Міністерство освіти і науки України
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»
Навчально-науковий інститут
природничо-математичних наук, інформатики та менеджменту

Пивоварчик Вячеслав Миколайович

Теорія цілих функцій

Конспект лекцій

Одеса 2026

УДК: 517.53
Друкується за рішенням вченої ради Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» (протокол від «___» __________ 2026 року).

Теорія цілих функцій: Конспект лекцій курсу «Теорія цілих функцій» для студентів третього (освітньо-наукового) рівня освіти, спеціальність: Е7 Математика.

Рецензенти:
Лесечко Олександр Васильович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури.
Бойко Ольга Павлівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики та інформатики Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського.

Тексти лекцій з навчального курсу «Теорія цілих функцій» – це навчальне видання для студентів з методики засвоєння теоретичної частини навчальної дисципліни «Теорія цілих функцій» для студентів третього (освітньо-наукового) рівня освіти, спеціальність: Е7 Математика.

Поданий у методичних рекомендаціях матеріал висвітлює питання подання цілої функції у вигляді нескінченного добутку, зв'язок між швидкістю зростання цілої функції у нескінченності з асимптотикою її коренів. Важливим для застосувань є також теорія функцій Ерміта-Білера, яка узагальнює класичну теорему Ерміта-Білера на випадок цілих функцій.

.

Ключові слова: порядок цілої функції, тип цілої функції, первинний множник, многочлен, мероморфна функція, півплощина.

ЗМІСТ.

Вступ.

Початок систематичного вивчення теорії цілих і мероморфних функцій було покладено роботами Вейєрштрасса (1876), Міттаг-Леффлера (1877) і Пікара (1879). Теореми Вейєрштрасса і Міттаг-Леффлера дали загальний опис структури цілих та мероморфних функцій. Знайдене Вейєрштрассом представлення цілої функції у вигляді нескінченного добутку лягло в основу вивчення властивостей цілих і мероморфних функцій. Теорема Пікара призвела до виникнення теорії розподілу значень мероморфних функцій. Важливу роль у розвитку і теорії цілих і мероморфних функцій відіграла встановлена Йенсеном (1899) формула, що зв'язує число нулів цілої функції в крузі з величиною її модуля на колі.

Теорія цілих функцій оформилася як окрема наукова дисципліна після рабіт Лорена, Адама і Бореля, які з’явились у 1882-1900 рр. Книга Бореля «Lecons sur les fonctions èntières», 1900, була першою монографією, присвяченою цій теорії. Роботи Р. Неванлінна, що відносяться до 20-х років XX ст., призвели до інтенсивного розвитку теорії розподілу значень мероморфних функцій і, в основному, визначили її сучасний характер. Основи цієї теорії були викладені в книзі Р. Неванлінна "Le thèorème de Picard-Borel et la thèorie des fonctions mèromorphes", 1929.

Перші результати щодо загальної теорії цілих функцій були пов'язані з дослідженнями з диференціальних рівнянь (Пуанкаре) та теорії чисел (Адамар). При подальшому розвитку теорії цілих і мероморфних функцій виявляються все нові її зв'язки як з цими, так і з іншими областями математики: функціональним аналізом, математичною фізикою, теорією ймовірностей та ін.

Однією з найважливіших проблем теорії цілих функцій є проблема зв'язку між зростанням цілої функції і розподілом її коренів. До цієї проблеми зводяться багато задач із різних областей, суміжних з теорією функцій комплексної змінної.

Зв'язок між зростанням цілої функції та розподілом її коренів було досліджено у класичних роботах Бореля, Адамара, Ліндельофа та інших авторів.

Більш тонкі характеристики зростання та розподілу коренів цілих функцій дали змогу встановити точніші залежності. При цьому аналогічні залежності були виявлені для більш широкого класу функцій, що голоморфні всередині кута.

Особливо точні залежності виходять для спеціального класу функцій, які природно називати функціями цілком регулярного зростання. Теорії функцій цілком регулярного зростання систематично застосовуються до вивчення різних питань теорії цілих функцій.

1. Загальна теорія зростання цілих функцій.

Цілою функцією називають функцію комплексної змінної, аналітичну у всій площині і, отже, таку що представляє збіжний степеневий ряд.

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \ldots$$

Ці функції є природним узагальненням многочленів та найбільш близькі до многочленів за своїми властивостями. Теорема Вейерштрасса про розвинення цілої функції у нескінченний добуток дала основний апарат для дослідження властивостей цілих функцій і стала відправним пунктом їхньої класифікації. Приблизно до того ж часу, як і робота Вейерштрасса, відносяться і роботи Лаггера, у яких вивчається зв'язок між цілими функціями і многочленами і встановлюється важливе поняття роду цілої функції.

У класичних дослідженнях Бореля, Адамара та Ліндельофа досліджується зв'язок між зростанням цілої функції та розподілом її коренів. Швидкість зростання многочлена коли незалежна змінна прямує до нескінченності, очевидно, визначається його степенем. З іншого боку, число коренів многочлена дорівнює його степеню. Таким чином, чим більше коренів многочлена, тим більше його зростання. Цей зв'язок між множиною коренів функції та її зростанням узагальнюється на довільні цілі функції. Зміст більшості класичних теорем теорії цілих функцій полягає у встановленні зв'язку між розподілом коренів цілої функції та її асимптотичною поведінкою при $z \to \infty$.

Шкала зростання.

