

**Олена СИНЮКОВА, Сергій ДРАГАНЮК,
Ольга ЧЕПОК**

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ ТА ПРАКТИКИ ПОБУДОВ ЗА ДОПОМОГОЮ
ЦИРКУЛЯ І ЛІНІЙКИ У ЕВКЛІДОВІЙ ПЛАНІМЕТРІЇ
Навчальний посібник**

Одеса – 2025

*Рекомендовано до друку Вченою радою Державного закладу
«Південноукраїнський національний педагогічний університет імені
К. Д. Ушинського» (протокол № 14 від 24 квітня 2025 року).*

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Варбанець П. Д. – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

Страхов Є. М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри оптимального керування та економічної кібернетики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Синюкова О. М., Драганюк С. В., Чепок О. О.

Основи теорії та практики побудов за допомогою циркуля і лінійки у евклідовій планіметрії: навчальний посібник. Одеса: Університет Ушинського, 2025 р. 236 с.

У навчальному посібнику розглянуто історичні й практичні витоки, математичну сутність, роль і місце теорії геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки у евклідовій геометрії, сутність практичного контенту цієї теорії як у евклідовій геометрії, представлений у вигляді аксіоматичної теорії, так і у сучасних навчальних курсах евклідової планіметрії закладів загальної середньої освіти. Його створено у відповідності до програми вибіркової навчальної дисципліни «Теорія і практика геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки», яка пропонується кафедрою вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем за спеціальністю Середня освіта (Математика).

Посібник, також може бути використаним як допоміжне інформаційне джерело при опануванні обов'язкових навчальних дисциплін «Вступ до спеціальності», «Аналітична геометрія», «Історія математики і основи математики», «Теорія зображень фігур у евклідовій геометрії», «Методика навчання математики в закладах загальної середньої освіти», передбачених освітньо-професійними програмами Університету Ушинського для спеціальності Середня освіта (Математика), при написанні відповідних курсових робіт. Одночасно, він може бути корисним як для вчителів-практиків з математики, так і для учнів восьмих і старших класів закладів загальної середньої освіти, які цікавляться математикою і виявили бажання опановувати її на поглибленому рівні.

ЗМІСТ

Передмова.....	5
§1. Основні теоретичні відомості.....	8
Питання і завдання для самоконтролю до §1	17
§2. Задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки першого рівня складності.....	19
Питання і завдання для самоконтролю до §2.....	34
Задачі для самостійного розв'язання до §2.....	35
§3. Метод допоміжного трикутника розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.....	37
Питання і завдання для самоконтролю до §3.....	54
Задачі для самостійного розв'язання до §3.....	54
§4. Задачі на побудову дотичної до кола, спільних дотичних до двох кіл за допомогою циркуля і лінійки.....	57
Питання і завдання для самоконтролю до §4.....	75
Задачі до самостійного розв'язання до §4.....	76
§5. Метод геометричних місць точок розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.....	78
Питання і завдання для самоконтролю до §5.....	117
Задачі для самостійного розв'язання до §5.....	118
§6. Застосування теорії рухів евклідової площини до розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.....	121
Питання і завдання для самоконтролю до §6.....	149
Задачі для самостійного розв'язання до §6.....	151
§7. Застосування теорії перетворень подібності евклідової площини до розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.....	154
Питання і завдання для самоконтролю до §7.....	172
Задачі для самостійного розв'язання до §7.....	173
§8. Алгебраїчний метод розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки. Критерій розв'язності задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.....	177

Питання і завдання для самоконтролю до §8.....	208
Задачі для самостійного розв’язання до §8.....	210
Тестові завдання для самоконтролю за теоретичним змістом курсу.....	216
Відповіді до тестових завдань для самоконтролю за теоретичним змістом курсу.....	227
Предметний покажчик.....	228
Інформаційні джерела.....	233

ПЕРЕДМОВА

Геометричні побудови на площині за допомогою циркуля і лінійки, традиційно, є невід'ємною складовою систематичних курсів евклідової геометрії закладів загальної середньої освіти. Зрозуміло, що учитель математики, майбутній учитель математики закладів загальної середньої освіти, повинен усвідомлювати історичні й практичні витoki, математичну сутність, роль і місце теорії геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки, практичного контенту цієї теорії, як у евклідовій геометрії, представлений у вигляді аксіоматичної теорії, так і у сучасних навчальних курсах евклідової планіметрії закладів загальної середньої освіти, повинен мати чітке уявлення про теоретичні вимоги до розв'язання відповідних задач на різних рівнях освіти, вміти розв'язувати відповідні задачі як стандартного, так і підвищеного рівнів складності, вільно володіти тими методами розв'язування цих задач, які передбачені навчальними програмами стандартних курсів планіметрії закладів загальної середньої освіти, бути спроможним обрати доцільний метод для розв'язання кожної окремої задачі.

Відповідна теоретична й практична підготовка майбутнього учителя математики повинна бути спрямованою на формування його спроможності та готовності до з'ясування за контентом кожного конкретного підручника з планіметрії для закладів загальної середньої освіти сутності аксіоматики циркуля і лінійки, неявним чином покладеної у основу розв'язування задач на відповідні побудови, до розв'язання запропонованих авторами підручників задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки різних рівнів складності, різними методами, за повною схемою, до ілюстрування визначеного розв'язання на дошці та на папері за допомогою відповідних реальних креслярських інструментів, на екрані монітора за допомогою відповідних комп'ютерних засобів.

Саме на досягнення подібної мети навчання орієнтовано даний навчальний посібник. Його створено у відповідності до програми вибіркової навчальної дисципліни «Теорія і практика геометричних побудов за

допомогою циркуля і лінійки», розрахованої на 4 кредити ЄКТС, яка пропонується кафедрою вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем за спеціальністю Середня освіта (Математика).

Посібник складається зі вступу, восьми параграфів, тестових завдань для самоконтролю за теоретичним змістом курсу та відповідей до них, предметного покажчика, списку рекомендованих інформаційних джерел.

Перший параграф носить загальнотеоретичний характер. До нього запропоновані питання та завдання для самоконтролю.

Наступні сім параграфів присвячено теорії та практиці розв'язання за допомогою циркуля і лінійки конкретних видів задач. Так, у другому параграфі розглянуто задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки першого рівня складності, третій параграф присвячено розв'язанню відповідних задач за методом допоміжного трикутника, у четвертому параграфі окремо розглянуто задачі побудови дотичної до кола, спільних дотичних до двох кіл, п'ятий параграф присвячено методу геометричних місць точок. У шостому і сьомому параграфах, відповідно, розглянуті питання застосування до розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки теорії рухів та теорії перетворень подібності евклідової площини. У останньому, восьмому, параграфі мова йде про алгебраїчний метод розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки та про відповідний критерій розв'язності. Питання про застосування методу інверсії до розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки, про побудову за допомогою одного циркуля (зокрема, теореми Мора-Маскероні), про побудову на евклідовій площині за допомогою інших інструментів залишені поза увагою навмисно. Передбачається, що цим питанням у подальшому буде присвячено інший навчальний посібник.

У кожному з вищевказаних семи параграфів з'ясовано відповідні теоретичні передумови застосування того чи іншого методу, розкрито

безпосередню сутність процесу його застосування, наведено відповідні приклади розв'язання задач за повною схемою, висвітлено характер відображення та вимоги до розв'язання відповідних задач у сучасних стандартних курсах планіметрії закладів загальної середньої освіти.

До кожного з вищевказаних семи параграфів запропоновано теоретичного характеру питання і завдання для самоконтролю за його змістом, умови задач для самостійного розв'язання. Наведені умови задач, фактично, охоплюють увесь відповідний практичний матеріал курсів математики закладів загальної середньої освіти. На думку авторів, наведених умов задач достатньо для проведення практичних занять, організації самостійної та індивідуальної роботи студентів, поточного та підсумкового контролю знань за практичною складовою курсу.

Навчальний посібник, безумовно, може бути корисним не лише для опанування вищевказаної вибіркової навчальної дисципліни. У якості допоміжного джерела інформації він може бути використаним при опануванні таких обов'язкових навчальних дисциплін як «Вступ до спеціальності», «Аналітична геометрія», «Історія математики і основи математики», «Теорія зображень фігур у евклідовій геометрії», «Методика навчання математики в закладах загальної середньої освіти», передбачених освітньо-професійними програмами Університету Ушинського для спеціальності Середня освіта (Математика), при написанні відповідних курсових робіт.

Одночасно, він може бути корисним й для учителів-практиків з математики та для учнів восьмого і старших класів закладів загальної середньої освіти, які цікавляться математикою і виявили бажання опановувати її на поглибленому рівні. Змістове наповнення посібника може скласти основу відповідних факультативних курсів для учнів.

Автори.

§1. Основні теоретичні відомості

Загальновідомо, що історично, на перших етапах формування евклідової геометрії як науки, тоді, коли вона виступала виключно як «фізична» геометрія, вчення про властивості просторових форм докільля, усі реальні інструменти, що використовувалися для відтворення відповідних просторових форм, вважалися внутрішніми інструментами безпосередньо самої геометрії, факт існування у геометрії відповідної геометричної фігури ототожнювався з існуванням у докільлі або можливістю побудови у докільлі фізичного аналогу такої фігури за допомогою реальних технічних приладів. При цьому, по відношенню до планіметричних фігур, тобто, фігур евклідової площини, у якості перших, найпростіших, інструментів подібних побудов виступали ті, аналоги яких ми сьогодні називаємо лінійкою без поділок та циркулем [2; 30; 32; 38].

У подальшому, в процесі формування евклідової геометрії як дедуктивної теорії, в процесі її організації у вигляді аксіоматичної теорії, природною стала необхідність чіткого визначення поняття про те, що треба мати на увазі під «побудовами за допомогою циркуля і лінійки» на підставі саме аксіоматичної теорії евклідової планіметрії, необхідність чіткого розмежування змісту поняття про можливість «побудови» геометричної фігури з поняттям про її існування у межах відповідної аксіоматичної теорії [21; 24; 37]. (Перші питання такого типу виникли у зв'язку з відомими задачами про трисекцію кута і про подвоєння кубу [30; 42]).

Циркуль і лінійка, традиційно, є основними (але не єдиними) інструментами такої давньої професійної діяльності людей, як креслення. Отже, одночасно, постало питання й про визначення доцільних форм математичного моделювання процесу креслення за допомогою циркуля і лінійки у межах окремої аксіоматичної теорії, розробленої на підставі певної аксіоматичної теорії евклідової геометрії [21; 24].

Сучасні дослідження з основ геометрії переконливо свідчать про те, що, як аксіоматична теорія усієї евклідової геометрії, так і аксіоматична теорія її

складової – евклідової планіметрії, – є повними. Цей факт не залежить від покладених у основу цих теорій аксіоматик, бо усі аксіоматики як евклідової геометрії у цілому, так і евклідової планіметрії, є еквівалентними між собою. (Інакше, вони, просто не були би аксіоматиками саме евклідової геометрії (евклідової планіметрії)). Повнота несуперечливої аксіоматичної теорії означає, що до цієї теорії не можна додати незалежне від аксіом її аксіоматики твердження про поняття цієї теорії так, щоб у результаті не отримати суперечність. З іншого боку, на відміну від креслення, формування геометричної теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки», явно вимагає математичної формалізації характеристичних рис таких побудов у вигляді відповідних аксіом. В силу повноти, незалежно від обраної аксіоматики евклідової планіметрії, для цього недостатньо просто доповнити дану аксіоматику новими аксіомами. Треба будувати її продовження, принаймні канонічне. Одночасно, очевидно, можна вести мову й про канонічне продовження відповідної аксіоматики усієї евклідової геометрії. Як результат, утвориться нова аксіоматика, для якої дана аксіоматика евклідової геометрії буде власною складовою ([24; 37]).

Існують різні, еквівалентні між собою, варіанти аксіоматик теорії «побудов на евклідовій площині за допомогою циркуля і лінійки» як канонічного продовження аксіоматики евклідової планіметрії. Розглянемо один з них [24].

Будемо вважати, що у якості «базової» аксіоматики евклідової планіметрії обрано ту її аксіоматику, з якою кожний студент знайомився в курсі планіметрії під час здобуття середньої освіти.

Для створення аксіоматики теорії «побудов» на евклідовій площині «за допомогою циркуля і лінійки» до даної аксіоматики доєднаємо назви двох неозначуваних понять: неозначуваної множини H – сукупності побудованих геометричних фігур, і неозначуваного відношення q – операції побудови геометричної фігури, переведення цієї фігури із категорії не побудованих – у

категорію побудованих, $q \subset F \times H$, де F – множина усіх фігур визначеної аксіоматики евклідової планіметрії.

До переліку аксіом даної аксіоматики додамо наступні твердження.

β_1 . На евклідовій площині існують принаймні дві різні побудовані точки.

β_2 . Кожна фігура евклідової площини, задана умовою задачі на побудову, є побудованою.

β_3 . Якщо на евклідовій площині побудовано фігури F_1 і F_2 , то побудовано і фігуру $F_1 \cup F_2$.

β_4 . Якщо фігури F_1 і F_2 евклідової площини є побудованими, то можна визначити, чи є їх перетин $F_1 \cap F_2$ порожньою множиною, чи ні. Якщо $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, то фігура $F_1 \cap F_2$ є побудованою.

β_5 . Якщо фігури F_1 і F_2 евклідової площини є побудованими, фігура F_1 є підмножиною фігури F_2 ($F_1 \subset F_2$) і при цьому фігура F_1 не співпадає з фігурою F_2 , то фігура $F_2 \setminus F_1$ є побудованою.

β_6 . Кожна побудована фігура евклідової площини містить принаймні одну побудовану точку.

β_7 . Для кожної побудованої фігури, відмінної від усієї евклідової площини, на евклідовій площині існує принаймні одна побудована точка, яка цій фігурі не належить.

β_8 . Якщо побудовано точки A і B ($A \neq B$), то можна побудувати (можна вважати побудованим) промінь $[AB)$.

β_9 . Якщо побудовано точку O і відрізок $[AB]$, то можна побудувати (можна вважати побудованим) коло Q з центром у точці O радіусу $[AB]$ (коло $Q(O, AB)$).

Аксіоми $\beta_1 - \beta_7$ називають загальними аксіомами теорії «побудов» на евклідовій площині. Аксіому β_l називають аксіомою лінійки, а аксіому β_c – аксіомою циркуля. Аксіоми β_l і β_c , очевидно, представляють собою математичні абстракції тих конкретних дій, які можна виконувати під час креслення за допомогою таких реальних інструментів креслення як лінійка без поділок та циркуль.

