна було піднести до квадрату), маємо: $0 \le x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ці значення входять в ОДЗ. Відповідь: $\left[0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Коментар: Відповідь невірна. Задля розв'язання ірраціональної нерівності виду $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ слід використовувати такі міркування:

$$\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g^2(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Правильна відповідь: $\left[-1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2.3. Показникові та логарифмічні рівняння та нерівності

1. ***Розв'язати рівняння*: $3^{x-1} = 2-\sqrt{5}$.**

Розв'язання: Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою 3, одержимо: $\log_3 3^{x-1} = \log_3(2-\sqrt{5})$,

і далі $x-1 = \log_3(2-\sqrt{5}) \Rightarrow x = 1+\log_3(2-\sqrt{5})$. Відповідь: $x = 1+\log_3(2-\sqrt{5})$

.

Коментар: Логарифмування в даному випадку неправомірно, так як $2-\sqrt{5}<0$. Задане рівняння розв'язків не має.

Правильна відповідь: ∅.

2. ***Розв'язати нерівність*:** $2^{x-3}<\frac{1}{16}$.

Розв'язання: Перепишемо нерівність у вигляді $2^{x-3}<2^{-4}$. Так як функція $y=2^{x}$ зростає на всій числовій прямій, то одержана нерівність рівносильна нерівності $x-3<-4 \Rightarrow x<-1$. Відповідь: $(-\infty;-1)$.

Коментар: Нерівність розв'язано вірно.

Правильна відповідь: $(-\infty;-1)$.

3. *Розв'язати нерівність*: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<9$**.**

Розв'язання: Перепишемо нерівність у вигляді: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$. Отже, $x<-2$. Відповідь: $(-\infty;-2)$.

Коментай: Наведене розв'язання невірне. Так як функція $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ спадає на всій числовій прямій, то $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow x>-2$.

Правильна відповідь: $(-2;+\infty)$.

4. *Розв'язати рівняння*: $\log_3(x-1)+\log_3(x-3)=1$**.**

Розв'язання: використовуючи властивості логарифмів, одержимо рівняння: $\log_3(x-1)(x-3)=1$, звідки $(x-1)(x-3)=3$, або $x^2-4x=0$. Корені цього рівняння $x_1=0$, $x_2=4$. Відповідь: 0; 4.

Коментар: При розв'язуванні рівняння слід знайти ОДЗ або виконати перевірку. $\begin{cases} x-1>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3$. Цьому проміжку належить лише один корінь $x_2=4$.

Правильна відповідь: 4.

5. ***Розв'язати рівняння*:** $\log_2(x+1)-\log_2(x-2)=2$**.**

Розв'язання: використовуючи властивості логарифмів, одержимо рівняння $\log_2\frac{x+1}{x-2}=2 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2}=2$. Із останнього рівняння маємо $x=5$. Відповідь: 5.

Коментар: У розв'язуванні припущено помилку. Перед тим, як потенціювати рівняння $\log_2\frac{x+1}{x-2}=2$, представити праву частину в вигляді: $2=\log_2 4$. Тоді маємо рівняння $\frac{x+1}{x-2}=4 \Rightarrow x=3$. Посля чого виконуємо перевірку.

Правильна відповідь: 3.

6. ***Розв'язати нерівність*:** $\log_5(2x-2)<\log_5(x+3)$**.**

Розв'язання: використовуючи властивість монотонності функції $y=\log_5 x$, одержуємо $2x-2<x+3 \Rightarrow x<5$. Відовідь: $(-\infty;-5)$.

Коментар: розв’язання невірне, оскільки не було вказано ОДЗ. Фактично, задана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 2x-2<x+3 \\ 2x-2>0 \\ x+3>0 \end{cases}$$ (дві останні нерівності системи – це ОДЗ).

Розв’язуючи систему (третя нерівність системи виконується, якщо виконуються перші дві), одержуємо $1<x<5$.

Правильна відповідь: $(1;5)$.