Для показників зростання цілої функції *f(z)* вводиться функція

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

(Іноді будемо писати просто *M(r)*). З принципу максимуму модуля випливає, що зі збільшенням *r* величина $M_f(r)$ монотонно зростає. Швидкість зростання функції $M_f(r)$ є найважливіша характеристика поведінки цілої функції. Покажемо, що у цілої функції, відмінної від многочлена, $M_f(r)$ зростає швидше за будь-який додатний степінь *r*.

Теорема 1. Якщо є таке ціле додатне число *n*, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_f(r)}{r^n} < \infty$$

тоді *f(x)* є многочлен степеню, не більшого *n*.

Доведення. Якщо

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ \dots + \ a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots$$

$$\text{та} \quad P_n(z) = a_0 + a_1 z + \ \dots + \ a_n z^n$$

тоді функція

$$\varphi(z) = [f(z) - \ P_n(z)] z^{-n-1}$$

- ціла і на певній послідовності кіл $|z| = \ r_n \ (r_n \ \to \infty)$ рівномірно прямує до нуля. Звідси за принципом максимуму випливає, що $\varphi(z) \equiv 0$, тобто

$$f(z) \equiv P_n(z).$$

Таким чином, при оцінці зростання цілих трансцендентних функцій слід вибирати для порівняння функції, що зростають швидше, ніж степеневі.

В якості таких функцій, які служать для порівняння, обирають функції виду

$$e^{r^k}$$

де $k > 0$.

Цілу функцію *f(z)* називають функцією скінченного порядку, якщо існує таке додатне число *k*, що нерівність

$$M_f(r) < e^{r^k}$$

виконується для всіх достатньо великих значень $r \ (r > r_0\ (k))$.

Точну нижню границю таких чисел k називають порядком цілої функції *f(z)*. З цього означення випливає що, якщо ρ – порядок цілої функції *f(z),* а ε – довільне додатне число, то

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} < M_f(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \tag{1.01}$$

причому права нерівність виконується для всіх достатньо великих значень r, а ліва – для певної послідовності $\{r_n\}$ значень r; що прямує до нескінченності. Легко перевірити, що умова (1.01) рівносильна рівності

$$p = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} \tag{1.02}$$

яка тому, також, може бути прийнята як означення порядку функції.

Нерівності, які виконуються для всіх достатньо великих значень r, ми будемо для стислості надалі називати асимптотичними нерівностями.

Точну характеристику зростання функції даного порядку дає тип функції. Типом σ цілої функції *f(z)* порядку ρ називають точну нижню границю додатних чисел A, для яких асимптотично

$$M_f(r) < e^{Ar^{\rho}}$$

Так само як і при визначенні порядку, легко перевірити, виходячи з цього означення, що тип σ функції *f(z)* порядку ρ визначається рівністю

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho}}.$$

При $\sigma = 0$ функцію називають функцією мінімального, при $0 < \sigma < \infty$ нормального і при $\sigma = \infty$ максимального типу.

Прикладом цілої функції порядку n та типу σ може при n цілому служити функція

$$e^{\sigma z^n}.$$

Легко також перевірити, що $\sin z$ є ціла функція першого порядку та нормального типу $\sigma = 1$. Функція $\cos\sqrt{z}$ має порядок $\rho = \frac{1}{2}$ і тип $\sigma = 1$. Функція

$$e^{e^z}$$

дає приклад цілої функції нескінченого порядку.

Далі ми збудуємо приклади цілих функцій довільного порядку та типу.

Ми говоритимемо, що зростання функції $f_2(z)$ більше, ніж зростання функції $f_1(z)$, якщо порядок $f_2(z)$ більше порядку $f_1(z)$ чи порядки рівні, але тип $f_2(z)$ більше типу $f_1(z)$.

Легко переконатися в тому, що порядок суми двох функцій не перевищує найбільшого з порядків доданків, а якщо при рівності порядків доданків сума має той же порядок, що і доданки, то тип суми не перевищує найбільшого з типів доданків. Крім того, якщо зростання одного з доданків більше за зростання іншого, то сума має порядок і тип доданку більшого зростання.

Зв'язок між зростанням цілої функції та швидкістю зменшення коефіцієнтів її степеневого розвинення.

Нехай ціла функція *f (z)* розвинена в степеневий ряд

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \qquad (1.03)$$

Радіус збіжності цього ряду нескінченний і тому

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0 \qquad (1.04)$$

Наступна теорема дає можливість визначати порядок і тип цілої функції за швидкістю зменшення послідовності її коефіцієнтів Тейлора.

Теорема 2. Порядок і тип цілої функції виражаються через коефіцієнти її степеневого розвинення рівностями

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln \frac{1}{|c_n|}}, \qquad (1.05)$$

$$(\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|}\right). \qquad (1.06)$$