Загальновідомо, що, виходячи з природних міркувань методичного характеру, стандартний курс геометрії закладів загальної середньої освіти за своїм змістовим наповненням не може не носити двоїстого характеру, поєднуючи у собі уявлення про евклідову геометрію як аксіоматичну теорію і «фізичну» евклідову геометрію як науку про властивості просторових форм безпосередньо оточуючого людину середовища. При цьому найважливішою та найскладнішою задачею методики побудови подібного курсу залишається задача забезпечення органічного характеру такого поєднання. У русі подібних міркувань, на відміну від загального поняття про аксіоматичну теорію евклідової геометрії, стандартний курс планіметрії закладів загальної середньої освіти, як правило, не містить жодної тези щодо аксіоматики теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки». У той же час, на початку введення поняття про «побудови» за допомогою циркуля і лінійки, у кожному відповідному підручнику вміщено твердження типу «Давайте домовимося, що за допомогою лінійки ми можемо..., за допомогою циркуля ми можемо...Жодних інших дій за допомогою цих інструментів ми виконувати не можемо...». По суті, це – аналоги аксіом β_l і β_c . Отже, поняття про аксіоматику «циркуля і лінійки» у курсах геометрії закладів загальної середньої освіти присутнє, хоча і у неявному вигляді (див., наприклад, [7; 9; 18; 22; 24; 33; 36]).

Одночасно, у курсах планіметрії закладів загальної середньої освіти, знову-таки, виходячи з міркувань методичного характеру, термінологічно, «побудови» за допомогою «циркуля і лінійки» у межах відповідної

аксіоматичної теорії і реальні «фізичні» побудови за допомогою реальних циркуля і лінійки як інструментів креслення, не розрізняють. Враховуючи цей факт, у подальшому, дозволимо й собі подібну традиційну термінологічну «вільність». Хоча, зрозуміло, кожного разу будемо чітко усвідомлювати, які саме побудови маються на увазі.

Традиційно [24; 27], у теорії аксіоматики циркуля і лінійки під загальною задачею на побудову геометричної фігури евклідової площини за допомогою цих інструментів розуміють задачу наступного виду.

1. На евклідовій площині задано скінченну кількість геометричних фігур $F_1, F_2, \dots, F_k$, $k \in \mathbb{N}$, або не задано жодної геометричної фігури. Згідно твердження аксіоми β_2 , задані фігури вважаються побудованими.
2. Вказано властивості певної непобудованої геометричної фігури F , побудову якої визначено як мету розв'язання даної задачі.
3. Застосовуючи аксіоми $\beta_i, i = \overline{1, 7}; \beta_\lambda, \beta_\mu$ у будь-якій послідовності, у необхідній кількості, але лише скінченну кількість разів, треба перетворити непобудовану геометричну фігуру F у побудовану.

Найважливішим і, мабуть, першим, твердженням теорії аксіоматики геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки є твердження про те, що кожна фігура, побудована на евклідовій площині у розумінні цієї теорії, існує на евклідовій площині з точки зору теорії «базової» аксіоматики евклідової планіметрії (при цьому зрозуміло, що, з точки зору відповідної теорії аксіоматики геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки також).

Дійсно, згідно твердження аксіоми β_2 , геометричні фігури, які задано умовою задачі на побудову, вже є фігурами евклідової площини, тобто, існують у аксіоматичній теорії «базової» аксіоматики евклідової планіметрії. У цій теорії існують і геометричні фігури, утворені з існуючих геометричних фігур за допомогою таких теоретико-множинних операцій над множинами як обрання підмножини, визначення об'єднання, перетину множин,

знаходження різниці множин. Кожна точка евклідової площини і кожна точка довільної непорожньої підмножини евклідової площини, існують, як точки у обох аксіоматичних теоріях, для будь-яких різних точок A і B існує промінь $[AB)$, для кожної точки O і кожного відрізка $[AB]$ існує коло з центром у точці O радіусу $[AB]$. Отже, в силу вищевказаного характеру створення аксіоматики геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки як канонічного продовження «базової» аксіоматики евклідової планіметрії, побудови геометричних фігур у межах теорії створеної аксіоматики, одночасно, є конструктивного характеру обґрунтуваннями фактів існування цих фігур у теорії «базової» аксіоматики.

У той же час, обернене твердження не є правильним. Як вже було вказано, ще з давньогрецьких часів відомими є задачі на побудову, які не можна розв'язати за допомогою циркуля і лінійки. Тобто, у аксіоматичній теорії евклідової геометрії існування деяких геометричних фігур не підставі певних вихідних даних можна довести, і, одночасно, можна довести, що у визначеній теорії геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки на підставі тих же самих вихідних даних побудова цих фігур не є можливою. Натепер, у аксіоматичній теорії геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки розроблено критерії можливості реалізації тих чи інших побудов [15; 28].

У теорії геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки сформовано **загальне поняття про розв'язок задачі на побудову**, яке, фактично, перетворює кожен задачу такого типу на **геометричну задачу з геометричними параметрами**. У якості геометричних параметрів при цьому виступають задані умовою задачі фігури $F_1, F_2, \dots, F_k$.

Визначеною і визнаною є загальна схема знаходження такого розв'язку. Вона передбачає послідовну реалізацію **чотирьох етапів** розв'язання, які мають такі назви: **аналіз, побудова, доведення і дослідження**.

Етап аналізу спрямовано на пошук і знаходження шляхів розв'язання поставленої задачі. Його метою є усвідомлення тих зв'язків, що існують між заданими умовою задачі геометричними фігурами і тією фігурою, яку треба побудувати, зв'язків, відтворення яких є можливим як результат скінченної кількості разів послідовного використання аксіом $\beta_i, i = \overline{1,7}; \beta_\lambda, \beta_\mu$ теорії побудов, підсумком відтворення яких повинно стати перетворення відповідної непобудованої геометричної фігури у побудовану.

Для проведення аналізу, як правило, припускають, що шукану фігуру вже побудовано. З технічної точки зору, при проведенні аналізу, зазвичай, використовують схематичні зображення і заданих планіметричних фігур, і шуканої.

При розв'язуванні задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» реалізація етапу аналізу не є обов'язковою. У ній немає жодного сенсу, якщо доцільна послідовність необхідних для розв'язування кроків-побудов є цілком зрозумілою безпосередньо з умови поставленої задачі. Але так трапляється далеко не завжди.

Етап побудови передбачає знаходження доцільної скінченної послідовності застосувань аксіом $\beta_i, i = \overline{1,7}; \beta_\lambda, \beta_\mu$, так званих кроків побудов, з метою перетворення визначеної умовою задачі непобудованої геометричної фігури F у побудовану, на підставі заданих умовою задачі геометричних фігур $F_1, F_2, \dots, F_k$. Оскільки аксіоми циркуля і лінійки є математичними абстракціями тих основних дій, які за допомогою реальних фізичних інструментів – саме циркуля і лінійки – у реальному фізичному просторі можна реалізувати на папері, на дошці або на екрані монітора, при викладанні евклідової геометрії у закладах загальної середньої освіти за необхідне вважають й реальне графічне виконання відповідних побудов. Проблеми при цьому можуть виникнути лише по відношенню до заданих фігур $F_1, F_2, \dots, F_k$. Згідно твердження аксіоми β_2 , ці геометричні фігури, за умови сформульованої задачі вважаються побудованими. Але це зовсім не

означає, що вони, як фігури евклідової геометрії, у аксіоматичній теорії побудов за допомогою циркуля і лінійки можуть бути побудовані виходячи з порожньої множини вихідних даних, серед фігур $F_i, i = \overline{1, k}$, можуть опинитися, наприклад, еліпс чи парабола... З цього приводу варто зауважити, що, по-перше, наявність подібних фігур серед фігур $F_i, i = \overline{1, k}$, аж ніяк не заважає реалізації етапу побудови у теоретичному плані, по-друге, у стандартних курсах геометрії закладів загальної середньої освіти умови задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки подібних фігур, як правило, не містять, по-третє, будь-який процес моделювання теоретичних «побудов» за допомогою реальних фізичних дій є процесом неточним, наближеним, отже, сутність процесу ілюстрування розв'язання задачі на побудову не зміниться, якщо у ньому замість моделі еліпса використати модель овалу, безпосередньо, овал обрати у якості моделі еліпса і тому подібне. (Тобто, якщо при виконанні «фізичних» побудов замінити «незручну» задану геометричну фігуру фігурою, яка у певному сенсі є її наближенням, але вже допускає побудову за допомогою циркуля і лінійки).

Етап доведення передбачає обґрунтування того факту, що, унаслідок реалізації перелічених на етапі побудови кроків побудов, побудовано фігуру, яка задовольняє усі умови розглянутої задачі.

Реалізація етапу дослідження передбачає

- 1) визначення, у відповідності до умов сформульованої задачі, скінченної кількості можливих варіантів щодо відмін у характеристиках вихідних даних;
- 2) для кожного з визначених варіантів - знаходження обґрунтованих відповідей на питання чи існують у даному випадку розв'язки задачі, чи ні; якщо розв'язки існують, то яка їх кількість, якими саме вони є.

Постановка останнього питання вимагає певних уточнень. Справа в тому, що умови деяких задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки містять вимоги певних спеціальних варіантів розташувань побудованої

геометричної фігури відносно вихідних даних. За домовленістю, якщо умови задачі на побудову подібних вимог не містять, то усі рівні (конгруентні) між собою побудовані фігури вважають за один розв'язок. Якщо ж, навпаки, умови задачі на побудову містять спеціальні вимоги щодо розташування побудованої фігури відносно вихідних даних, то, рівні (конгруентні) між собою побудовані геометричні фігури приймають за різні розв'язки, якщо ці фігури по-різному розташовані відносно вихідних даних.

Пошуки відповідей на питання дослідження, як правило, починаються з аналізу процесу побудови з точки зору усвідомлення того, чи при будь-якому варіанті обрання вихідних даних задачу можна розв'язати тим способом, який було безпосередньо використано у процесі побудови. При варіанті «так», подальші дослідження зводяться до з'ясування питання про кількість розв'язків. При варіанті «ні», треба визначити, при якому варіанті задання вихідних даних задачу не можна розв'язати обраним способом, продовжити дослідження з приводу того, чи не існує у подібному випадку інших підходів до її розв'язання.

(Варто зауважити, що серед задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки курсів геометрії закладів загальної середньої освіти, час від часу зустрічаються задачі, які при різних варіантах задання вихідних даних вимагають різних підходів до свого розв'язування).

Як найважливіший факт теорії аксіоматики побудов на евклідовій площині за допомогою циркуля і лінійки було обґрунтовано твердження про те, що кожна фігура, у визначеному розумінні побудована на евклідовій площині у межах цієї теорії, існує на евклідовій площині з точки зору теорії «базової» аксіоматики евклідової планіметрії. Звідси випливає, що, якщо, з точки зору аксіоматики евклідової планіметрії, певної фігури на евклідовій площині не існує, то побудова цієї фігури за допомогою циркуля і лінійки у відповідній теорії аксіоматики таких побудов не є можливою. Для переважної більшості задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки курсів геометрії закладів загальної середньої освіти саме на підставі

подібного міркування зручно обґрунтовувати відсутність розв'язків у певних задачах за певного варіанту обрання вихідних даних.

Питання та завдання для самоконтролю до §1

1. Як можна пояснити ті обставини, що на перших етапах формування евклідової геометрії як науки факт існування у евклідовій геометрії конкретної геометричної фігури ототожнювався з можливістю побудови у довкіллі її фізичної моделі?
2. Поясніть, що, на тепер, з наукової точки зору розуміють під «побудовами за допомогою циркуля і лінійки» на підставі евклідової геометрії як аксіоматичної теорії.
3. Вкажіть, за яких характеристик аксіоматику і відповідну аксіоматичну теорію називають повними.
4. Наведіть означення продовження аксіоматики.
5. Наведіть означення канонічного продовження аксіоматики.
6. Поясніть, у чому полягає відміна між циркулем і лінійкою як інструментами креслення і «циркулем і лінійкою» як інструментами «побудов» на підставі евклідової геометрії як аксіоматичної теорії.
7. Наведіть зразок аксіоматики теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки» на підставі аксіоматичної теорії евклідової планіметрії.
8. Вкажіть, які аксіоми наведеного зразка аксіоматики теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки» на підставі аксіоматичної теорії евклідової планіметрії вважають загальними.
9. Сформулюйте аксіоми циркуля і лінійки наведеної аксіоматики теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки» на підставі аксіоматичної теорії евклідової планіметрії.
10. Поясніть, у якому розумінні курси геометрії закладів загальної середньої освіти носять двоїстий характер.

11. Поясніть, на підставі чого можна стверджувати, що поняття про аксіоматику «циркуля і лінійки» присутнє у стандартних курсах планіметрії закладів загальної середньої освіти.
12. Вкажіть, як у аксіоматичній теорії «циркуля і лінійки» формулюється загальна задача на «побудову».
13. Вкажіть, яке твердження вважають найважливішим твердженням теорії аксіоматики «геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки» на підставі аксіоматичної теорії евклідової планіметрії.
14. Обґрунтуйте факт існування у евклідовій планіметрії геометричних фігур, які можна «побудувати» у відповідній аксіоматичній теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки».
15. Вкажіть, з реалізації яких етапів, традиційно, складається розв'язок задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки.
16. Поясніть, у чому полягає мета реалізації етапу аналізу розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки. Чи є цей етап обов'язковим? За якою схемою, зазвичай, проводиться реалізація цього етапу?
17. Поясніть, у чому полягає сутність реалізації етапу побудови розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки.
18. Поясніть, у чому полягає сутність реалізації етапу доведення розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки.
19. Поясніть, у чому полягає сутність реалізації етапу дослідження розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки, геометричну задачу якого типу представляють собою завдання цього етапу.
20. Вкажіть, за якою схемою, традиційно, відбувається реалізація етапу дослідження розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки.

§2. Задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки першого рівня складності

Задачами на побудову за допомогою циркуля і лінійки першого рівня складності вважають певні задачі, метою розв'язання яких є побудова таких базових фігур евклідової планіметрії, як точки, прямі, відрізки, кути, трикутники та кола. Визначено доцільний традиційний перелік подібних задач.

З точки зору методики навчання геометрії у закладах загальної середньої освіти, розв'язування перших задач з цього переліку, які серед усіх задач першого рівня складності вважаються найпростішими (насамперед, за своєю умовою, а не за способом розв'язання), фактично, носить інтуїтивний характер, не обґрунтовується. Оскільки аксіоми теорії побудов за допомогою циркуля і лінійки у шкільних підручниках представлено у неявному вигляді, то, фактично, можна вважати, що розв'язки таких задач у неявному вигляді включено до складу самих аксіом.

Одночасно, для тих курсів математики закладів вищої освіти, у яких склад аксіом аксіоматики теорії побудов за допомогою циркуля і лінійки наведено у явному вигляді, перелік подібних задач суттєвим чином залежить саме від характеру тверджень, визначених у якості аксіом даної теорії побудов.