7. ***Розв'язати нерівність*:** $\log_2 x - \log_2(x-2) < \log_2 3$.

Розв'язання: Скориставшись ластивостіми логарифмів, одержуємо $\log_2 \frac{x}{x-2} < \log_2 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x-2} < 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x<2 \\ x>3 \end{array}\right. \\ \frac{x}{x-2} > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right. \end{cases}$. Знаходимо переріз одержаних множин: $(-\infty;0)\bigcup(3;+\infty)$.

Коментар: при використанні властивості логарифмів $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$ відбулося розширення області визначення. Тому слід враховувати область визначення вихідної нерівності $\begin{cases} x>0 \\ x-2>0 \end{cases}$.

Правильна відповідь: $(3;+\infty)$.

8. ***Розв'язати нерівність*:** $\frac{\lg(x^2-6x+9)}{\lg\sqrt{x-3}} > 1$.

Розв'язання: Оскільки функція $y = \lg x$ зростає на всій своїй області визначення, то задана нерівність рівносильна такій подвійній нерівності: $x^2-6x+9 > \sqrt{x-3} > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 > (x-3)^{\frac{1}{2}} > 0$. Нерівність $(x-3)^{\frac{1}{2}} > 0$ має розв'язки $x>3$. Розглянемо нерівність $(x-3)^2 > (x-3)^{\frac{1}{2}}$. Оскільки $(x-3)^{\frac{1}{2}} > 0$ при всіх $x>3$, то одержимо $(x-3)^{\frac{3}{2}} > 1 \Leftrightarrow x-3>1 \Rightarrow x>4$. Відповідь: $(4;+\infty)$.

Коментар: Помилка в представленому розв'язанні складається в тому, що не враховується той факт, що чисельник і знаменник дробу можуть бути і від'ємними.

$$\frac{\lg(x^2-6x+9)}{\lg\sqrt{x-3}} > 1 \Leftrightarrow \frac{\lg(x^2-6x+9) - \lg\sqrt{x-3}}{\lg\sqrt{x-3}} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg(x^2-6x+9)-\lg\sqrt{x-3}>0 \\ \lg\sqrt{x-3}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \lg(x^2-6x+9)-\lg\sqrt{x-3}<0 \\ \lg\sqrt{x-3}<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язання першої системи:

$$\begin{cases} (x-3)^2>\sqrt{x-3} \\ \sqrt{x-3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>4;$$

другої системи:

$$\begin{cases} (x-3)^2<\sqrt{x-3} \\ 0<\sqrt{x-3}<1 \end{cases} \Leftrightarrow 3<x<4.$$

Знаходимо об'єднання цих множин, одержуємо остаточну відповідь.

Правильна відповідь: $(3;4)\cup(4;+\infty)$.

2.4. Тригонометричні рівняння

1. *Розв'язати рівняння*: $\sin x=\frac{1}{2}$**.**

Розв'язання: Застосовуючи загальну формулу для розв'язання тригонометричного рівняння виду $\sin x=a$, маємо: $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+2\pi k, k\in Z$. І далі відповідь: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$.

Коментар: В запису відповіді є дві помилки, пов'язані з «приблизним» знанням формули для розв'язанням рівняння $\sin x=a$.

Правильна відповідь: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

2. *Розв'язати рівняння*: $\cos 3x=\frac{1}{2}$**.**

Розв'язання: задане рівняння рівносильне рівнянню $3x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z$

Звідки $3x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$, $x = \pm\frac{\pi}{9} + 2\pi k, k \in Z$. Відповідь: $x = \pm\frac{\pi}{9} + 2\pi k, k \in Z$.

Коментар: відповідь невірна, так як в останній дії не поділено на 3 другий доданок $2\pi k$.

Правильна відповідь: $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k, k \in Z$.

3. *Розв'язати рівняння*: $\sin 4x = 2$.