Доведення. За відомою нерівністю для коефіцієнтів степеневого розвинення

$$|c_n| \le \frac{M_f(r)}{r^n}. \qquad (1.07)$$

Якщо *f (z)* – скінченного порядку, то асимптотично

$$M_f(r) < e^{Ar^k}, \qquad (1.08)$$

$$|c_n| < e^{Ar^k} r^{-n} .$$

Користуючись звичайними прийомами знаходження екстремуму, легко переконатися, що функція, яка стоїть у правій частині цієї нерівності, набуває в інтервалі $r > 0$ найменше значення при

$$r = \frac{n}{Ak}^{\frac{1}{k}}$$

і, отже, асимтотично

$$|c_n| < \left(\frac{eAk}{n}\right)^{\frac{n}{k}} . \qquad (1.09)$$

Припустимо, протележне, що оцінка (1.09) має місце для всіх значень індексу n, які перевершують деяке число $n_0\,(k, A)$ і знайдемо оцінку для $M_f(r)$. При $n > m_r = [2^k eAkr^k]$ і всіх достатньо великих значеннях *r* в силу (1.09)

$$|c_n z^n| < 2^{-n}$$

і, отже

$$|f(z)| < \sum_{n=0}^{m_r} |c_n| r^n + 2^{-m_r}.$$

Якщо ввести позначення

$$\mu(r) = \max_n |c_n| r^n,$$

то вийде, що

$$M_f(r) \leq (1 + 2^k eAkr^k)\mu(r) + 2^{-m_r}. \qquad (1.10)$$

Якщо *f(z)* – не є многочлен, то $M_f(r)$, а значить згідно з (1.10) і $\mu(r)$ зростають швидше, ніж будь-яка степенева функція, і тому індекс найбільшого члена ряду (1.03) має необмежено зростати зі зростанням *r*. З (1.09) випливає, що асимптотично

$$\mu(r) \leq \max_n \left(\frac{eAk}{n}\right)^{\frac{n}{k}} r^n.$$

Максимум правої частини досягається при

$$n = Akr^k$$

і, відповідно, асимптотично

$$\mu(r) \leq e^{Ar^k}$$

З (1.10) виходить, що асимптотично

$$M_f(r) \ < (2+2^k eAkr^k)e^{Ar^k}. \tag{1.11}$$

Тож, з (1.08) випливає (1.09), а з (1.09) випливає (1.11).

Це показує, що порядок ρ цілої функції *f (z)* збігається з точній нижньою границею тих значень k, при яких має місце асимптотична нерівність (1.09), а тип дорівнює точній нижній границі значень A, у яких асимптотична нерівність (1.09) має місце для k = ρ. Звідси, безпосередньо, випливають обидва твердження теореми.

Відзначимо ще цікавий висновок, який виходить безпосередньо з формул (1.07) та (1.10). Максимальний член у степеневому розвинені цілої функції скінченного порядку задовольняє асимптотичні нерівності

$$\mu(r) \ \leq M_f(r) < r^{\rho+\varepsilon}\mu(r),$$

де ρ – порядок функції *f (z)* та ε – будь-яке додатне число.

За допомогою теореми 2 можна легко побудувати цілі функції довільного порядку та типу. Розглянемо з цією метою функцію

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Az^n}{\Gamma\ (\alpha\dot{n}+1)},$$

де *A > 0* і *α > 0.* За відомою формулою Стірлінга

$$\Gamma(\alpha n+1) = \left(\frac{\alpha n}{e}\right)^{\alpha n} \sqrt{2\pi\alpha n}\ \left[1+O\ \left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

з (1.05) та (1.06) отримуємо

$\rho = \frac{1}{\alpha}$ і $\sigma = A$.

Можна побудувати також функції максимального та мінімального типу. Наприклад, при

$$c_n = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}} \ (n=1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

ряд (1.03) представляє функцию порядку ρ і максимального типу, а при

$$c_n = \left(\frac{1}{n\ln n}\right)^{\frac{n}{\rho}} \ (n=2,\ 3, \ldots)$$

- порядку ρ і мінімального типу. При $c_n = e^{-n^2}$ виходить ціла функція нульового порядку. Всі ці твердження перевіряються за допомогою (1.05) та (1.06). Аналогічно можна побудувати цілу функцію нескінченного порядку.

Верхні границі у формулах (1.05) і (1.06) не змінюються, якщо c_n замінити на *(n+1)* c_n. Відповідно, при диференціюванні порядок і тип цілої функції не змінюється.

Розвінення цілої функції у нескінченний добуток.

Відомо, що будь-який многочлен може бути представлений у вигляді добутку лінійних множників. Аналогом цього твердження для цілих функцій є теорема Вейєрштраса про представлення цілої функції нескінченним добутком. Це представлення є основою дослідження основного питання теорії цілих функцій – питання про зв'язок між зростанням цілої функції і розподілом її коренів у комплексній площині.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - послідовність відмінних від нуля комплексних чисел з єдиною точкою накопичення на нескінченності. Ми побудуємо цілу функцію, нескінченна кількість коренів якої збігається з цією послідовністю.

Ми можемо вважати, що ці числа перенумеровані в порядку зростання їх модулей (якщо є кілька різних точок a_n з тим самим модулем, то порядок їх нумерації довідьний). Підберемо таку послідовність натуральних чисел p_n щоб ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1} \tag{1.12}$$

рівномірно збігався у будь-якій обмеженій області. Такий вибір можливий, бо при $|z| \le R \ (R > 0)$ нерівність

$$\left|\frac{z}{a_n}\right| < q < 1$$

виконується для всіх достатньо великих *n,* і можна вибрати, наприклад, $p_n = n$. Складемо нескінченний добуток

$$\Pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n};\, p_n\right), \qquad (1.13)$$

в якому

$$G(u;\, p) = (1-u)e^{u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^p}{p}}, \quad G(u;\, 0) = 1-u$$

Вирази $G(u;\, p)$ називають первинними множниками.