Так, у аксіоматичній теорії наведеної аксіоматики «найпростішими» вважають задачі, умови яких формулюють наступним чином:

1. Задано точки A і B ($A \neq B$). Побудувати пряму AB .
2. На евклідовій площині побудувати яку-небудь пряму.
3. Задано точки A і B ($A \neq B$). Побудувати промінь, доповняльний до променя $[AB)$.
4. Задано точки A і B ($A \neq B$). Побудувати відрізок $[AB]$.
5. На евклідовій площині побудувати який-небудь відрізок.
6. На заданій прямій побудувати принаймні дві точки.

7. Для заданих точок A і B ($A \neq B$) побудувати таку точку C , що точка B лежить між точками A і C .

8. На заданому колі побудувати принаймні дві точки.

9. На евклідовій площині побудувати яке-небудь коло.

Наведемо розв'язки деяких із сформульованих задач 1 – 9. (Розв'язки інших задач даної сукупності є аналогічними). Під час розв'язування, для кожної із задач 1–9 реалізацію етапу аналізу, виходячи з міркувань очевидності, не вважають потрібною.

Задача 1. *Задано точки A і B ($A \neq B$). Побудувати пряму AB .*

Дано: точки A і B евклідової площини ($A \neq B$) (рис. 2.1).

Побудувати: пряму AB .

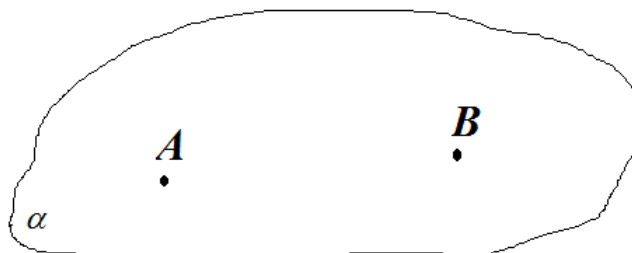


Рис. 2.1.

Розв'язання. II. Побудова. 1. Згідно аксіоми β_2 точки A і B ($A \neq B$) є побудованими (рис. 2.1).

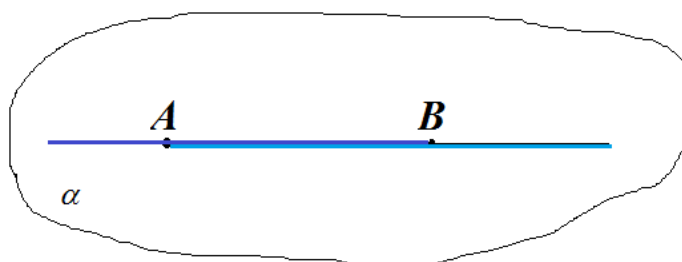


Рис. 2.2.

2. Згідно аксіоми β_1 , побудованим є промінь $[AB)$ (рис.2.2).

3. Згідно тієї ж аксіоми β_1 , побудованим є промінь $[BA)$ (рис. 2.2).

4. Згідно аксіоми β_3 , побудовано множину $[BA) \cup [AB)$, яка співпадає з прямою AB , що й треба було побудувати.

III. Доведення. Переконаємося у тому, що остання теза останнього (четвертого) кроку побудови, насправді, є правильною. Дійсно, у евклідовій геометрії точки A і B належать променю $[AB)$, об'єднанням променів $[AB)$ і $[BA)$ є пряма AB . Згідно означення об'єднання множин, промінь $[AB)$ є підмножиною прямої AB . Отже, $A \in [AB)$, $B \in [AB)$, $[AB) \subset AB$, і тому $A \in AB$, $B \in AB$, пряма AB є тією прямою, яку й треба було побудувати.

IV. Дослідження. Аналіз етапу побудови вказує на те, що при будь-якому варіанті обрання вихідних даних – таких точок A і B , що $A \neq B$ – задачу можна розв'язати тим способом, який ми обрали. У евклідовій геометрії через будь-які дві різні точки проходить єдина пряма. Отже, при будь-якому варіанті обрання вихідних даних, задача має єдиний розв'язок, який можна знайти тим способом, який ми обрали.

Задача 2. На евклідовій площині побудувати принаймні одну пряму.

Дано: Нічого не дано у сформульованій задачі. Оскільки усі міркування відбуваються у межах евклідової площини, то можна вважати, що задано саме евклідову площину α як цілісний геометричний об'єкт (але не як відповідну сукупність окремих точок).

Побудувати: яку-небудь пряму l , що належить площині α .

Розв'язання. II. Побудова. 1. Згідно аксіоми β_1 , на площині α існують принаймні дві різні побудовані точки. Позначимо ці точки через A і B ($A \neq B$).

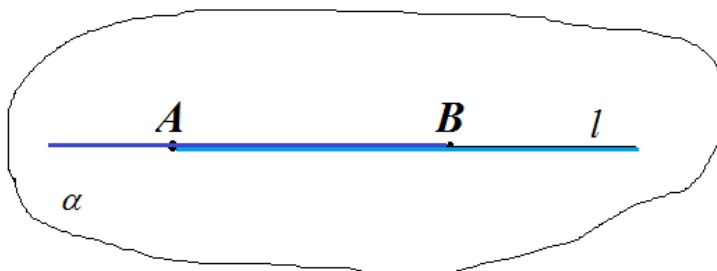


Рис. 2.3.

2. Згідно аксіоми β_d , тоді, побудованим є промінь $[AB)$ (рис. 2.3).

3. Згідно аксіоми β_d , побудованим є і промінь $[BA)$.

4. Згідно аксіоми β_3 , побудовано множину $[AB) \cup [BA)$.

III. Доведення. У евклідовій геометрії об'єднання $[AB) \cup [BA)$ променів $[AB)$ і $[BA)$ утворює пряму AB . Отже, четвертий крок побудов означає, що побудовано певну пряму l евклідової площини α , що й треба було побудувати.

IV. Дослідження. Згідно наведеної аксіоматики теорії побудов за допомогою циркуля і лінійки, усі чотири кроки побудов завжди є здійсненими. Отже, задача завжди має розв'язок. Питання про те, скільки різних розв'язків вона має, можна переформулювати на питання про те, скільки різних прямих можна побудувати на евклідовій площині за допомогою циркуля і лінійки, та пов'язане з ним питання про те, чи будь-яку пряму евклідової площини можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Пошуки відповідей на ці питання не будемо знаходити у межах даного курсу.

Задача 6. На заданій прямій побудувати дві різні точки.

Дано: пряму l .

Побудувати: точки $A, B \in l, A \neq B$.

Розв'язання. II. Побудова. 1. Згідно аксіоми β_2 , пряма l евклідової площини α є побудованою.

2. Згідно аксіоми β_6 , на прямій l існує принаймні одна побудована точка. Позначимо цю точку через A .

3. Згідно аксіоми β_7 , на евклідовій площині α , що містить пряму l , існує принаймні одна побудована точка, яка не належить прямій l . Позначимо цю точку через P (рис. 2.4). Точка A належить прямій l , точка P цій прямій не належить, отже, точки A і P є різними.

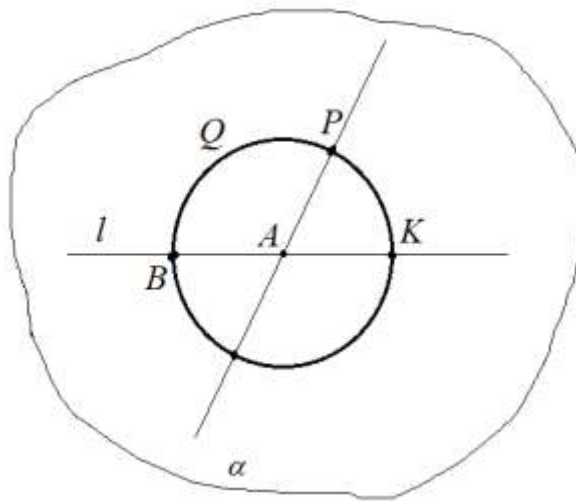


Рис. 2.4.

4. Згідно аксіоми β_n , на площині α побудовано промінь $[AP)$.
5. Згідно тієї ж аксіоми β_n , на площині α побудовано промінь $[PA)$
6. Згідно аксіоми β_4 , на площині α побудовано множину $[AP) \cap [PA)$, яка у евклідовій геометрії співпадає з відрізком $[AP]$
7. Згідно аксіоми β_u , побудованим є коло Q , з центром у точці A і радіусом $[AP]$.
8. Згідно аксіоми β_4 , побудовано множину $l \cap Q$. Множина $l \cap Q$ складається з двох точок, припустимо B і K , які належать прямій l .

III. Доведення. Точка A , $A \in l$, є побудованою згідно другого кроку побудов. Згідно третього кроку побудов, точка P є побудованою і не співпадає з точкою A в силу того, що $A \in l$, $P \notin l$. У евклідовій геометрії перетин променів $[AP)$ і $[PA)$ не є порожнім. Отже, шостий крок побудов є здійсненням, відрізок $[AP]$ побудовано. У евклідовій геометрії пряма, що проходить через центр кола, перетинає коло у двох діаметрально протилежних точках. Отже, точки B і K на прямій l існують і є побудованими у відповідності до восьмого кроку побудов. Точки B і K є різними точками прямої l , жодна з них не співпадає з точкою A , бо точки B і K є діаметрально протилежними точками кола Q , центром якого є точка A .

Як підсумок, на прямій l побудовано три попарно різні точки, три пари попарно різних точок, задачу розв'язано.

IV. Дослідження. Аналіз процесу доведення свідчить про те, що задачу при будь-якому варіанті обрання вихідних даних (прямої l), можна розв'язати тим способом, який ми обрали. Як результат розв'язання було отримано три розв'язки. Зрозуміло, що, за допомогою послідовної побудови кіл, радіуси яких дорівнюють відрізку $[AP]$, з центрами у попередньо побудованих точках, на прямій l можна побудувати n попарно різних точок для будь-якого натурального числа n .

Умови наступної серії задач першого рівня складності, які часто називають **елементарними**, традиційно формулюють наступним чином.

1. На заданому промені, від його початку, відкласти відрізок, що дорівнює заданому.

2. Від заданого променя, у задану півплощину, відкласти кут, що дорівнює заданому.

3. Побудувати серединний перпендикуляр до заданого відрізка.

4. Побудувати середину заданого відрізка.

5. Побудувати центр заданого кола.

6. Побудувати бісектрису заданого нерозгорнутого кута.

7. Через задану на заданій прямій точку провести пряму, перпендикулярну до заданої.

8. Через задану на заданому колі точку провести до даного кола дотичну.

9. Через задану точку, що знаходиться у зовнішній відносно заданого кола області, провести до даного кола дотичну.

10. Через задану точку, що не лежить на заданій прямій, провести пряму, перпендикулярну до заданої.

11. Через задану точку, що не лежить на заданій прямій, провести пряму, паралельну до заданої.

12. Поділити заданий відрізок на три однакові частини.
13. Побудувати трикутник за двома сторонами і кутом між ними.
14. Побудувати трикутник за трьома сторонами.
15. Побудувати трикутник за стороною і прилеглими до неї кутами.
16. Побудувати прямокутний трикутник за двома катетами.
17. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою.
18. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і прилеглим гострим кутом.
19. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і гострим кутом.
20. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і протилежним гострим кутом.

Зауважимо, що під кутом у кожній із відповідних наведених задач мається на увазі кут-каркас, під трикутником – трикутник-каркас, тобто, геометрична фігура, утворена трьома точками, що не належать одній прямій, та трьома відрізками з кінцями у цих точках.

На відміну від вищезазначених найпростіших задач на побудову, вміння розв'язувати за допомогою циркуля і лінійки задачі на побудову даної серії для учнів закладів загальної середньої освіти є обов'язковою вимогою процесу навчання [5].

Обов'язковою також є вимога виконання відповідних реальних графічних побудов за допомогою таких реальних інструментів як циркуль і лінійка. При цьому зрозуміло, що реалізація того чи іншого теоретичного кроку побудови згідно одної з аксіом β_i , $i = \overline{1,7}$, з практичної точки зору передбачає усвідомлення певного результату побудов, виконаних раніше; реалізація теоретичного кроку побудови згідно аксіоми β_l чи β_u з практичної точки зору вимагає виконання певної конкретної практичної дії у один крок, відповідно, за допомогою лінійки або циркуля. Отже, представлення теоретичного процесу побудови за допомогою циркуля і

лінійки певної геометричної фігури у вигляді скінченної послідовності застосувань аксіом теорії побудов виступає як необхідна передумова вдалого відтворення його графічної ілюстрації.

З методичної точки зору, при розв'язуванні задач 1 – 20 у закладах загальної середньої освіти суперечливим залишається питання про доцільність визнання обов'язковою реалізацію етапу аналізу. З одного боку, на відміну від задач із серії «найпростіших», шукані шляхи розв'язання задач 1 – 20, у своїй переважній більшості, не є очевидними. З іншого боку, саме через це, реалізація процесу пошуку таких шляхів вимагає певних спеціальних навичок, якими, на першому році опанування систематичного курсу евклідової геометрії, здобувачі загальної середньої освіти ще не володіють. В силу цього, значна кількість методистів вважає, що треба просто ознайомити учнів з розв'язками переважної більшості задач серії 1–20, маючи на увазі, що це створить підґрунтя для самостійного знаходження учнями, у подальшому, саме під час реалізації етапу аналізу, шляхів розв'язання більш складних задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки. Подалі, для учнів сьомого року навчання правильною з точки зору методики викладання будемо вважати саме останню точку зору. У той же час треба зауважити, що із наведеного переліку задач, принаймні, для задач 9, 11, 17-20, традиційними є різні шляхи розв'язання. Отже, для учителя, при обранні найоптимальнішого із них, попереднє проведення аналізу варто визнати доцільним.

У якості прикладу розглянемо відповідне розв'язання однієї із сформульованих вище задач

Задача 20. *Побудувати прямокутний трикутник за катетом і протилежним гострим кутом.*

Дано: відрізок $[PT]$; гострий кут MNK (рис. 2.5).

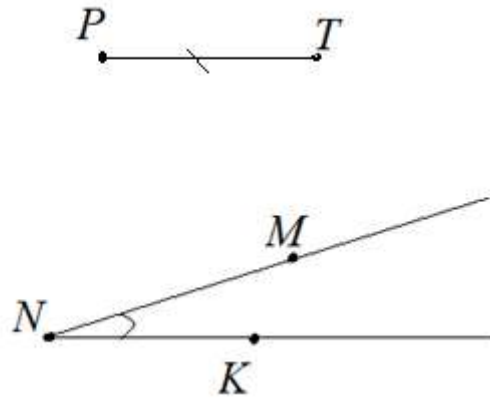


Рис. 2.5.

Побудувати: трикутник ABC , у якого $\angle ACB = 90^\circ$, катет $[CB]$ дорівнює заданому відрізку $[PT]$, протилежний до цього катета кут $\angle BAC$ дорівнює заданому куту $\angle MNK$.