Розв'язання: Задане рівняння рівносильне рівнянню $4\sin x = 2$, звідки $\sin x = \frac{1}{2}$ і $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$. Відповідь: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Коментар: $\sin 4x \neq 4\sin x$! Крім того, $\sin 4x = 2$ не має розв'язків, оскільки для всіх α, $-\infty < \alpha < +\infty$, виконується $|\sin\alpha| \leq 1$.

Правильна відповідь: розв'язків немає.

4. *Розв'язати рівняння*: $\cos x^2 = 0$.

Розв'язання: Введемо нову змінну $t = x^2$, тода маємо $\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. Отже, задане рівняння рівносильне рівнянню $x^2 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, яке має розв'язки лише при $k \geq 0$. Це обмеження слід урахувати при запису відповіді. Відповідь: $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + \pi k}$, $k \in N_0$.

Коментар: наведене розв'язання вірне.

Правильна відповідь: $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + \pi k}$, $k \in N_0$.

5. ***Розв'язати рівняння*:** $1+tg^2x-\dfrac{1}{\cos^2 x}=0$.

Розв'язання: зведемо ліву частину рівняння до спільного знаменника: $\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x-1}{\cos^2 x}=0$, або $\dfrac{0}{\cos^2 x}=0$. Відповідь: x - будь-яке число.

Коментар: пригадаємо, що дріб дорівнює нулю в тому і тільки в тому випадку, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю. Тому із відповіді необхідно виключити ті значення x, при яких $\cos x=0$.

Правильна відповідь: $\left\{(-\infty;+\infty)\middle|x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\right\}$.

6. ***Розв'язати рівняння*:** $2\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x+1=0$.

Розв'язання: використовуючи основну тригонометричну тотожність, зведемо задане рівняння до квадратного відносно $\cos x$: $-2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x+3=0$; $2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x-3=0$. Вводимо нову змінну $t=\cos x$, одержуємо: $2t^2-\sqrt{3}t-3=0\Leftrightarrow(t-\sqrt{3})(t+\dfrac{\sqrt{3}}{2})=0$, звідки, повертаючись до вихідної змінної, одержимо: $\cos x=\sqrt{3}$ або $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. В результаті маємо таку відповідь: $x=\pm\arccos\sqrt{3}+2\pi k, k\in Z$; $x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$.

Коментар: рівняння $\cos x=\sqrt{3}$ не має розв'язків. Крім того, якщо тригонометричне рівняння має декілька сімейств розв'язків, то необхідно слідкувати за тим, щоб параметри в розв'язках були різними.

Правильна відповідь: $x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$.

7. ***Розв'язати рівняння*:** $3\cos x-\pi=0$.

Розв'язання: $3\cos x-\pi=0\Leftrightarrow\cos x=\dfrac{\pi}{3}$, звідки $x=\pm\arccos\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

Відповідь: $x = \pm \arccos\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Коментар: наведене розв'язання невірне, оскільки $\frac{\pi}{3} > 1$.

Правильна відповідь: $\varnothing$.

8. ***Розв'язати рівняння*****:** $tg2x = -tgx$ **.**

Розв'язання: скориставшись формулою для тангенса подвійного кута, одержимо: $\frac{2tgx}{1 - tg^2x} = -tgx$. Поділивши обидві частини рівняння на tgx, маємо: $2 = -1 + tg^2x \Leftrightarrow tg^2x = 3$. І далі: $tgx = \sqrt{3}$ или $tgx = -\sqrt{3}$. Вирішуючи кожне із цих рівнянь, одержуємо відповідь: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

Коментар: При діленні обох частин рівняння на tgx було необхідно оговорити, что $tgx \neq 0$. А потім перевірити, чи не є $tgx = 0$ розв'язанням вихідного рівняння. Перевірка показує, що у відповіді треба вказати ще і значення $x = \pi n, n \in Z$.

Правильна відповідь: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$; $x = \pi n, n \in Z$.