Покажемо, що добуток (1.13) рівномірно збігається на будь-якій обмеженій замкнутій множині, що не містить точок a_n і, отже, визначає цілу функцію, що обертається в нуль у всіх точках a_n і тільки в них. З цією метою оцінимо величину $|\ln G(u;\, p)|$ при $|u| \le q < 1$ і $|\arg(1-u)| \le \pi$. З розвинення

$$\ln G(u;\, p) = -\frac{u^{p+1}}{p+1} - \frac{u^{p+2}}{p+2} - \cdots,$$

яке має місце за вказаних умов, виходить:

$$|\ln G(u;\, p) < \frac{|u|^{p+1}}{1-|u|} \le \frac{1}{1-q}|u|^{p+1}.$$

З цієї нерівності випливає, що при $|z| \le R$ та $n > n(q, R)$ буде мати місце нерівність

$$\left|\ln G\left(\frac{z}{a_n};\, p_n\right)\right| < \frac{1}{1-q}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1},$$

в силу якої з рівномірної збіжності ряду (1.12) у крузі $|z| \le R$ випливає рівномірна збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln G\left(\frac{z}{a_n};\, p_n\right),$$

а значить, і добутку (1.13) на будь якій замкненій множині, що лежить у цьому крузі і не містить точок a_n.

Теорема 3. Будь-яка ціла функція *f (z)* представляється у формі

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\omega} G\left(\frac{z}{a_n};\, p_n\right) \qquad (\omega \le \infty) \qquad (1.14)$$

де $g(z)$- ціла функція, a_n – не рівні нулю корені *f (z)* і *m* кратність її нульового кореня.

Доведення. Відмінні від нуля корені a_n цілої функції *f (z)* (*n =1, 2, … ω* $\leq \infty$) не мають точок накопичення крім нескінченно віддаленої. Складемо за ними

$$\Pi(z) = \prod_{n=1}^{\omega} G\ \left(\frac{z}{a_n};\ p_n\right),$$

причому $p_n = 0$, якщо ω скінчена. Функція

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z^m\,\Pi(z)}$$

ціла і не має коренів. Тому функція

$$g(z) = \ln \varphi(z)$$

також ціла і ми отримуємо необхідне представлення

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \Pi(z).$$

У представленні (1.14) послідовність чисел ρ_n визначена неоднозначно, а значить неоднозначно визначена і функція *g (z)*.

Представлення функції *f (z)* значно спрощується, якщо числа a_n підпорядковані наступній додатковій умові: ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\lambda}} \tag{1.12'}$$

збігається при деякому додатному λ. Позначимо в цьому випадку через *p* найменше ціле число, для якого ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$$

збігається. Очевидно, $0 \leq p < \lambda$. Ряд (1.12) буде рівномірно збігатись, якщо покласти всі $p_n = p$.

Нескінченний добуток, який рівномірно збігається

$$\Pi(\mathrm{z}) = \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n};\ p\right) \tag{1.15}$$

називається канонічним добутком, а число p – родом канонічного добутку.

У цьому випадку у представлені (1.14) за нескінченний добуток зазвичай вибирають канонічний добуток. При цьому функція $g(z)$ визначається однозначно.

Якщо $g(z)$ – многочлен, то $f(z)$ називається цілою функцією скінченного роду. Найбільше з чисел ρ та q, де q- степень многочлена $g(z)$ називається родом цілої функції $f(z)$.

Якщо $g(z)$ – не є многочлен або, якщо ряд (1.12') розбігається при всіх значеннях λ, то род функції вважається нескінченним.

2. Теорема Адамара.

Теореми, які ми раніше розглядали, дають можливість значно уточнити теорему про представлення цілої функції нескінченним добутком. Це уточнення, що належить Адамару, відноситься до представлення цілої функції скінченого порядку і є однією з класичних теорем теорії функцій.

Теорема 2.1. Ціла функція *f(z)* скінченого порядку ρ представляється у формі

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{n=1}^{\omega} G\left(\frac{z}{a_n};\ p\right) \ (\omega \le \infty), \tag{2.1}$$

де a_n – всі відмінні від нуля корені функції $f(z), p \le \rho$, *P (z)* многочлен, степень якого q не перевищує ρ, а m кратність нульового кореня.

Інакше цю теорему можна сформулювати так:

Рід цілої функції не перевищує її порядку.

Доведення. Показник збіжності ρ_1 коренів цілої функції не перевищує її порядку ρ, а ціле число p у канонічному добутку цієї функції.

$$\Pi(z) = \prod_{n=1}^{\omega} G\ \left(\frac{z}{a_n};\ p\right) \qquad (\omega \le \infty)$$

не переверщує ρ_1. Отже $p \le \rho$.

Залишається показати, що ціла функція *g(z)* у (1.14) є многочлен степеня q не більшого за ρ. Тому зауважимо, що порядок канонічного добутку дорівнює показнику збіжності $p_1 \le \rho$. За наслідком теореми про зростання добутку двох цілих функцій (див.теорема 12 у [2]) ціла функція

$$\psi(z) = f(z)\Pi^{-1}(z)z^{-m}$$

має порядок не більший ρ і тому задовольняє асимптотичну нерівность

$$\ln|\psi(z)| < r^{\rho+\varepsilon}.$$

Крім того функція $\psi(z)$ не має коренів. Таким чином,

$$g(z) = \ln\psi(z)$$

- також ціла функція, причому асимптотично

$$u(r) < r^{\rho+\varepsilon}.$$

Через нерівність Каратеодорі звідси випливає, що асимптотично

$$M_g(r) < r^{\rho+\varepsilon}.$$

За теоремою 1.1 функція $g(z)$ - многочлен степеню, не більшого за ρ. Теорема доведена.