Розв'язання. І. Аналіз. Припустимо, що шуканий прямокутний трикутник ABC побудовано: $\angle BCA = 90^\circ$; $BC = PT$; $\angle BAC = \angle MNK$ (рис. 2.6). Проведемо у цьому трикутнику висоту CH . Розглянемо прямокутні трикутники BHC і BAC . Вони мають спільний гострий кут $\angle ABC$. Оскільки сума гострих кутів прямокутного трикутника складає 90° , звідси випливає, що $\angle BCH = \angle BAC$, тобто, кут $\angle BCH$ такого дорівнює заданому куту $\angle MNK$.

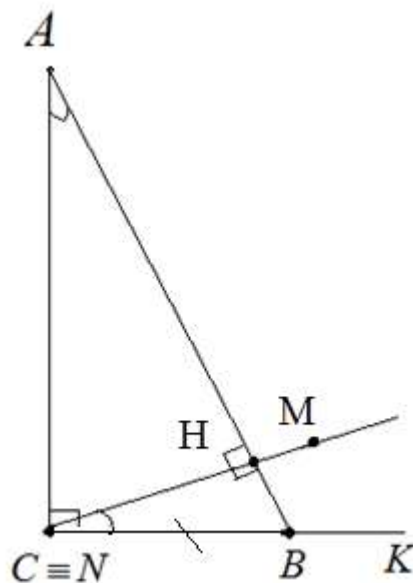


Рис. 2.6.

Отже, вершину N заданого кута $\angle MNK$ можна перейменувати на C , на утвореному промені $[CK)$ можна відкласти відрізок $[CB]$, який дорівнює заданому відрізку $[PT]$. Точка A є точкою перетину прямої, що проходить через точку C перпендикулярно до прямої BC , з променем, який проходить через точку B перпендикулярно променю $[CM)$ (рис. 2.6).

II. Побудова.

1. Розглянемо заданий кут $\angle MNK$. Згідно аксіоми β_2 , він є побудованим, тобто, побудованими є промені $[NM)$ і $[NK)$. Перейменуємо точку N на точку C ($N \equiv C$).
2. Згідно аксіоми β_2 , заданий умовою задачі відрізок $[PT]$ також є побудованим.
3. Згідно аксіоми β_4 , побудуємо коло Q_1 з центром у точці C радіусу $[PT]$.
4. Згідно аксіоми β_4 , побудованою є точка перетину кола Q_1 з променем $[CK)$.
5. Згідно аксіоми β_1 , побудованим є промінь $[BC)$.
6. Згідно аксіоми β_4 , побудованою є точка перетину кола Q_1 з променем $[BC)$. Позначило її через B_1 .
7. Згідно аксіоми β_1 побудованим є промінь $[B_1B)$.
8. Згідно аксіоми β_4 , побудованим є відрізок $[B_1B]$:

$$[B_1B] = [BC) \cap [B_1B).$$
9. Згідно аксіоми β_4 , побудованим є коло Q_2 з центром у точці B радіусу $[BB_1]$.

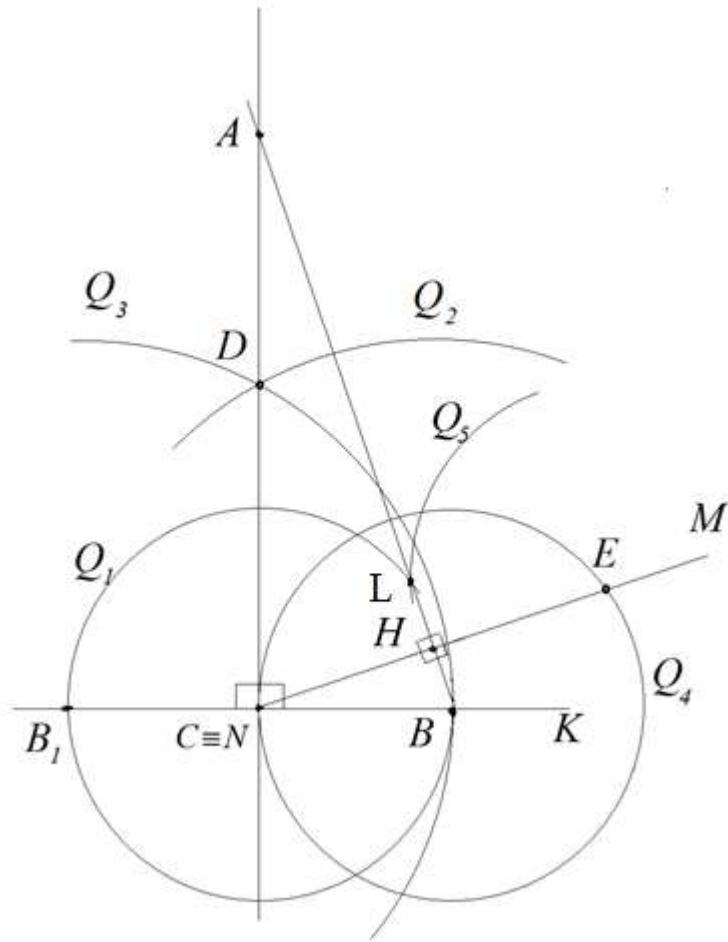


Рис. 2.7.

10. Згідно аксіоми β_u , побудованим є коло Q_3 з центром у точці B_1 радіусу $[BB_1]$.
11. Згідно аксіоми β_4 , побудованою є точка D , одна з двох точок перетину кіл Q_2 і Q_3 .
12. Згідно аксіоми β_n , побудованим є промінь $[CD)$.
13. Згідно аксіоми β_n , побудованим є промінь $[DC)$.
14. Згідно аксіоми β_3 , побудованою є пряма CD .
15. Згідно аксіоми β_4 , побудованим є відрізок $[CB]$,
 $[CB] = [CK) \cap [BC)$.

16. Згідно аксіоми β_u , побудованим є коло Q_4 з центром в точці B радіусу $[CB]$.

17. Згідно аксіоми β_4 , побудованими є обидві точки перетину кола Q_4 з променем $[CM)$. Однією з таких точок є точка C , позначимо іншу точку через E .

18. Згідно аксіоми β_u , побудованим є коло Q_5 з центром в точці E радіусу $[CB]$.

19. Згідно аксіоми β_4 , побудованими є обидві точки перетину кола Q_5 з колом Q_1 . Однією з таких точок є точка B , позначимо іншу точку через L .

20. Згідно аксіоми β_n , побудованим є промінь $[BL)$.

21. Згідно аксіоми β_4 , побудованою є точка A перетину прямої CD з променем $[BL)$.

22. Згідно аксіоми β_n , побудованим є промінь $[AC)$.

23. Згідно аксіоми β_4 , побудованим є відрізок $[AC]$:
 $[AC] = [CD) \cap [AC)$.

24. Згідно аксіоми β_n , побудованим є промінь $[AB)$.

25. Згідно аксіоми β_4 , побудованим є відрізок $[AB]$:
 $[AB] = [BL) \cap [AB)$.

26. Згідно аксіоми β_3 , побудованим є трикутник ABC :
 $\Delta ABC = [BC] \cup [AC] \cup [AB]$.

III. Доведення. Як результат реальних графічних побудов, що супроводжували теоретичне розв'язання даної задачі, побудовано трикутник ABC . Перевіримо, що реалізація представлених двадцяти шести кроків

побудов з теоретичної точки зору гарантує той факт, що трикутник ABC побудовано і у відповідній теорії геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки.

Із двадцяти шести кроків побудов, використаних для розв'язання даної задачі, нездійсненими за своїм змістом можуть виявитися лише ті кроки, реалізація яких передбачає посилення на аксіому β_4 . Отже, перевіримо, що, у даному випадку, для геометричних фігур, перетин яких будується, цей перетин не є порожньою множиною.

1. На четвертому кроці побудов мова йде про перетин кола Q_1 і променя з початком у центрі даного кола. У евклідовій геометрії такі фігури завжди мають єдину спільну точку.

2. На шостому кроці побудов розглядається перетин кола Q_1 з таким променем, початок якого належить даному колу, який містить діаметр даного кола. Зрозуміло, що у евклідовій геометрії і початок променя, і діаметрально протилежна до нього точка, є спільними точками даного променя і даного кола.

3. На восьмому, п'ятнадцятому і двадцять п'ятому кроках побудов мова йде про перетин двох променів, які містять спільний відрізок. Зрозуміло, що такий перетин не є порожнім.

4. Кола Q_2 і Q_3 , розглянуті на одинадцятому кроці побудов, мають не порожній перетин тому, що мають однакові радіуси та центр кожного з них є точкою іншого.

5. На сімнадцятому кроці побудов мова йде про наявність у кола Q_4 і променя $[CM)$ двох спільних точок. Центром кола Q_4 є точка B , яка належить променю $[CK)$. За умови задачі, заданий кут $МСК$ є гострим.

6. Нехай $BH \perp CM$. Трикутник $СНВ$ є прямокутним. Оскільки прямокутний трикутник не може мати тупого кута, точка H належить променю $[CM)$, має місце нерівність $BH < BC$. Останнє означає, що точка

H лежить всередині кола Q_4 , пряма CM є прямою, що проходить через внутрішню точку кола Q_4 . Отже, вона перетинає коло Q_4 у двох точках, однією з яких є точка C . Інша точка є внутрішньою точкою променю $[CH)$, який співпадає з променем $[CM)$. Отже, точка E , як друга точка перетину променю $[CM)$ з колом Q_4 у евклідовій геометрії існує.

7. На дев'ятнадцятому кроці побудов мова йде про існування двох точок перетину кіл Q_1 і Q_5 . Кола Q_1 і Q_5 мають однаковий радіус $[BC]$, відстань між їх центрами є меншою за їх подвоєний радіус, бо відрізок $[CE]$ є хордою кола Q_4 , яка не є його діаметром. Отже, у евклідовій геометрії дві точки перетину цих кіл існують.

8. На двадцять першому кроці побудов мова йде про точку перетину прямої CD і променю $[BL)$, (який співпадає з променем $[BH)$). Розглянемо ΔB_1DB . Згідно третього, четвертого і шостого кроків побудов, $B_1C = CB$. Згідно дев'ятого, десятого і одинадцятого кроків побудов, $B_1D = DB$. Отже, ΔB_1DB є рівнобедреним з основою $[B_1B]$, відрізок $[DC]$ є медіаною цього трикутника, проведеною до його основи. Але тоді, за властивістю рівнобедреного трикутника, відрізок $[DC]$ є й висотою цього трикутника, проведеною до його основи, пряма DC є перпендикулярною до прямої BC . Як вже було обґрунтовано, трикутник BCH є прямокутним з прямим кутом при вершині H . Отже, його кут CBH є гострим, промені $[CD)$ і $[BH)$ належать одній півплощині відносно прямої BC і у сумі складають менше, ніж 180° . Згідно п'ятого постулату Евкліда, який є еквівалентним до аксіоми паралельності евклідової геометрії, промені $[CD)$ і $[BH)$ перетинаються, точка A існує.

Але тоді існує і трикутник ABC , він є побудованим тому, що, згідно п'ятнадцятого, двадцять третього і двадцять п'ятого кроків побудов є побудованими його сторони, він є прямокутним за доведенням ($AC \perp CB$). Прямокутні трикутники ABC і HCB мають спільний гострий кут $\angle HBC$. Отже, їх інші гострі кути є рівними: $\angle CAB = \angle HCB$. Але $\angle HCB$ співпадає з кутом $\angle MCK$, який є заданим. Тому $\angle CAB = \angle MCK$. Згідно третього і четвертого кроків побудов, $BC = PT$. Все це означає, що $\triangle ABC$ є шуканим, що й треба було довести.

IV. Дослідження. Проведений під час реалізації етапу доведення ретельний аналіз усіх виконаних кроків побудов, дозволяє стверджувати, що задача 20 завжди має розв'язок, її завжди можна розв'язати тим способом, який ми обрали. У евклідовій геометрії усі прямокутні трикутники, що мають однакові катети і однакові, протилежні до цих катетів, гострі кути, є рівними між собою. Умови задачі не містять жодних вимог щодо певного спеціального розташування шуканого трикутника ABC на евклідовій площині. Це означає, що дана задача, при будь-якому варіанті обрання вихідних даних, має єдиний розв'язок.

Наведений приклад переконливо пояснює той факт, що математики просто не могли не розробити для описання процесу розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки певний скорочений алгоритм. За загальною домовленістю, при розв'язанні подібних задач більш високих рівнів складності, при вказівці виконаних кроків побудов, можна зазначати не лише аксіоми, а й будь-які з вищенаведених задач на побудову першого рівня складності. Аналогічні посилання є допустимими і при реалізації етапів доведення та дослідження. Одночасно зрозуміло, що виконання тих реальних графічних побудов, які мають ілюструвати побудови теоретичні, відбувається виключно у вигляді скінченної послідовності тих кроків практичних дій, що відповідають саме окремим аксіомам, а не певним їх сукупностям.

Основними методами розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки вищих рівнів складності у стандартних курсах планіметрії закладів загальної середньої освіти вважають 1) метод допоміжного трикутника; 2) метод геометричних місць точок; 3) метод геометричних перетворень, для курсів геометрії закладів загальної середньої освіти та закладів передвищої освіти, у першу чергу метод рухів та метод перетворень подібності; 4) алгебраїчний метод. Сутність цих методи та приклади їхнього застосування будуть розглянуті у наступних параграфах даного навчального посібника. При цьому, подалі, одночасно зі спрощеним описанням етапу побудови, дозволимо собі не використовувати квадратні та круглі дужки при позначенні відрізків та променів, не розрізняти за позначенням відрізки та їхні довжини.

Підкреслимо також, що для розв'язання однієї й тієї ж задачі, як правило, можуть бути обраними різні методи. Обрання того чи іншого методу розв'язання відбувається під час реалізації етапу аналізу. Специфіка обраного методу, зрозуміло, проявляє себе під час реалізації етапу побудови. Доведення, у свою чергу, спирається на те, яким чином було здійснено побудову.

Питання та завдання для самоконтролю до §2

1. Задачі якого типу вважають задачами першого рівня складності серед задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки? Чи залежить склад цих задач від обраної аксіоматики теорії таких побудов?
2. Які вимоги до розв'язування найпростіших задач першого рівня складності на побудову за допомогою циркуля і лінійки зазвичай висувають у курсах планіметрії закладів загальної середньої освіти?
3. Наведіть приклади умов та відповідних розв'язків найпростіших задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки згідно представленої аксіоматики таких побудов.

4. Наведіть перелік елементарних задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки першого рівня складності. Що можна стверджувати про представлення умов цих задач а також вимог до їхнього розв'язання у традиційних курсах математики закладів загальної середньої освіти?
5. Які вимоги до описання процесу розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки більш високих, ніж перший, рівнів складності, традиційно, висуваються у курсах планіметрії закладів загальної середньої освіти?
6. Перелічіть відомі Вам традиційні для сучасних курсів планіметрії закладів загальної середньої освіти методи розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.