9. ***Розв'язати рівняння*****:** $\sin 3x - \cos 3x = 0$ **.**

Розв'язання: Нехай $\cos 3x \neq 0$. Поділимо обидві частини рівняння на $\cos 3x$. Одержимо рівняння: $tg3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z$. Перевіримо, чи не здобули ми в результаті ділення на $\cos 3x$ сторонніх розв'язків. Легко бачити, $\cos 3\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) \neq 0$. Перевіримо, чи не загубили ми в результаті ділення на $\cos 3x$ розв'язків. Розглянемо випадок $\cos 3x = 0$, але тоді одночасно і $\sin 3x = 0$ (из условия), что суперечить основній тригонометричній тотожності. Отже, інших розв'язків вихідне рівняння не має. Відповідь: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z$.

Коментар: наведне розв'язання вірне, достатньо обгрунтовано.

Правильна відповідь: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z$.

2.5. Завдання для самостійної роботи

Продовження дидактичної гри «Оціни розв'язання»: на занятті у 10 класі *з курсу за вибором «Розв'язування задач з параметрами»* (авторів Апостоловой Г.В., Прокопенко Н.С.) учні виконують, наприклад, нижченаведені завдання, розв'язання яких треба оцінити і надати відповідний коментар із вірною відповіддю.

1. ***Знайти всі значення параметра*** b***, при кожному з яких рівняння*** $x^2 + 4bx + 4 = 0$ ***має два різних кореня.***

Розв'язання: $\frac{D}{4} = 4b^2 - 4$; $\frac{D}{4} > 0 \Rightarrow 4b^2 - 4 > 0$, $4b^2 > 4$, звідки $b > 1$.

Відповідь: $b > 1$.

2. ***Знайти всі значення параметра*** p***, при кожному з яких рівняння*** $px^2 - 2x + 1 = 0$ ***має два різних кореня.***

Розв'язання: вимагаємо щоб $D > 0$ ($\frac{D}{4} > 0$). $\frac{D}{4} = 1 - p > 0 \Rightarrow p < 1$. Відповідь: $p < 1$.

3. ***Знайти всі значення параметра*** p***, при кожному з яких квадратне рівняння*** $px^2 + x + 2 = 0$ ***має рівно один корінь.***

Розв'язання: Якщо $p = 0$, то $x + 2 = 0$, $x = -2$. Якщо $p \neq 0$, то висуваємо умову: $D = 0$; $D = 1 - 8p$; $1 - 8p = 0$; $p = \frac{1}{8}$. Відповідь: $p = 0$; $\frac{1}{8}$.

4. ***Знайти всі значення параметра p, при кожному з яких квадратне рівняння $x^2 + px + 4 = 0$ має один корінь.***

Розв'язання: Вихідне рівняння має один корінь за умови $D \geq 0$, при цьому, якщо $D = 0$, рівняння має рівно один корінь, а при $D > 0$ - два корені (а якщо є два корені, то є і один). $D = p^2 - 16$; $p^2 - 16 \geq 0$. Маємо: $p \leq -4$ або $p \geq 4$. Відповідь: $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

5. ***Знайти всі значення параметра p, при кожному з яких сума квадратів коренів рівняння $x^2 + px + 1 = 0$ приймає найменше значення.***

Розв'язання: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2$, так як $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = 1$ за теоремою Вієта. Вираз $p^2 - 2$ приймає найменше значення при $p = 0$. Відповідь: $p = 0$.

6. ***Знайти всі значення параметра q, при кожному з яких сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (q - 1)x + 1 = 0$ приймає найменше значення.***

Розв'язання: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = q^2 - 2q - 1$. Найменше значення суми квадратів є нуль, тому $q^2 - q - 1 = 0$, $q_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Відповідь: $q_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

До перевірки самостійної роботи

Коментар до завдання 1: Наведені спочатку міркування щодо дискримінанту вірні, але нерівність $4b^2 > 4$ розв'язано невірно.

Правильна відповідь: $b < -1$ або $b > 1$.

Коментар до завдання 2: в одержану відповідь входить і $p = 0$, при якому вихідне рівняння обертається в лінійне: $-2x + 1 = 0$ і $x = \frac{1}{2}$ - єдиний корінь. Тому $p = 0$ слід виключити із відповіді.