Для функції нецілого порядку степінь многочлена в експоненційному множнику менший ρ і порядок функції збігається з порядком канонічного добутку, а отже, і з показником збіжності. Таким чином, у цьому випадку

$$p < \rho < p+1,$$

і рід функції $p = [\rho]$.

При ρ цілому рід функції або дорівнює ρ , або дорівнює $\rho - 1$. Справді, якщо рід функції менший ніж ρ, то $q < \rho$ і порядок функції ρ збігається з порядком кононічного добутку, який рівен показнику збіжності ρ_1.

З іншого боку, $p \le \rho_1 \le p+1$, так що $p \le \rho \le p+1$, і так як, за припущенням $p < \rho$, то $p = \rho - 1$.

Приклади. Функція

$$f(z) = \frac{\sin \pi\sqrt{z}}{\pi\sqrt{z}}$$

- ціла, половинного порядку і її корені $1^2, 2^2, \dots$ За теоремою Адамара вона нульового роду і тому допускає представлення

$$f(z) = c \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right).$$

З рівності $f(0) = 1$ випливає, що $c = 1$. Підставляючи z^2 замість z, отримуємо:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

звідки находимо також:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

Отже, $\sin \pi z$ – ціла функція не тільки першого порядку, але і першого роду.

3. Принцип Фрагмена і Ліндельофа.

Принцип максимуму модуля полягає, як відомо, в тому, що модуль функції *f(z),* аналітичної в деякій області і неперервної у замиканні цієї області, приймає найбільше значення на границі області. Цей важливий принцип був поширений Фрагменом і Ліндельофом на той випадок, коли неперервність функції порушується в деяких виняткових точках границі, проте за умови, що при наближенні до цих точок модуль функції не надто швидко зростає. У основі лежить така теорема.

Теорема 3.1. Нехай $f(z)$ – функція аналітична в деякій області *G*, та нехай існує аналітична в цій області функція $\omega\,(z)$, причому $f(z)[\omega(z)]^{\delta}$ має при будь якому $\delta > 0$ граничні значення у всіх точках границі (включаючи нескінченно віддалену точку, якщо вона є граничною) і по всій границі.

$$\left|f\ (z)[\omega(z)]^{\delta}\right| \leq M, \tag{3.1 }$$

причому M не залежить від δ.

Тоді

$$f\ (z) \leq M$$

по всій області *G*.

Доведення. Зі звичайного принципу максимуму модуля випливає, що виконання нерівності (3.1) на межі області тягне за собою виконання цієї ж нерівності всюди всередині області*). Нехай точка z_0 належить області G і $\omega(z_0) \neq 0$. Тоді при за будь яким $\delta > 0$

$$|f(z_0)| \leq M\ |\omega(z_0)|^{-\delta}$$

і, отже,

$$|f(z_0)| \leq\ M\ . \tag{3.2}$$

Корені функції $\omega\,(z)$ ізольовані точки, а по принципу максиму модуля нерівність (3.2) повинна виконуваться і в ціх точках, тобто во всій області G

*) якщо функція $\omega\,(z)$ має корені в області *G*, то $f(z)\ |\omega(z_0)|^{-\delta}$ не буде аналітичною функцією в *G*, але модуль цієї багатозначної функції однозначний в *G*. Принцип мксимуму модуля переноситься на цій випадок без істотних змін в доведенні.

Зауважимо, що знак нерівності не може досягатися у внутрішній точці області, якщо функція $f(z)$ не є сталою. З цього загального принципу виводиться ряд важливих теорем, які часто застосовуються в різних питаннях.

4. Теорема Ерміта-Білера для цілих функцій.

Важливим напрямком теорії цілих функцій є вивчення розподілу коренів і встановлення умов того, що всі корені цілої функції належать деякій області *G*. Надалі за область *G* буде прийнята відкрита або замкнена верхня півплощина.

Основним фактом алгебри, що направив дослідження в цій галузі, є відома теорема Ерміта-Білера для многочленів.

Для того щоб многочлен

$$\omega(z) = P(z) + iQ(z),$$

де *P(z)* и *Q(z)* – дійсні многочлени, не мав коренів у замкнутій нижній півплощині $Im\, z \leq 0$, необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови:

1) Многочлени *P(z)* и *Q(z)* мають лише прості дійсні корені, причому ці корені взаємно чергуються, тобто між двома послідовними коренями одного з цих многочленів знаходиться рівно один корінь другого;

2) У деякій точці x_0 дійсної осі

$$Q'(x_0)P(x_0) - Q(x_0)P'(x_0) > 0 \quad (4.01)$$

Той факт, що два многочлени задовольняють умові 1) ми висловлюватимемо словами «корені многочленів *P(z)* і *Q(z)* чергуються» або «многочлени *P(z)* і *Q(z)* задовольняють умові чергування коренів». Тієї ж термінології дотримуватимемося щодо цілих функцій.

Зауважим, що якщо корені многочленів *P(z)* і *Q(z)* чергуються, то вираз $Q'(x_0)P(x_0) - Q(x_0)P'(x_0)$ зберігає знак на всій дійсній осі.

Легко бачити що у прямій формі критерій Ерміта-Білера не переноситься на довільні цілі функції.