Задачі для самостійного розв'язання до §2

На підставі запропонованої у §1 аксіоматики теорії побудов на евклідовій площині за допомогою циркуля і лінійки, згідно повної схеми розв'язання, наведіть розв'язки наступних елементарних задач на побудову.

2.1. На заданому промені, від його початку, відкласти відрізок, що дорівнює заданому.

2.2. Від заданого променя, у задану півплощину, відкласти кут, що дорівнює заданому.

2.3. Побудувати серединний перпендикуляр до заданого відрізка.

2.4. Побудувати середину заданого відрізка.

2.5. Побудувати центр заданого кола.

2.6. Побудувати бісектрису заданого нерозгорнутого кута.

2.7. Через задану на заданій прямій точку провести пряму, перпендикулярну до заданої.

2.8. Через задану на заданому колі точку провести до даного кола дотичну.

2.9. Через задану точку, що знаходиться у зовнішній відносно заданого кола області, провести до даного кола дотичну.

2.10. Через задану точку, що не лежить на заданій прямій, провести пряму, перпендикулярну до заданої.

2.11. Через задану точку, що не лежить на заданій прямій, провести пряму, паралельну до заданої.

2.12. Поділити заданий відрізок на три однакові частини.

2.13. Побудувати трикутник за двома сторонами і кутом між ними.

2.14. Побудувати трикутник за трьома сторонами.

2.15. Побудувати трикутник за стороною і прилеглими до неї кутами.

2.16. Побудувати прямокутний трикутник за двома катетами.

2.17. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою.

2.18. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і прилеглим гострим кутом.

2.19. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і гострим кутом.

§3. Метод допоміжного трикутника розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки

Вісім із двадцяти вищенаведених задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки, названих елементарними задачами першого рівня складності, є задачами на побудову трикутника за заданим набором трьох з шести його основних елементів (кутів і сторін). Виходячи з цього, у якості одного з методів розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки було виокремлено так званий **метод допоміжного трикутника**.

Зрозуміло, що доцільний шлях до розв'язання визначеної задачі на побудову, отже, і відповідний метод її розв'язування, обирають під час реалізації етапу аналізу. У разі обрання методу допоміжного трикутника, під час проведення аналізу знаходять трикутник, який можна побудувати на підставі вихідних даних задачі шляхом розв'язання однієї з восьми вищевказаних задач на побудову першого рівня складності. Потім визначають можливі шляхи побудови інших геометричних фігур, які, у підсумку, утворюють вже усі складові геометричної фігури, що підлягає побудові згідно умови задачі.

При цьому варто зазначити, що, по-перше, далеко не кожную задачу на побудову за допомогою циркуля і лінійки доцільно і, взагалі, можливо розв'язати за методом допоміжного трикутника. По-друге, метод допоміжного трикутника далеко не завжди вдається використати у так званому «чистому» вигляді. Часто, у процесі реалізації необхідних побудов, доводиться використовувати інші методи, зокрема, метод геометричних місць точок. У той же час метод допоміжного трикутника, як правило, є першим методом розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки, який опановують у курсах геометрії закладів загальної середньої освіти. Так само, як і метод геометричних місць точок, для закладів загальної середньої освіти його варто визнати основним.

Наведемо приклади розв'язків певної кількості задач на побудову за методом допоміжного трикутника.

Задача 3.1. Побудувати трикутник за двома сторонами та медіаною, проведеною до однієї з них.

Дано: відрізки P_1D_1 , P_2D_2 , P_3D_3 (рис. 3.1).

Побудувати: $\triangle ABC$, у якого $BC = P_1D_1$, $AC = P_2D_2$, відрізок AA_1 є медіаною, проведеною до сторони BC , $AA_1 = P_3D_3$.

Розв'язання.

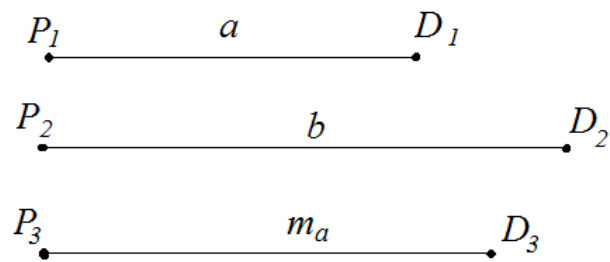


Рис 3.1.

I. Аналіз. Припустимо, побудовано $\triangle ABC$, у якого $BC = P_1D_1$, $AC = P_2D_2$ відрізок AA_1 є медіаною, проведеною до сторони BC , $AA_1 = P_3D_3$ (рис. 3.2). Згідно означення медіани, $CA_1 = A_1B$.

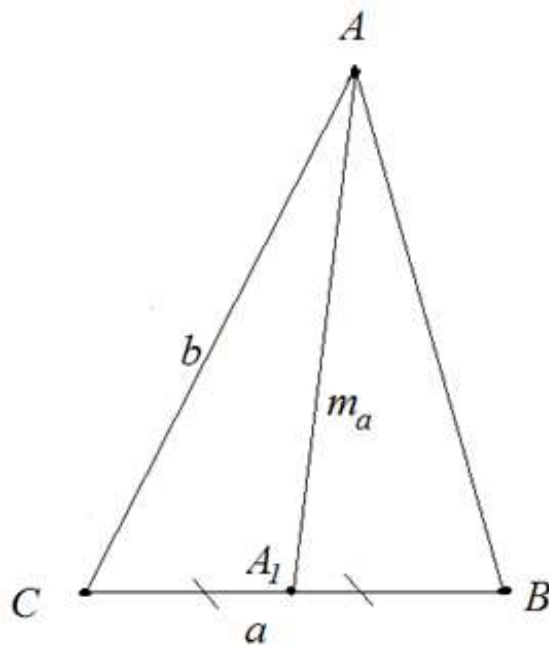


Рис. 3.2.

Заданий відрізок $P_1 D_1$ можна перейменувати на відрізок CB . Точку A_1 , як середину відрізка BC , можна побудувати згідно задачі 4 першого рівня складності. Трикутник AA_1C можна побудувати за трьома сторонами (задача 14 першого рівня складності). Визначеним тоді буде кут AA_1C і доповняльний до нього кут AA_1B . Трикутник AA_1B тоді, фактично, вже буде побудованим за двома сторонами і кутом між ними, $\triangle ABC$ буде шуканим.

II. Побудова. 1. Заданий відрізок $P_1 D_1$ перейменовуємо у відрізок CB .

2. Будуємо середину A_1 відрізка CB .

3. Будуємо трикутник CAA_1 , у якому $CA = P_2 D_2$, $A_1A = P_3 D_3$.

4. Сполучаючи точки A і B , отримуємо $\triangle ABC$.

III. Доведення. Розглянемо $\triangle ABC$. Згідно першого етапу побудови, його сторона CB співпадає з заданим відрізком $P_1 D_1$. Згідно другого етапу побудови, точка A_1 є серединою відрізка CB . Отже, відрізок AA_1 є медіаною побудованого трикутника ABC . Згідно третього етапу побудови, $CA = P_2 D_2$, $A_1A = P_3 D_3$. Отже, $\triangle ABC$ є шуканим.

IV. Дослідження. Проаналізуємо проведену побудову з точки зору можливості реалізації її кроків відповідно до вибору вихідних даних. Згідно задачі 4 першого рівня складності, перші два кроки побудови можна виконати при будь-якому варіанті обрання вихідних даних. Згідно задачі №14 першого рівня складності, трикутник AA_1C можна побудувати тоді та тільки тоді, коли

$$|AC - AA_1| < A_1C < AC + AA_1. \quad (1)$$

Якщо буде побудовано трикутник AA_1C , то буде побудовано і $\triangle ABC$, задачу буде розв'язано. З іншого боку, якщо задачу можна розв'язати, то трикутник AA_1C існує і, зрозуміло, умову (1) виконано. Отже, задачу можна розв'язати, і саме тим способом, який ми обрали, тоді та тільки тоді, коли

справедливою є подвійна нерівність (1), або, «у термінах вихідних даних»,

$$\text{подвійна нерівність } \left| P_2 D_2 - P_3 D_3 \right| < \frac{P_1 D_1}{2} < P_2 D_2 + P_3 D_3.$$

Якщо задача має розв'язок, то цей розв'язок є єдиним, тому що у евклідовій геометрії справджується ознака рівності трикутників за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них (перевірте цей факт самостійно), умова задачі не містить жодних обмежень щодо розташування шуканої фігури відносно вихідних даних.

Задача 3.2. Побудувати трикутник за стороною та проведеними до неї медіаною та висотою.

Дано: відрізки $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, $P_3 Q_3$ (рис. 3.3).

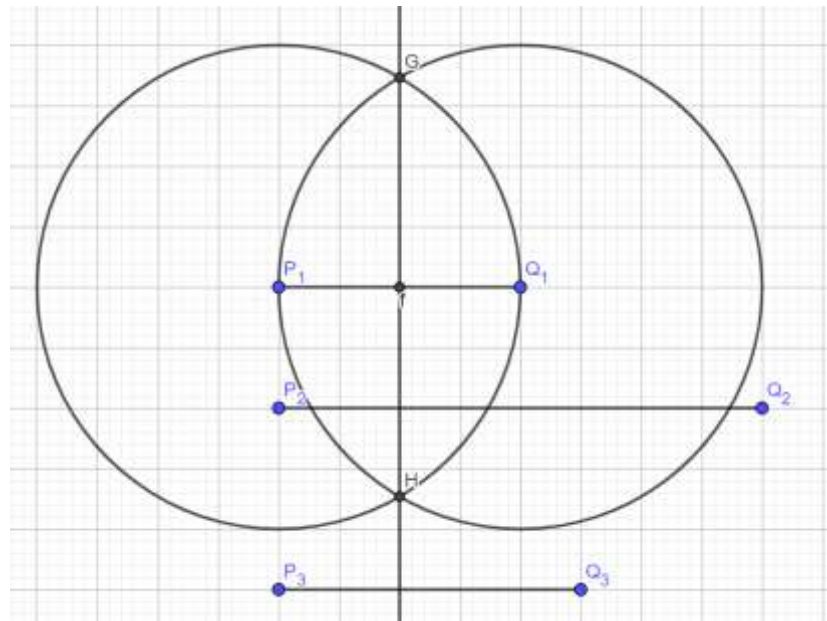


Рис. 3.3.

Побудувати: $\triangle ABC$, для якого $AC = P_1 Q_1$, $M \in AC$, $AM = MC$, $BM = P_2 Q_2$, $BH \perp AC$, $H \in AC$, $BH = P_3 Q_3$.

Розв'язання. I. Аналіз. Припустимо, побудовано $\triangle ABC$, для якого сторона AC дорівнює заданому відрізку $P_1 Q_1$, відрізок BM є медіаною, проведеною до сторони AC ($M \in AC$, $AM = MC$), $BM = P_2 Q_2$, відрізок BH

є висотою, проведеною до сторони AC ($BH \perp AC$, $H \in AC$, $BH = P_3Q_3$) (рис.3.4).

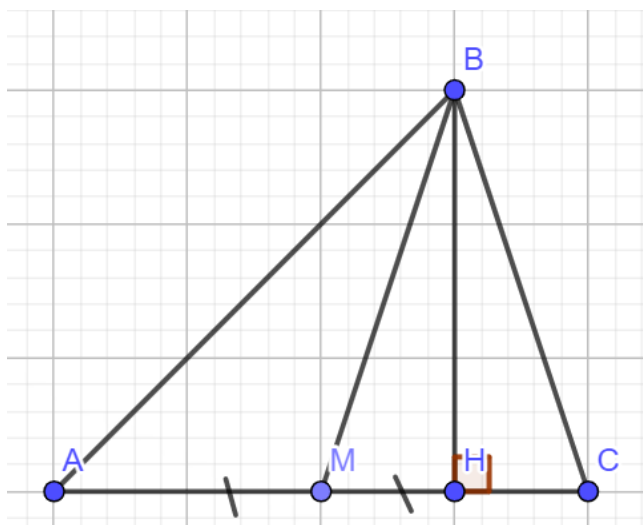


Рис. 3.4.

Прямокутний трикутник MBH можна побудувати за вихідними даними задачі, за катетом та гіпотенузою. Вершину B шуканого трикутника ABC таким чином буде вже побудовано. Вершини A і C шуканого трикутника ABC належать прямій MN і лежать на однаковій відстані, що складає половину заданого відрізка P_1Q_1 , від точки M . Отже, їх також можна побудувати.

II. Побудова. 1. Будуємо прямокутний трикутник MBH , гіпотенуза BM якого дорівнює заданому відрізку P_2Q_2 , а катет BH – заданому відрізку P_3Q_3 (рис 3.5). (За загальною домовленістю, під час опису задач на побудову за даним методом, достатньо посилання на відповідну задачу першого рівня складності. Але реальні побудови, за допомогою реальних інструментів креслення – циркуля і лінійки, – зрозуміло, вимагають таких операцій, які є ілюстраціями застосувань відповідних аксіом теорії побудов).

2. Ділимо заданий відрізок P_1Q_1 навпіл точкою T .

3. На прямій MN по різні сторони від точки M відкладаємо відрізки $MA = MC = TP_1$.

4. Будуємо $\triangle ABC$.

розв'язати тим способом, який ми обрали. Якщо за умови задачі вірною є нерівність $P_2Q_2 < P_3Q_3$, то задача розв'язків не має, бо, якщо $\triangle ABC$ існує, то його медіана і висота, проведені з однієї вершини, якщо не співпадають, є, відповідно, похилою та перпендикуляром, проведеними до певної прямої з однієї точки. Згідно відомої теореми, похила не може бути меншою за перпендикуляр. Звідси випливає, що, якщо $P_2Q_2 < P_3Q_3$, то шуканого трикутника ABC взагалі не існує.

Припустимо, $P_2Q_2 = P_3Q_3$. Тоді задачу не можна розв'язати тим способом, який ми обрали, бо трикутника $MВH$ взагалі не існує. Але, якщо $\triangle ABC$ існує, то у нього медіана і висота, що виходять з однієї вершини, є рівними між собою тоді та тільки тоді, коли вони співпадають (у супротивному випадку медіана є більшою за висоту). А коли медіана і висота трикутника співпадають, то трикутник є рівнобедреним. Отже, якщо за умови задачі $P_2Q_2 = P_3Q_3$, то мова йде про побудову рівнобедреного трикутника ABC , $AB = BC$, з основою $AC = P_1Q_1$ і проведеною до цієї основи висотою $BH = P_2Q_2 = P_3Q_3$. Це окрема задача на побудову за допомогою циркуля і лінійки, яку можна розв'язати за повною схемою, зокрема, за методом трикутника.