Правильна відповідь: $p < 0$ або $0 < p < 1$.

Коментар до завдання 3: при $p = 0$ рівняння не є квадратним (вимога умови завдання).

Правильна відповідь: $p = \frac{1}{8}$.

Коментар до завдання 4: Розв'язання вірне. Слід звернути увагу на поняття «один корінь» (у розумінні «хоча б один корінь») і «рівно один корінь» (у розумінні «точно один корінь»).

Правильна відповідь: $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

Коментар до завдання 5: При $p = 0$ вираз $p^2 - 2 < 0$ і не може бути сумою квадратів коренів рівняння, при $p = 0$ корені не існують. $D = p^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow$ $p \leq -2$ або $p \geq 2$.

Правильна відповідь: -2; 2.

Коментар до завдання 6: Розв'язання невірне, оскільки при знайдених значеннях $D = -2 < 0$ і рівняння взагалі не має коренів. Будемо вимагати:

$D = q^2 - 2q - 3 \geq 0$, що вірно при $q \leq -1$ або $q \geq 3$. На цих множинах треба знайти найменше значення функції $y = q^2 - 2q - 1$.

Правильна відповідь: -1; 3.

2.6. Завдання для самоконтролю

1. Оцініть представлене розв'язання математичної задачі:

Розв'яжіть нерівність: $\frac{1}{3x - 2 - x^2} \leq \frac{3}{7x - 4 - 3x^2}$.

Розв'язання: $\frac{7x-4-3x^2-3(3x-2-x^2)}{(3x-2-x^2)(7x-4-3x^2)} \leq 0$; $\frac{7x-4-3x^2-9x+6+3x^2}{(x-1)^2(x-2)(3x-4)} \leq 0$;

$\frac{-2x+2}{(x-1)^2(x-2)(3x-4)} \leq 0$; $\frac{-2(x-1)}{(x-1)^2(x-2)(3x-4)} \leq 0$; $\frac{2}{3(x-1)(x-2)(x-\frac{4}{3})} \geq 0$.

Відповідь: $\left(1; \frac{4}{3}\right) \cup (2; \infty)$.

Чи є воно безпомилковим, раціональним, повним, обґрунтованим?

Якщо припущені *помилки*, вкажіть, якого вони роду (алгоритмічні, логічні, графічні, термінологічні, ситуаційні), грубі чи негрубі.

Чи можна відзначити якісь *недоліки* такого розв'язання?

2. Оцініть представлене розв'язання математичної задачі:

Спростіть вираз: $\frac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}$.

Розв'язання: $\frac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{9x^2+12x+4-24x}\cdot\sqrt{x}}{3x-2} = \frac{\sqrt{(3x-2)^2}}{3x-2} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x}.$

Відповідь: $\sqrt{x}$.

Чи є воно безпомилковим, раціональним, повним, обґрунтованим?

Якщо припущені *помилки,* вкажіть, якого вони роду (алгоритмічні, логічні, графічні, термінологічні, ситуаційні), грубі чи негрубі.

Чи можна відзначити якісь *недоліки* такого розв'язання?

3. Оцініть представлене розв'язання математичної задачі:

Розв'яжіть рівняння: $\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2.$

Розв'язання: Область визначення заданого рівняння визначається системою: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 9, \\ x \neq \frac{1}{3}. \end{cases}$ Перейдемо до логарифма з основою *x,* тоді матимемо: $\frac{5\log_x x}{\log_x \frac{x}{9}} + \frac{\log_x x^3}{\log_x \frac{9}{x}} + \frac{8\log_x x^2}{\log_x 9x^2} = 2.$ Після перетворень одержимо: $\frac{5}{1-\log_x 9} + \frac{3}{\log_x 9 - 1} + \frac{16}{\log_x 9 + 2} = 2.$ Зробимо заміну: нехай $\log_x 9 = t$, тоді рівняння прийме вигляд: $\frac{5}{1-t} + \frac{3}{t-1} + \frac{16}{t+2} = 2.$ Розв'яжемо таке дробово-раціональне рівняння: $\frac{16}{t+2} - \frac{2}{t-1} - 2 = 0$; $\frac{16t-16-2t-4-2t^2-2t+4}{(t+2)(t-1)} = 0$; $\begin{cases} t^2 - 6t + 8 = 0, \\ t \neq -2; t \neq 1 \end{cases}$ звідки t=2 або t=4. Повернувшись до змінної *x*, одержимо сукупність: $\left[\begin{array}{l} \log_x 9=2; \\ \log_x 9=4 \end{array}\right.$ і далі: $\left[\begin{array}{l} x^2=9; \\ x^4=9 \end{array}\right.$ Маємо чотири корені: $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = \sqrt{3}, x_4 = -\sqrt{3}.$ Враховуючи область визначення рівняння, одержуємо відповідь.

Відповідь: 3; $\sqrt{3}$.

Чи є воно безпомилковим, раціональним, повним, обґрунтованим?

Якщо припущені *помилки*, вкажіть, якого вони роду (алгоритмічні, логічні, графічні, термінологічні, ситуаційні), грубі чи негрубі.

Чи можна відзначити якісь *недоліки* такого розв'язання?

4. Оцініть представлене розв'язання математичної задачі:

Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6.$

Розв'язання: Область визначення заданого рівняння визначається системою: $\begin{cases} 15 - x \geq 0, \\ 3 - x \geq 0 \end{cases}$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату: $15 - x + 3 - x + 2\sqrt{(15-x)(3-x)} = 36$; відокремлимо радикал: $2\sqrt{45 - 18x + x^2} = 18 + 2x$; поділимо обидві частини рівняння на 2: $\sqrt{45 - 18x + x^2} = 9 + x$;

піднесемо знов обидві частини рівняння до квадрату: $45-18x+x^2=81+18x+x^2$, звідки одержуємо корінь $x=-1$, що задовольняє області визначення рівняння.

Відповідь: -1.

Чи є воно безпомилковим, раціональним, повним, обґрунтованим? Якщо припущені *помилки*, вкажіть, якого вони роду (алгоритмічні, логічні, графічні, термінологічні, ситуаційні), грубі чи негрубі.

Чи можна відзначити якісь *недоліки* такого розв'язання?

5. Оцініть представлене розв'язання математичної задачі:

Розв'яжіть нерівність: $\sqrt{2-x^2}<x+1$.

Розв'язання: піднесемо обидві частини нерівності до квадрату, одержимо: $2-x^2<x^2+2x+1 \Leftrightarrow 2x^2+2x+1>0$. Вирішуючи останню нерівність, маємо: $\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$. Крім того: $2-x^2\geq 0$. Оскільки $-\sqrt{2}<\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, то розв'язання вихідної нерівності є $\left[-\sqrt{2};\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\sqrt{2}\right]$. Це і є *відповідь*.

Чи є воно безпомилковим, раціональним, повним, обґрунтованим?

Якщо припущені *помилки,* вкажіть, якого вони роду (алгоритмічні, логічні, графічні, термінологічні, ситуаційні), грубі чи негрубі.

Чи можна відзначити якісь *недоліки* такого розв'язання?

6. Оцініть представлене розв'язання математичної задачі:

Розв'яжіть нерівність: $\log_{\sqrt{2}-1}(x-2)>\log_{3-2\sqrt{2}}25$.

Розв'язання: Помітимо, що $3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$. Тоді $\log_{\sqrt{2}-1}(x-2)>\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}-1}25$, або $\log_{\sqrt{2}-1}(x-2)>\log_{\sqrt{2}-1}5$. Так як

$0<\sqrt{2}-1<1$, то логарифмічна функція з такою основою спадає. Отже, $\begin{cases} x-2<5, \\ x-2>0 \end{cases}$, або $0<x-2<5,\ 2<x<7$.