Можна показати на простих прикладах, що для цілої функції

$\omega(z) = P(z) + iQ(z)$ дійсність та чергування коренів функції *P(z)* і *Q(z)* не є ні необхідною ні достатньою умовою того, щоб функція $\omega(z)$ не мала коренів в нижній або верхній напівплощині. Справді, нехай, наприклад, *φ(z)* і $\psi(z)$ – дійсні многочлени, корені яких чергуються. Тоді корені дійсної та уявної частин функції

$$\omega(z) = e^{z}\varphi(z) + i\,\psi(z)$$

також дійсні і чергуються. З іншого боку, ця функція цілком регулярного зростання та її індикаторна діаграма (див.[2]) відрізок $0 \leq x \leq 1$ дійсної осі. Таким чином, всередині скільки завгодно малих кутів, що містять промені уявної осі, знаходиться безліч коренів (зі щільністю $\Delta = (2\pi)^{-1}$), і, отже, умова чергування коренів не є достатньою для того, щоб корені функції лежали в одній з півплощин. Щоб показати, що ця умова не є також необхідною, можна навести наступний приклад. Функція

$$\omega(z) = e^{i\lambda z}(z - i)$$

має тільки один корінь *i,* а між цім легко перевірити, що дійсна частина цієї функції $z\cos\lambda z - \sin\lambda z$ має при $\lambda > 1$ пару комплексних коренів, а при $\lambda < 1$ має три кореня між двома найближчими до нуля коренями уявній частини $-z\ \sin\lambda z - \cos\lambda z$.

Для рішення деяких питань теорії регулювання машин потрібен ефективний критерій того, що всі корені функції

$$F(z) = \sum_{k,j=0}^{n,m} a_{kj} z^i e^{\lambda_k z} \tag{4.02}$$

лежать у лівій напівплощині. Функції виду (4.02) Н. Г. Чеботарьов назвав квазіполіномами. Квазіполіноми залежать лише від скінченного числа параметрів і тому природньо припускати, що для них є ефективний метод вирішення цього питання.

Представлення дійсної мероморфної функції, що відображає верхню напівплощину на верхню.

При перенесенні критерію Ерміта-Білера на довільні цілі функції істотну роль грає особливий клас цілих функцій. Цей клас було введено та вивчено М. Г. Крейном у його статті «Про один клас цілих мероморфних функцій», присвяченій перенесенню критерію Гурвіца на цілі функції.

Означення. Ціла функція $\omega(z)$ називається функцією класу *HB*, якщо вона не має коренів у замкнутій нижній півплощині $Im\, z \leq 0$, і

$$\left|\frac{\omega\ (z)}{\overline{\omega}(z)}\right| < 1 \text{ при } Im\, z\ > 0\ * \qquad (4.03)$$

Якщо $\omega\ (z)$ – многочлен, то умова (4.03), вочевідь, випливає з того, що всі корені многочлена лежать у верхній напівплощині, тобто в цьому випадку умова (4.03) зайва.

З теореми Фрагмена и Ліндельофа випливає, що та сама обставина має місце і для цілих функцій нульового степеня. Для цілих функцій довільного зростання умови, що визначають клас *HB*, незалежні. Зауважимо ще, що з (4.03) випливає належність функції $\frac{\omega\ (z)}{\overline{\omega}(z)}$ в верхній напівплощині класу *A,(див.[2]),* а так як корені цієї функції в верхній напівплощині збігаються з коренями $\omega\ (z)$, то будь яка функція класу *HB* є ціла функція класу А.

Надалі нам часто доведеться користуватися еквівалентністю умови (4.03) для функції

$$\omega\ (z) = P\ (z)\ + i\ Q(z),$$

де *P (z)* та *i Q(z)* – дійсні функції, умові, що функція

$$\theta\ (z) = \frac{Q\ (z)}{P\ (z)}$$

відображає верхню напівплощину на верхню.

Насправді, підставивши

$$w = \frac{\omega\ (z)}{\overline{\omega}(z)}$$

і $\theta = \theta\ (z)$ будемо мати

$$w = \frac{1 + i\theta}{1 - i\theta}.$$

Одиничному колу в площині w відповідає верхня напівплощина в площині θ.

У теоремі 4.1 ми даємо представлення дійсної мероморфної функції, що відображає верхню напівплощину на верхню.

* Тут, як і зазвичай, під $\overline{\omega}(z)$ розуміється ціла функція, яка виходить із ω (z) заміною в її степеневому розвиненні всіх коефіцієнтів на коплексно спряжені.

Теорема 4.1. Щоб дійсна мероморфна функція ψ (z) відображала верхню півплощину на верхню, тобто щоб виконувалася нерівність $Im\,\psi(z) Im\,z > 0$ при $Im\,z \neq 0$ необхідно і достатньо, щоб ця функція представлялася у формі

$$\psi(z) = c\frac{z-a_0}{z-b_0}\prod{}'\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\left(1-\frac{z}{b_k}\right)^{-1}, \qquad (4.04)$$

де $b_k < a_k < b_{k+1}, \pm k = 0, 2, \dots, a_{-1} < 0 < b_1$ та $c > 0$.

Штрих при знаку нескінченного добутку означає, що індекс k приймає всі цілі значення крім нуля.

Доведення. Доведемо спочатку достатність. З чергування величин a_k і b_k легко виходить збіжність ряду

$$\sum{}'\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{a_k}\right),$$

а отже, і збіжність ряду

$$\sum{}'\left[\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\left(1-\frac{z}{b_k}\right)^{-1}-1\right] = z\sum{}'\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{a_k}\right)\left(1-\frac{1}{b_k}\right)^{-1}.$$

Таким чином, добуток (4.04) збігається рівномірно на будь-якій обмеженій замкненій множині, яка не містить точок $b_k(\pm\, k = 0, 1, \dots)$.