Дано: відрізки P_1Q_1 , P_2Q_2 (рис. 3.6).

Побудувати: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $AC = P_1Q_1$, $BH \perp AC$, $H \in AC$, $BH = P_2Q_2$.

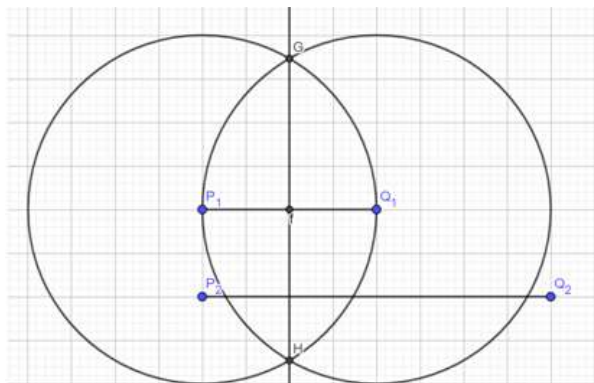


Рис. 3.6.

Розв'язання. І. Аналіз. Припустимо, побудовано рівнобедрений $\triangle ABC$, $AB=BC$, у якого $AC=P_1Q_1$, BH – висота, проведена до основи, $BH=P_2Q_2$ (рис. 3.7).

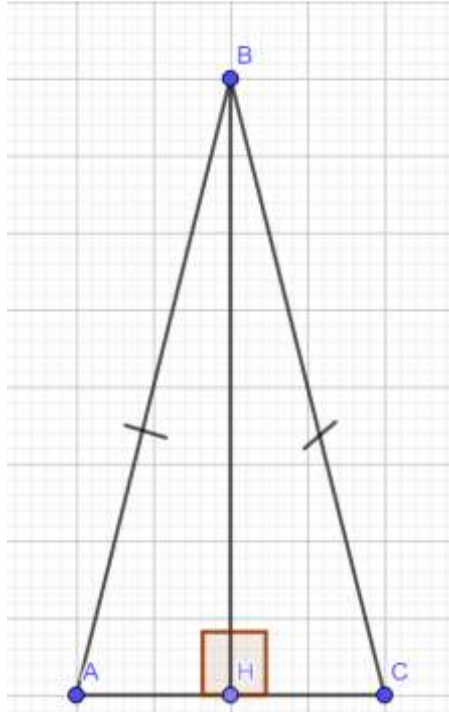


Рис. 3.7.

Як відомо, висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, є і його медіаною. Отже, $HC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}P_1Q_1$, прямокутний трикутник BHC можна побудувати за двома катетами ($BH = P_2Q_2$, $HC = \frac{1}{2}P_1Q_1$) виходячи з вихідних даних задачі. Вершину A шуканого трикутника ABC можна тоді побудувати як точку, що лежить на прямій HC по іншу сторону від точки H , ніж точка C , на такій самій відстані.

ІІ. Побудова. 1. Будуємо середину T заданого відрізка P_1Q_1 .

2. Будуємо прямокутний трикутник BHC за катетами $BH = P_2Q_2$, $HC = TQ_1$.

3. На промені, доповняльному променю HC , відкладаємо відрізок HA , $HA=HC$.

4. Будуємо $\triangle ABC$ (рис. 3.8).

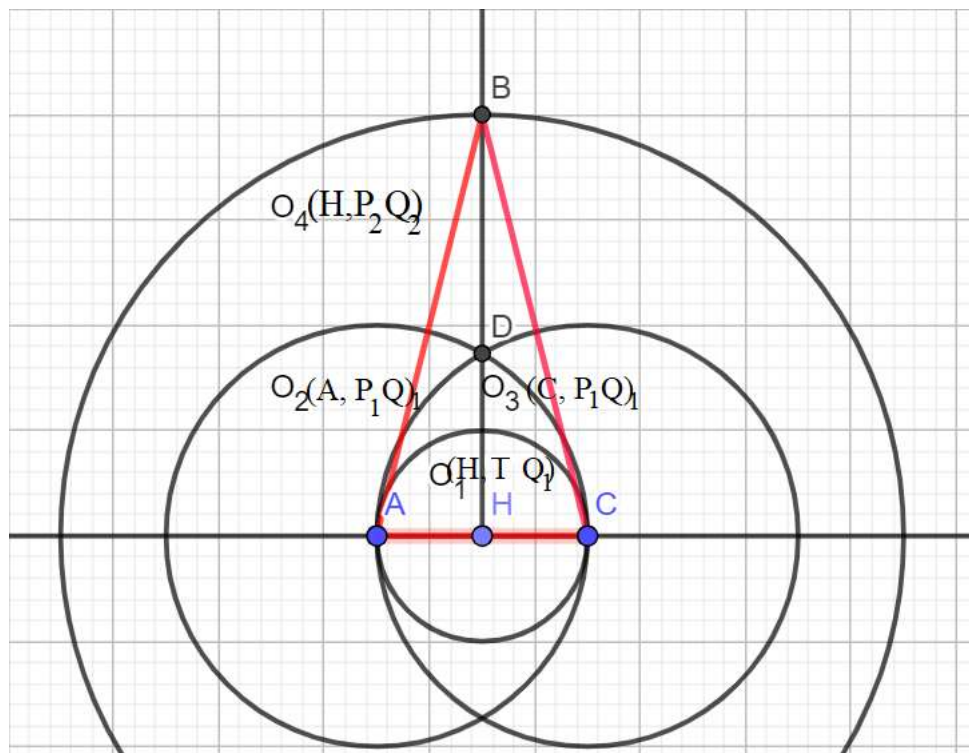


Рис. 3.8.

III. Доведення. Згідно другого кроку побудов, $BH \perp AC$, відрізок BH є висотою побудованого трикутника ABC . За третім кроком побудов, відрізок BH є медіаною побудованого трикутника ABC . Отже, у трикутнику ABC медіана співпадає з висотою. Тому він є рівнобедреним:

$$AB = BC. \text{ Згідно другого кроку побудов, } BH = P_2Q_2, \quad HC = TQ_1 = \frac{1}{2}P_1Q_1.$$

Згідно третього кроку побудов, $AC = 2HC = P_1Q_1$. У підсумку, $\triangle ABC$ є шуканим.

IV. Дослідження. Зрозуміло, що усі передбачені етапом побудови кроки побудов можна виконати за будь-якого варіанту задання вихідних даних, сформульовану задачу завжди можна розв'язати тим способом, який ми обрали.

У підсумку, було обґрунтовано, що сформульована задача 3.2 має розв'язок тоді та тільки тоді, коли для заданих відрізків P_2Q_2 і P_3Q_3 вірною є нерівність $P_2Q_2 \geq P_3Q_3$, відрізок P_1Q_1 може бути довільним.

З'ясуємо питання про те, скільки різних розв'язків, у випадку їхньої наявності, може мати дана задача. Під час виконання відповідних побудов кожного разу було отримано один розв'язок. Умови даної задачі не передбачають жодного спеціального варіанту розташування побудованого трикутника відносно заданих вихідних даних. Отже, якщо ми обґрунтуємо рівність трикутників за стороною і проведеними до неї медіаною та висотою, які не є рівними між собою, та рівність рівнобедрених трикутників за основою і висотою, проведеною до основи, то для даної задачі ми доведемо єдиність розв'язку за умови його існування. Подібні твердження насправді мають місце, вони є задачами теоретичного характеру стандартного курсу геометрії для сьомого класу закладів загальної середньої освіти.

Розглянемо відповідні обґрунтування.

1. Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $BH \perp AC$, $H \in AC$, $B_1H_1 \perp A_1C_1$, $H_1 \in A_1C_1$, $BH = B_1H_1$, $AM = MC$, $M \in AC$, промені MH і MA є однаково напрямленими, $A_1M_1 = M_1C_1$, $M_1 \in A_1C_1$, промені M_1H_1 і M_1A_1 є однаково напрямленими, $BM = B_1M_1$, $BM \neq BH$ (рис. 3.9)

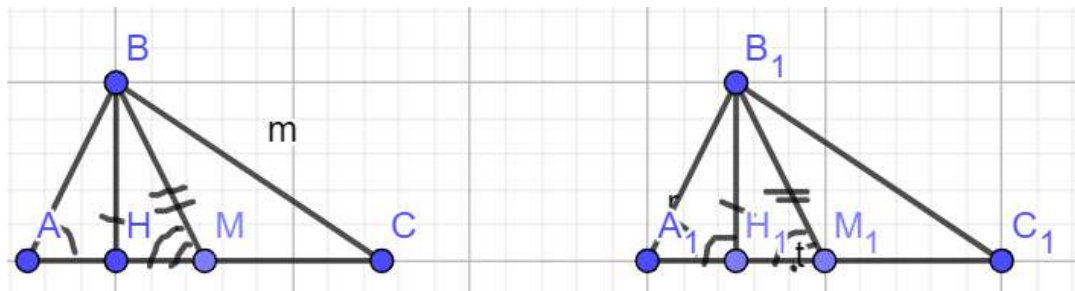


Рис. 3.9.

Довести: $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$.

Доведення. Розглянемо $\triangle BHM$ і $\triangle B_1H_1M_1$. Згідно умови задачі, вони є прямокутними, мають, відповідно, рівні катети і гіпотенузи. Отже, $\triangle BHM = \triangle B_1H_1M_1$. Звідси випливає, що $\angle BMH = \angle B_1M_1H_1$ як гострі кути рівних прямокутних трикутників, що лежать проти рівних катетів. Але, згідно умови даної задачі, промінь MH є однаково напрямленим до променю MA ,

промінь M_1H_1 є однаково напрямленим до променя M_1A_1 . Це означає, що $\angle BMH \equiv \angle BMA$, $\angle BM_1H_1 \equiv \angle BM_1A_1$, $\angle BMA = \angle BM_1A_1$.

Розглянемо $\triangle ABM$ і $\triangle AB_1M_1$. $BM = B_1M_1$ за умови задачі. Так само, за умови задачі, $AM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}A_1C_1 = A_1M_1$, $\angle BMA = \angle BM_1A_1$ за доведеним. Отже, $\triangle ABM = \triangle AB_1M_1$ за першою ознакою рівності трикутників, за двома сторонами та кутом між ними. Але тоді $AB = A_1B_1$ як сторони рівних трикутників, що лежать проти рівних кутів, $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$ як кути рівних трикутників, що лежать проти рівних сторін.

Із умови задачі випливає, що промінь AM є однаково напрямленим до променя AC , промінь A_1M_1 є однаково напрямленим до променя A_1C_1 . Це означає, що $\angle BAM \equiv \angle BAC$, $\angle B_1A_1M_1 \equiv \angle B_1A_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Але тоді, для трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ – за доведеним, $AC = A_1C_1$ – за умовою. Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників, за двома сторонами та кутом між ними, що й треба було довести.

2. Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $A_1B_1 = B_1C_1$, $BH \perp AC$, $H \in AC$, $B_1H_1 \perp A_1C_1$, $H_1 \in A_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $BH = B_1H_1$ (рис. 3.10).

Довести: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доведення. Розглянемо $\triangle ABH$ і $\triangle A_1B_1H_1$. Згідно умови задачі, обидва трикутника є прямокутними, відповідно, з катетами BH і B_1H_1 , AH і A_1H_1 . За умови задачі $BH = B_1H_1$, задані трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ є рівнобедреними. За відомою властивістю рівнобедреного трикутника, висота, проведена до його основи, є й його медіаною. Отже, $AH = HC$, $A_1H_1 = H_1C_1$.

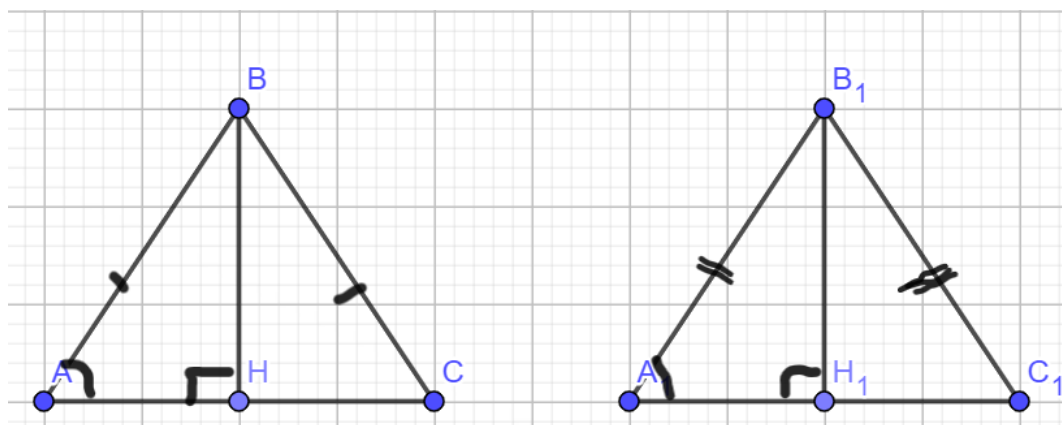


Рис. 3.10.

Але тоді $AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}A_1C_1 = A_1H_1$, $\triangle ABH = \triangle A_1B_1H_1$ за двома катетами.

Звідси випливає, що $\angle BAN = \angle B_1A_1H_1$ - лежать у рівних прямокутних трикутниках проти рівних катетів, $AB = A_1B_1$ як гіпотенузи рівних прямокутних трикутників.

Промені AH і AC , A_1H_1 і A_1C_1 , відповідно, є однаково напрямленими. Це означає, що $\angle BAN \equiv \angle BAC$, $\angle B_1A_1H_1 \equiv \angle B_1A_1C_1$. Але тоді $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників, за двома сторонами та кутом між ними ($AB = A_1B_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ - за доведеним, $AC = A_1C_1$ - за умови).

Лише тепер задачу 3.2 повністю розв'язано.

Зауваження. Обраний спосіб розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки вважається тим більш раціональним, чим меншу кількість разів застосування аксіом теорії побудов, і, відповідно, кроків реальних практичних дій за допомогою циркуля і лінійки під час ілюстрування теоретичних побудов, він вимагає. Виходячи з подібних міркувань, задачу на побудову рівнобедреного трикутника за основою та проведеною до цієї основи висотою доцільніше було би розв'язувати методом геометричних місць точок. Про цей метод та особливості його застосування мова буде йти у наступному параграфі.

Задача 3.3. Побудувати ромб за його висотою та діагоналлю.

Дано: відрізки P_1Q_1 і P_2Q_2 (рис. 3.11).

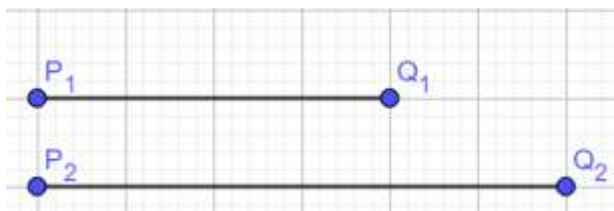


Рис. 3.11.