Відповідь: (2;7).

Чи є воно безпомилковим, раціональним, повним, обґрунтованим?

Якщо припущені *помилки,* вкажіть, якого вони роду (алгоритмічні, логічні, графічні, термінологічні, ситуаційні), грубі чи негрубі.

Чи можна відзначити якісь *недоліки* такого розв’язання?

Список використаних джерел

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посіб. Київ : Вища шк., 1989. 367 с.
2. Галицкий М. Л. Сборник задач по алгебре: учеб. пособие для 8-9 кл. с углубл. изучением математики / М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. 12-е издание. Москва : Просвещение, 2006. – 301 с.
3. Єршова А. П. Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський. Харків : Вид-во «Ранок», 2015. 224 с.
4. Жовнір Я. М. 500 задач методики викладання математики. Київ : Центр навчальної літератури, 2007. 112 с.
5. Істер О. С. Математика. 6 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів. Київ : Генеза, 2014. 296 с.
6. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике. Москва : Просвещение, 1991. 352 с.
7. Лукіна Т. О. Моніторинг якості освіти: теорія і практика. Київ : Вид. дім «Шкільний світ»: Вид. Л. Галіцина, 2006. 128 с.
8. Лутченко Л. І., Пасічник Н. О. Основи педагогічного оцінювання: Навчально-методичний посібник. Кіровоград : Лисенко В.Ф, 2012. 72 с.
9. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2015. 256 с.
10. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 8 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2016. 384 с.
11. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2016. 240 с.

12. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2017. 272 с.
13. Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів/ А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2017. 416 с.
14. Мерзляк А. Г. Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2020. 240 с.
15. Мерзляк А. Г. Математика. 5 клас : підруч. для закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Вид. 2-ге, доопрац. відповідно до чинної навч. програми. Харків : Гімназія, 2018. 272 с.
16. Мерзляк А. Г. Математика. 6 клас : підруч. для закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2014. 399 с.
17. Мерзляк А. Г., Полонський В .Б., Якір М. С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 224 с.
18. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 304 с.
19. Моніторинг якості освіти: світові досягнення та українські перспективи / За заг. ред. О. І. Локшиної. К. : К.І.С, 2004. 128.
20. Нєдялкова К.В. Загальна методика навчання математики: практичний курс. Навчальний посібник. Одеса : ТОВ «Рекламсервіс», 2014. 256 с.

21. Основи педагогічного оцінювання: Ч. І. Теорія: Навчально-методичні та інформаційно-довідкові матеріали для педагогічних працівників / За заг. ред. Ірини Булах. К. : Майстер-клас, 2005. 96 с.
22. Основи педагогічного оцінювання: Ч. ІІ. Практика: Навчально-методичні та інформаційно-довідкові матеріали для педагогічних працівників / За заг. ред. Ірини Булах. К. : Майстер-клас, 2005. 56 с.
23. Практикум педагогічної майстерності: Навчальний посібник / Кол. автор.: Сергєєва Л. М., Молчанова А. О., Пащенко О. В. та ін.. / За ред.. В. В. Олійника. К. : ТОВ «Етіс Плюс», 2008. 184 с.
24. Скафа О. І., Тутова О. В. Комп'ютерно-орієнтовані уроки в евристичному навчанні математики: навчально-методичний посібник. Донецьк : вид-во «Вебер», 2009. 320 с.
25. Соколенко Л. О. Наукові основи шкільного курсу математики : Навчально-методичний посібник для студентів університетів спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Частина 1. Чернігів : «Десна Поліграф», 2020. 144 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

1. Переліки підручників, рекомендованих МОН на 2020-21 навч. рік. URL: https://imzo.gov.ua/pidruchniki/pereliki/
2. Програма з математики для 5-9 класів. URL: https://ru.osvita.ua/school/program/program-5-9/56128/
3. Програми з математики для старшої школи. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
4. Ресурс підручників. URL: https://pidruchnik.com.ua
5. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/derzhavni-standarti