При всіх значеннях індекса k маємо:

$$arg\frac{1-\dfrac{z}{a_k}}{1-\dfrac{z}{b_k}} = \arg(z-a_k) - arg\,(z-b_k),$$

і отже, цей аргумент дорівнює куту, під яким видно відрізок $[b_k, a_k]$ дійсної осі з точки z. Таким чином, з рівності

$$arg\psi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty}[\arg(z-a_k) - \arg\,(z-b_k)]$$

випливає, що

$$0 < \arg\psi(z) < \pi.$$

Доведемо необхідність. Нехай функція $\psi(z)$ відображає верхню півплощину на верхню, тобто при $Im\,z > 0$

$$0 \leq arg\,\psi(z) \leq \pi.$$

Тоді функція $\psi(z)$ не має в відкритій верхній півплощині ні коренів, ні полюсів.

Справді, в іншому випадку при обході деякого контуру, що належить верхній півплощині і містить полюс або корінь функції $\psi(z)$ збільшення функції $arg\,\psi(z)$ було б більше або дорівнювало $2\,\pi$, що неможливо. В силу принципу симетрії функція $\psi(z)$ не має також ні коренів, ні полюсів у нижній півплощині.

Таким чином, всі корені та полюси функції $\psi(z)$ лежать на дійсній осі.

При $Im\, z < 0$ маємо:

$$-\pi < arg\,\psi(z) < 0,$$

і коли точка обходить один раз довільне коло збільшення функції $arg\,\psi(z)$ не перевищує по абсолютній величині числа $2\,\pi$.

Звідси випливає, що всі корені та полюси функції $\psi(z)$ прості і що на будь-якому інтервалі дійсної осі число коренів функції $\psi(z)$ відрізняється від числа її полюсів не більше ніж на одиницю, тобто що корені та полюси функції чергуються.

Нескінченний добуток

$$\Phi\,(z) = \frac{z - a_0}{z - b_0} \prod{}' \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)\left(1 - \frac{z}{b_k}\right)^{-1} \qquad (4.04')$$

складений за коренями $\{a_k\}$ та полюсами $\{b_k\}$ функції $\psi(z)$, рівномірно збігається на будь-якій обмеженій замкнутій множині, що не містить точок $\{b_k\}$. Функція $\Phi = \Phi\,(z)$ відображає верхню півплощину площини z на верхню півплощину площини Φ.

Функція

$$\chi(z) = \frac{\psi(z)}{\Phi(z)}$$

ціла, не має коренів у всій площині та $|\arg \chi(z)| \le 2\pi$ при всіх значеннях змінної z.

Таким чином, ціла функція $u = \ln \chi(z)$ відображає усю площину z на смугу $|\,\mathrm{Im}\, u| \le 2\pi$ і відповідно, $u = const$.

З цієї теореми беспосередньо випливає зауваження.

Зауваження. Для того, щоб дійсну мероморфну функцію $w = \psi(z)$ можна було рівномірно наблизити в будь-якій обмеженій області дійсними раціональними функціями з дійсними і чергующимися кореннями і полюсами, необхідно і достатньо, щоб вона відображала верхню напівплощину площини z на верхню напівплощину площини ω.

Інше уявлення дійсної мероморфної функції, що відображає верхню напівплощину на верхню, було значно раніше дано М. Г. Чеботарьовим.

Теорема 4.2. (М. Г. Чеботарьов). Якщо дійсна мероморфна функція $\psi(z)$ відображає верхню напівплощину на верхню, то її полюси $a_k(\pm k = 0, 1, 2 \dots)$ дійсні і прості, та вона представляється у формі

$$\psi(z) = az + b + \sum_{k=\alpha}^{\omega} A_k \left(\frac{1}{a_k - z}\right) - \left(\frac{1}{a_k}\right) \tag{4.05}$$

$$(-\infty \leq \alpha < \omega \leq \infty),$$

Де $a \geq 0$, b – дійсне, $A_k \geq 0$ ($\pm k = 0, 1, 2 \dots$) і ряд

$$\sum_{k=a}^{\infty} \frac{A_k}{a_k^2}$$

збігається.

Доведення. Згідно з теоремою 4.1 функція $\psi(z)$ представляється з точністю до сталого множника у формі (4.04), і, отже, є рівномірною границією послідовності

$$\psi(z) = \frac{z - a_0}{z - b_0} \prod_{-n}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \left(1 - \frac{z}{b_k}\right)^{-1},$$

яку можна представити у формі

$$\psi_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{A_{k,n}}{a_k - z} + c_n$$

(при $k < a$ або $k > w$ приймається $a_k = \infty$), причому $A_{k,n} > 0$ та c_n- дійсна стала. Взявши похідну в точці нуль, ми отримаємо, що послідовність сум

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{A_{k,n}}{a_k^2}$$

прямує до $\psi'(0)$. З другого боку, вочевідь, що $A_{k,n}$ прямує до лишку A_k функції $\psi(z)$ у точці a_k. Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримаємо з нерівності

$$\sum_{k=-N}^{N} \frac{A_{k,n}}{a_k^2} \psi_n'(0) \qquad n \geq N,$$

що

$$\sum_{k=-N}^{N} \frac{A_k}{a_k^2} \leq \psi_n'(0),$$

і відповідно, ряд

$$\sum_{k=\alpha}^{\omega} \frac{A_k}{a_k^2}$$

збігається. Звідси виходить збіжність ряду в правой частині формули (4.05).