Побудувати: $ABCD$, $AB = DC = CD = AD$, $AC = P_2Q_2$, $AH \perp BC$, $H \in BC$, $AH = P_1Q_1$.

Розв'язання. I. Аналіз. Припустимо, побудовано ромб $ABCD$, ($AB = DC = CD = AD$), у якого $AC = P_2Q_2$, $AH \perp BC$, ($H \in BC$), $AH = P_1Q_1$ (рис. 3.12).

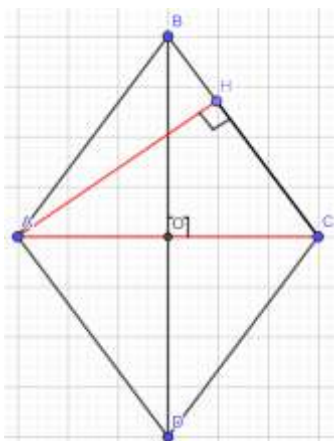


Рис. 3.12.

Прямокутний трикутник AHC можна побудувати за катетом і гіпотенузою на підставі вихідних даних задачі. Таким чином будуть побудовані протилежні вершини A і C шуканого ромба. Вершина B ромба є точкою перетину прямої HC і серединного перпендикуляру до відрізка AC (діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом і діляться точкою перетину навпіл). Вершина D є симетричною до вершини B відносно середини O діагоналі AC .

II. Побудова. 1. Як зазвичай, відрізки, задані умовою задачі, вважаються побудованими. Перейменуємо точку P_2 на точку A , точку Q_2 - на точку C .

2. Будуємо серединний перпендикуляр l до відрізка AC і, за допомогою нього, середину O відрізка AC .
3. Будуємо прямокутний трикутник AHC з гіпотенузою $AC (\equiv P_2Q_2)$ і катетом AH , $AH = P_1Q_1$.
4. Будуємо точку B як точку перетину серединного перпендикуляра l з прямою HC .
5. На промені, доповняльному до променя OB , відкладаємо відрізок OD , який дорівнює відрізку OB .
6. Будуємо чотирикутник $ABCD$ (рис. 3.13).

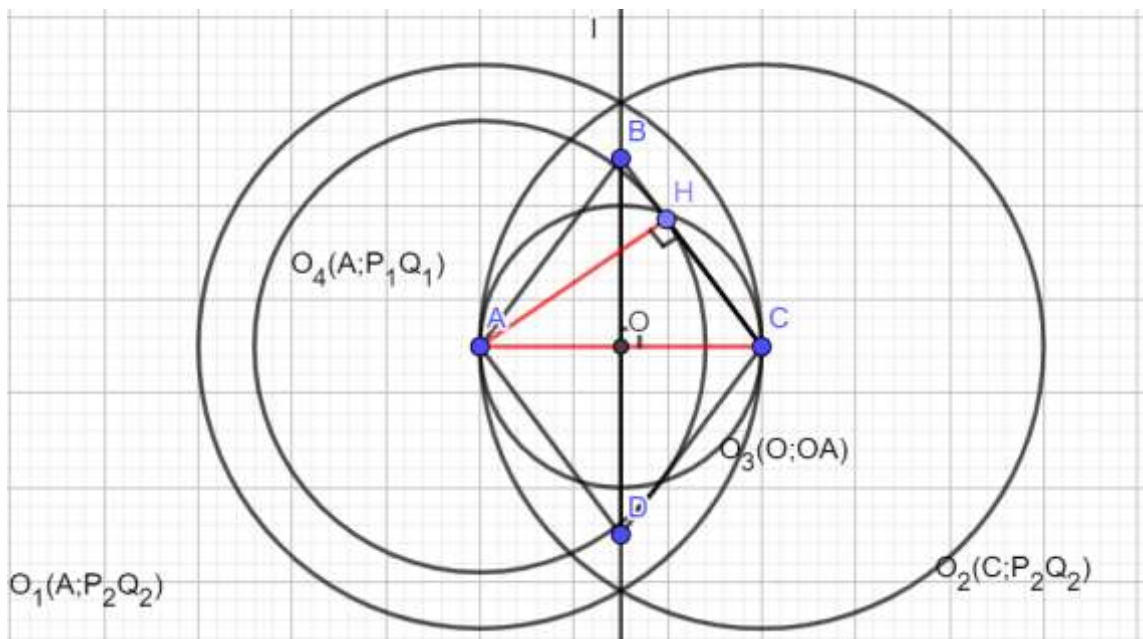


Рис. 3.13.

III. Доведення. Розглянемо побудований чотирикутник $ABCD$. Згідно другого, четвертого та п'ятого кроків побудов, його діагоналі перетинаються, є взаємно перпендикулярними, кожна з них точкою перетину ділиться навпіл. Отже, це ромб. Згідно першого кроку побудов, діагональ AC дорівнює заданому відрізку P_2Q_2 , безпосередньо співпадає з ним. Згідно третього кроку побудов, $AH \perp HC$, $AH = P_1Q_1$. Згідно четвертого кроку побудов, пряма HC співпадає з прямою BC , отже, відрізок AH є висотою даного ромба. У підсумку, чотирикутник $ABCD$ є саме тим ромбом, який треба було побудувати.

IV. Дослідження. Проведені побудови вказують на те, що задачу завжди можна розв'язати тим способом, який ми обрали, якщо можна побудувати прямокутний $\triangle AHC$ з гіпотенузою AC , $AC = P_2Q_2$ і катетом AH , $AH = P_1Q_1$. Дійсно, серединний перпендикуляр l до сторони AC можна побудувати завжди, кут $\angle ACH$, як не прямий кут прямокутного трикутника AHC є гострим, отже, прямі l і CH не є паралельними (інакше, сума внутрішніх односторонніх кутів при перетині цих прямих січною AC складала би 180° , а у нашому випадку – це не так), перетинаються саме пряма l і промінь CH , точку B завжди можна визначити як точку їхнього перетину, точку D , як точку, симетричну до точки B відносно середини O відрізка AC , можна побудувати завжди.

З іншого боку, якщо ромб $ABCD$ існує, то існує й його висота AH , проведена з точки A до сторони BC , діагональ AC не може бути меншою за відрізок AH , бо саме довжина відрізка AH ($AH \perp BC$) визначає найменшу відстань від точки A до точок прямої BC . Варіант $AH = AC$ також є неможливим, бо тоді кут BCD ромба, як подвоєний кут ACB , склав би 180° . Отже, задача має розв'язок тоді та тільки тоді, коли задані відрізки P_1Q_1 і P_2Q_2 задовольняють умову $P_1Q_1 < P_2Q_2$ (необхідна й достатня умови існування прямокутного трикутника AHC).

За умови справедливості зазначеної нерівності, під час розв'язування даної задачі, для неї було отримано єдиний розв'язок. Покажемо, що по-іншому й бути не може, бо всі ромби які мають однакові діагоналі й однакові висоти, є рівними між собою. Дійсно, розглянемо ромби $ABCD$ та $A_1B_1C_1D_1$ ($AB = BC = CD = AD$, $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = A_1D_1$), для яких $AC = A_1C_1$, $AH \perp BC$, $H \in BC$, $AH_1 \perp B_1C_1$, $H_1 \in B_1C_1$, $AH = AH_1$ (рис. 3.14). У цьому випадку $\triangle AHC = \triangle A_1H_1C_1$ як прямокутні трикутники, що мають, відповідно, однакові катети і гіпотенузи. Але тоді $\angle HCA = \angle H_1C_1A_1$ як гострі

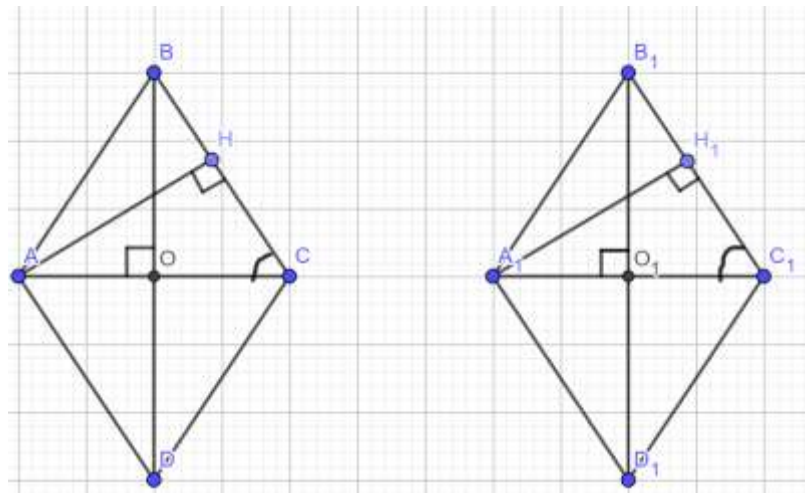


Рис. 3.14.

кути рівних прямокутних трикутників, що лежать проти рівних катетів. Вершина B ромба $ABCD$ належить променю CH , а не доповняльному до нього променю прямої BC , бо для ромба $\angle ACB$ не може бути прямим або тупим (його подвоєна градусна міра повинна бути меншою за 180°). Так само, вершина B_1 ромба $A_1B_1C_1D_1$ належить променю C_1H_1 . Звідси випливає, що $\angle ACB \equiv \angle ACH$, $\angle A_1C_1B_1 \equiv \angle A_1C_1H_1$, $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$. Але тоді $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ як рівнобедрені трикутники, відповідно, з основами AC та A_1C_1 , за основою ($AC = A_1C_1$) та кутом при основі ($\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$) – зрозуміло, що, у даному випадку $\angle BAC = \angle ACB = \angle A_1C_1B_1 = \angle B_1A_1C_1$ і виконано умови другої ознаки рівності трикутників.

Якщо далі проводити міркування так, щоб вони були доступними для учнів закладів загальної середньої освіти, то тут, натепер, виникають певні проблеми. На рівні змістового наповнення курсів геометрії сьомого та восьмого класів, дві геометричні фігури називаються рівними, якщо вони суміщаються накладанням. При цьому загальні властивості накладань не сформульовані, ознак рівності чотирикутників, зокрема, паралелограмів, ромбів, немає... Отже, як обґрунтувати рівність ромбів, не дуже зрозуміло. Будемо спиратися на те, що у курсі геометрії дев'ятого класу вводиться поняття про рух евклідової площини, рух геометричної фігури евклідової площини. Теоретично, при цьому треба принаймні пояснювати, якщо не

обґрунтовувати, що рух і накладання – це теж саме, дві фігури евклідової площини є рівними тоді та тільки тоді, коли існує рух евклідової площини, який переводить одну з них у іншу.

У підсумку, ми обґрунтували, що трикутник ABC дорівнює трикутнику $A_1B_1C_1$. Виходячи з наведених вище міркувань, це означає існування такого руху f евклідової площини, для якого $f(A)=A_1$, $f(B)=B_1$, $f(C)=C_1$.

Кожний рух евклідової площини переводить пряму – у пряму, відрізок – у рівний до нього відрізок, середину відрізка – у середину відрізка-образа. Отже,

$f(O)=O_1$, образом прямої BO при русі f є пряма B_1O_1 , в силу того, що

точка D лежить на прямій BO , $f(D)=D_2$, де точка D_2 належить прямій

B_1O_1 , розташована на цій прямій так, що точка O_1 є серединою відрізка B_1D_2 ,

$O_1D_2=O_1B_1$. Але у нас, в силу того, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ є ромбом,

точка D_1 розташована на прямій B_1O_1 так, що точка O_1 є серединою

відрізка B_1D_1 , $O_1B_1=O_1D_1$. Отже, $O_1D_1=O_1D_2$, обидві точки D_1 і D_2

належать променю, доповняльному до променю O_1B_1 . Але, згідно

відповідного твердження евклідової планіметрії, яке у більшості підручників з геометрії для закладів загальної середньої освіти приймають за аксіому, на

кожному промені, від його початку, «можна відкласти» один та лише один

відрізок, що дорівнює даному. Звідси випливає, що точки D_1 та D_2

співпадають, $f(D)=D_1$. Останнє означає, що знайдено рух f який

переводить кожну вершину ромба $ABCD$ у відповідну вершину ромба

$A_1B_1C_1D_1$ і, в силу цього, увесь ромб $ABCD$ у ромб $A_1B_1C_1D_1$. Останнє

означає, що ромби $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ є рівними, що й варто було

обґрунтувати. Отже, якщо для вихідних даних даної задачі на побудову

виконано умову $P_1Q_1 \geq P_2Q_2$, задача не має розв'язків. У супротивному

випадку, тобто, коли $P_1Q_1 < P_2Q_2$, задача має єдиний розв'язок, який можна знайти тим способом, який ми обрали.

Питання та завдання для самоконтролю до §3

1. Під час реалізації якого етапу розв'язування задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки обирають доцільний метод її розв'язування?
2. У чому полягає сутність методу допоміжного трикутника розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки?
3. Що склало передумови для виділення методу допоміжного трикутника у якості окремого методу розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки?
4. Які методи розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки для закладів загальної середньої освіти вважаються основними?

Задачі для самостійного розв'язання до §3

- 3.1. Побудувати трикутник за двома сторонами та висотою, проведеною до однієї з них.
- 3.2. Побудувати трикутник за кутом, висотою та бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.
- 3.3. Побудувати трикутник за стороною, проведеною до неї медіаною та висотою, проведеною до іншої сторони.
- 3.4. Побудувати трикутник за стороною, протилежним кутом і висотою, проведеною до однієї з двох інших сторін.
- 3.5. Побудувати трикутник за стороною, проведеною до неї висотою та медіаною, проведеною до однієї з двох інших сторін.
- 3.6. Побудувати трикутник ABC за його висотою BK і радіусами кіл, описаних навколо трикутників ABK і CBK .
- 3.7. Побудувати трикутник ABC за його висотою, проведеною до сторони AB , і двома відрізками, що сполучають точку C з точками, що поділяють сторону AB на три однакові частини.

3.8. Побудувати трикутник за стороною та відрізками, що сполучають кінці цієї сторони з центром вписаного кола.

3.9. Побудувати трикутник за його стороною, прилеглим кутом та висотою, проведеною до цієї сторони.

3.10. Побудувати трикутник ABC за стороною AB , висотою, проведеною до сторони BC , і медіаною, проведеною до сторони AC .

3.11. Побудувати трикутник за його кутом, бісектрисою цього кута і висотою, проведеною з вершини іншого кута.

3.12. Побудувати трикутник за двома висотами і кутом, з вершини якого проведено одну з них.

3.13. Побудувати трикутник за стороною і висотами, проведеними до двох інших сторін.

3.14. Побудувати трикутник за стороною і висотами, одну з яких проведено до даної сторони.

3.15. Побудувати трикутник за кутом і висотами, проведеними з вершин двох інших кутів.