Покажемо тепер, що різниця між $\psi(z)$ і сумою цього ряду є лінійна функція. Для цього зафіксуємо число N і розглянемо при $n > N$ різницю

$$\psi_n(z) - \sum_{k=-N}^{N} A_{k,n} \frac{1}{a_k - z} - \frac{1}{a_k} = \sum_{N<|k|\leq n} \frac{A_{k,n}}{a_k - z} + c_n^{'}.$$

Вочевидь, уявна частина цієї функції невід'ємна при $Im\ z > 0$. Переходячи до границі, будемо мати:

$$Im\left[\psi(z) - \sum_{k=-N}^{N} A_{k,n} \frac{1}{a_k - z} - \frac{1}{a_k}\right] \geq 0 \ (Im\ z \ \geq 0).$$

Таким чином, ціла дійсна функція

$$\psi(z) - \sum_{k=\phi}^{\omega} A_k \frac{1}{a_k - z} - \frac{1}{a_k}$$

відображає верхню півплощину на верхню і, отже, по лемі Н. Г. Чеботарьова (див.[2]) вона дорівнює $az + b$ $(a \geq 0,\ Im\ b = 0)$. Теорема доведена.

Узагальнення теореми Ерміта-Білера на довільні цілі функції.

З теореми 4.1 досить легко можна отримати критерій належності цілої функції класу *HB*, який аналогічний критерію Ерміта-Білера. Цей критерій, що належить М. М. Мейману, дається наступною теоремою.

Теорема 4.3. Нехай

$$\omega(z) = P\ (z) + i\ Q(z),$$

де $P\ (z)$ і $Q(z)$,цілі дійсні функції, та нехай

$$P\ (z) = Ae^{u(z)}(z - a_0) \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{P_k\left(\frac{z}{a_k}\right)}\ (u(0) = 0)$$

і (4.06)

$$Q(z) = Be^{v(z)}(z - b_0)) \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{b_k}\right) e^{P_k\left(\frac{z}{b_k}\right)}\ (v(0) = 0)$$

- їх розвинення в нескінченні добутки.

Для того, щоб функція *ω(z)* належала до класу *HB* необхідно і достатньо виконання наступних умов:

а) корені a_k і b_k функцій $P\ (z)$ і $Q(z)$ чергуются;

β) цілі дійсні функції *u (z)* і *v (z)* та показники $P_k\left(\frac{z}{a_k}\right)$ і $P_k\left(\frac{z}{b_k}\right)$ задовольняють умові

$$u(z) - v(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[P_k\left(\frac{z}{a_k}\right) - P_k\left(\frac{z}{b_k}\right)\right] = 0; \qquad (4.07)$$

γ) сталі *A* і *B* одного знака.

5. Завдання для самоконтролю.

1. Нехай ціла функція *f* має порядок $\rho = \rho_f$. Знайдіть порядок цілої функції *F*, яка задана формулою $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^{\rho} z^n$, де f_n коефіцієнти Тейлора функції *F.*
2. Нехай ціла функція *f* має порядок $\rho = \rho_f$ і тип σ_f, де n натуральне число. Що можна сказати про характеристики зростання цілої функції $f^{(n)}$?
3. Знайти рахуючу функцію $n_f(r)$ і верхню щільність Δ послідовності нулів цілої функції $f(z) = \cos z$.
4. Представити у вигляді нескінченого добутку функцію $chz - \cos z$.
5. Знайти порядок і тип цілої функції заданої рядом Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} z^n$.
6. Представити у вигляді нескінченого добутку функцію $\sin z^2$.
7. За допомогою формули Стірлінга показати що функція $\frac{1}{\Gamma(z)}$ має максимальний тип і порядок 1.
8. Нехай *F(z)* ціла функція експоненціального типу. Довести що якщо $|F(x)| = O\left(e^{-|x|}\right), x \to \mp\infty$, то *F(z) ≡ 0.*
9. За допомогою степеневого ряду побудувати цілу функцію порядку ρ і типу σ ($0 < \rho < \infty, 0 < \sigma < \infty$).
10. Знайти порядок і тип цілої функції, яка задана рядом Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} z^n$.
11. Представити у вигляді нескінченого добутку функцію $\frac{sin^2\sqrt{z}}{z}$.

Література.

1. B.Ya. Levin. Lectures on entire functions. English revised edition. Amer. Math. Soc, Providence, RI, 1996.
2. B.Ya. Levin Distribution of zeros of entire functions, Amer. Math. Soc , Providence , R.I., 1980, 523 pp.
3. Möller, Manfred; Pivovarchik, Vyacheslav. Spectral theory of operator pencils, Hermite-Biehler functions, and their applications. Operator Theory: Advances and Applications, 246. Birkhäuser/Springer, Cham, 2015. xvii+412 pp.
4. L. S. Maergoiz. Asymptotic Characteristics of Entire Functions and Their Applications in Mathematics and Biophysics. Springer. 2003.
5. V. Pivovarchik H.Woracek, Shifted Hermite-Biehler functions and their applications. Integral Equations and Operator Theory. 57 (2007) 101-126.
6. V. Pivovarchik. Symmetric Hermite-Biehler polynomials with defect. Oper. Theory: Adv. Appl. Vol.175 (2007), 211-224.
7. V. Pivovarchik, H. Woracek. The square transform of Hermite-Biehler functions. Geometric approach. Methods Funct. Anal. Topology, Vol. 13 (2007), no.2, 187-200.