3.16. Побудувати трикутник за радіусом вписаного кола і відрізками, на які точка дотику вписаного кола ділить одну із сторін.

3.17. Побудувати трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і сумою двох інших сторін.

3.18. Побудувати трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і різницею двох інших сторін.

3.19. Побудувати трикутник за периметром і двома кутами.

3.20. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і сумою іншого катету і гіпотенузи.

3.21. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і різницею катетів.

3.22. Побудувати рівнобедрений трикутник за бічною стороною та проведеною до неї медіаною.

3.23. Побудувати рівнобедрений трикутник за бічною стороною та кутом, прилеглим до основи.

3.24. Побудувати рівносторонній трикутник за радіусом його вписаного кола.

3.25. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і радіусом вписаного кола.

3.26. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і медіаною, проведеною до одного з катетів.

3.27. Побудувати трикутник так, щоб середини його сторін були у трьох заданих точках.

3.28. Побудувати трикутник, якщо задано три точки, у яких вписане коло дотикається до його сторін.

3.29. Побудувати паралелограм за його сторонами та висотою.

3.30. Побудувати трапецію $ABCD$ за її бічною стороною CD , відстанню між її основами та середньою лінією.

§4. Задачі на побудову дотичної до кола, спільних дотичних до двох кіл за допомогою циркуля і лінійки

Серед задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки окремої уваги щодо свого розв'язання вимагають задачі на побудову дотичної до кола, спільних дотичних до двох кіл.

Згідно переважної більшості підручників з планіметрії сьогодення, **пряму називають дотичною до кола, якщо вона має з колом єдину спільну точку.** (Зрозуміло, що таке означення має місце виключно у межах планіметрії: пряма та коло належать одній площині). Одночасно, як правило, доводять теорему про те, що **пряма є дотичною до кола тоді та тільки тоді, коли вона має з колом спільну точку і проходить перпендикулярно до радіусу, проведеного у цю точку** (рис. 4.1).

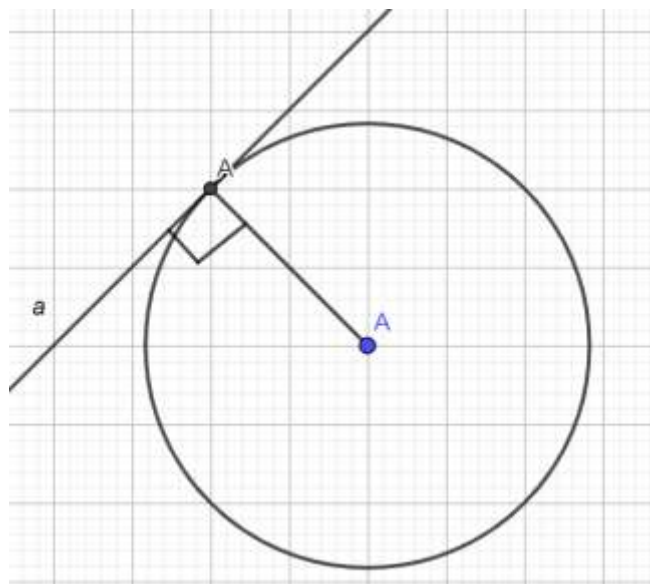


Рис. 4.1.

Справедливість даної теореми дозволяє обґрунтувати той факт, що у евклідовій планіметрії через кожну точку кожного кола до цього кола проходить дотична і лише тільки одна, а також визначити шлях побудови подібної дотичної за допомогою циркуля і лінійки.

Відповідну задачу на побудову вказано під номером 8 як одну із задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки першого рівня складності. Як було відзначено у §2, у межах відповідного курсу для майбутніх учителів математики закладів загальної середньої освіти, розв'язування такої задачі

можна проводити без реалізації етапу аналізу, але треба вміти описувати процес побудови безпосередньо за аксіомами обраної аксіоматики теорії побудов.

Отже, розглянемо розв'язання **задачі 8**. Так само, як і для інших задач першого рівня складності, під час описання процесу її розв'язання, при позначенні відрізків та променів будемо, відповідно, використовувати квадратні та квадратні й круглі дужки.

Дано: коло Q з центром у точці O . (Якщо у задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки задано коло, то, за загальною домовленістю, вважають, що, одночасно, задано і центр цього кола. По-перше, це є цілком природним з точки зору курсів геометрії закладів загальної середньої освіти, бо, коли ми зображаємо «фізичне» коло за допомогою реального циркуля, центр кола є визначеним положенням ніжки циркуля. По-друге, якщо центр кола не задано, то його завжди можна побудувати згідно розв'язку задачі під номером 5 із переліку задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки першого рівня складності). Точка A , $A \in Q$ (рис. 4.2).

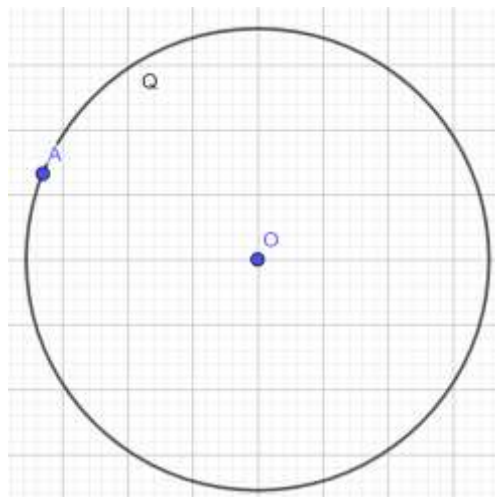


Рис. 4.2.

Побудувати: пряму, яка дотикається кола Q у точці A .

Розв'язання. II. Побудова. 1. Згідно аксіоми β_2 , коло Q з центром у точці O і точка A , $A \in Q$, вважаються побудованими, .

2. Згідно аксіоми β_l , можна вважати побудованим промінь $[OA)$.

3. Згідно аксіоми β_{λ} , можна вважати побудованим промінь $[AO)$.

4. Згідно аксіоми β_4 , побудованим є відрізок $[AO]$,

$$[AO] = [AO) \cap [OA).$$

5. Згідно аксіоми β_u , можна вважати побудованим коло Q_1 з центром у точці A радіусу $[AO]$.

6. Згідно аксіоми β_4 , можна вважати побудованою точку B ,
 $B \in Q_1 \cap [OA)$.

7. Згідно аксіоми β_{λ} , можна вважати побудованим промінь $[BO)$.

8. Згідно аксіоми β_4 , можна вважати побудованим відрізок $[BO]$,

$$[BO] = [BO) \cap [OA).$$

9. Згідно аксіоми β_u , побудованим можна вважати коло Q_2 з центром у точці B радіусу $[BO]$.

10. Згідно аксіоми β_u , побудованим можна вважати коло Q_3 з центром у точці O радіусу $[BO]$.

11. Згідно аксіоми β_4 , побудованими можна вважати точки P і T ,

$$\{P, T\} = Q_2 \cap Q_3.$$

12. Згідно аксіоми β_{λ} , побудованим можна вважати промінь $[PA)$.

13. Згідно аксіоми β_{λ} , побудованим можна вважати промінь $[AP)$.

14. Згідно аксіоми β_3 , побудованою можна вважати пряму AP ,

$$AP = [PA) \cup [AP). \text{ Пряма } AP \text{ буде шуканою (рис. 4.3).}$$

IV. Дослідження. Ретельний аналіз проведених побудов дозволяє зробити висновок про те, що задачу завжди можна розв'язати тим способом, який ми обрали (кроки побудов (4), (8) та (11) є виконаними завжди). Отже, задача має розв'язок за будь-якого варіанту обрання вихідних даних. Задача завжди має єдиний розв'язок тому, що у евклідовій геометрії через кожну точку кола до даного кола проходить єдина дотична.

Розглянемо тепер **задачу** на побудову першого рівня складності **за номером 9: через задану точку, що знаходиться у зовнішній відносно заданого кола області, провести до заданого кола дотичну.**

Під час описання процесу її розв'язання, так само, при позначенні відрізків та променів будемо, відповідно, використовувати квадратні та квадратні й круглі дужки.

Дано: коло Q з центром у точці O . Точка A , про яку відомо, що довжина відрізка OA є більшою за радіус даного кола (рис. 4.4).

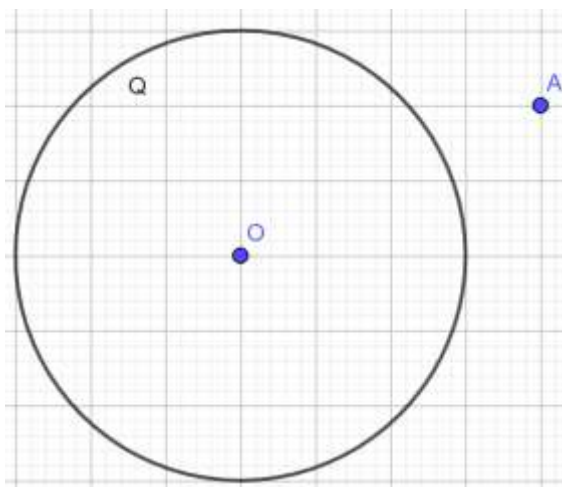


Рис. 4.4.

Побудувати: пряму, яка проходить через точку A і дотикається кола Q .

Наведемо, спочатку, стандартний розв'язок даної задачі без застосування етапу аналізу.

Розв'язання. II. Побудова. 1. Згідно аксіоми β_2 , задане коло Q з центром у точці O і точка A , що знаходиться у зовнішній відносно даного кола області, є побудованими.

2. Згідно аксіоми β_l , побудованим є промінь $[AO)$.

3. Згідно аксіоми β_l , побудованим є промінь $[OA)$.

4. Згідно аксіоми β_4 , побудованим є відрізок $[OA]$,

$$[OA] = [AO) \cap [OA).$$

5. Згідно аксіоми β_u , побудованим є коло Q_1 з центром у точці O радіусу $[OA]$.

6. Згідно аксіоми β_u , побудованим є коло Q_2 з центром у точці A радіусу $[OA]$.

7. Згідно аксіоми β_4 , побудованими є такі точки P і T , що

$$\{P, T\} = Q_1 \cap Q_2.$$

8. Згідно аксіоми β_l , побудованим є промінь $[PT)$.

9. Згідно аксіоми β_4 , побудованою є точка B , $B = [PT) \cap [OA)$.

10. Згідно аксіоми β_l , побудованим є промінь $[BO)$.

11. Згідно аксіоми β_4 , побудованим є відрізок $[OB]$,

$$[OB] = [BO) \cap [OA).$$

12. Згідно аксіоми β_u , побудованим є коло Q_3 радіусу $[OB]$ з центром у точці B .

13. Згідно аксіоми β_4 , побудованими є такі точки M і N , що

$$\{M; N\} = Q \cap Q_3.$$

14. Згідно аксіоми β_l , побудованими є промені $[AM)$, $[MA)$, $[AN)$ та $[NA)$.

15. Згідно аксіоми β_3 , побудованими є прямі AM і AN , $AM = [AM) \cap [MA)$, $AN = [AN) \cap [NA)$. Прямі AM і AN є шуканими дотичними (рис. 4.5).

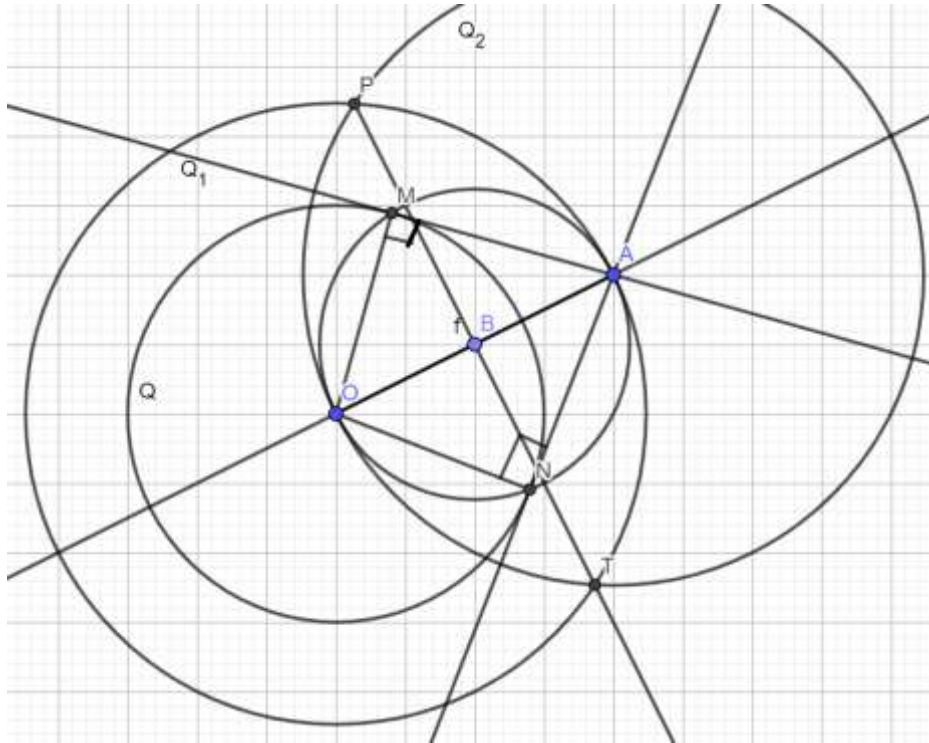


Рис. 4.5.

III. Доведення. Згідно сьомого кроку побудов, точки P і T є точками перетину двох кіл однакових радіусів (за п'ятим і шостим кроками побудов). Це означає, що $OP = PA = AT = TO$, чотирикутник $OPAT$ є ромбом з діагоналями OA і PT . Але відрізок $[PT]$ є підмножиною променю $[PT)$, який, згідно дев'ятого кроку побудов, перетинає відрізок $[OA]$ у точці B . Отже, саме точка B є точкою перетину діагоналей OA і PT ромба $OPAT$. Обидві діагоналі ромба своєю точкою перетину діляться навпіл. Отже, $OB = OA$, виходячи із дванадцятого кроку побудов, коло Q_3 проходить через точку A , відрізок $[AB]$ є діаметром кола Q_3 . Згідно тринадцятого кроку

побудов, точки M і N є двома точками перетину кіл Q і Q_3 . Отже, ці точки не належать прямій OA , що проходить через центри цих кіл, $\angle OMA$ і $\angle ONA$ є кутами, вписаними у коло Q_3 , які спираються на його діаметр. Звідси випливає, що $\angle OMA = \angle ONA = 90^\circ$, $OM \perp MA$, $ON \perp NA$, прямі AM і AN проходять, відповідно, через точки M і N заданого кола Q перпендикулярно до радіусів, проведених у ці точки. Згідно сформульованого вище критерію дотичної до кола, останнє означає, що побудовані прямі AM і AN є тими дотичними до заданого кола Q , які проходять через точку A , відповідними точками дотику є точки M і N . Отже, прямі AM і AN є саме тими прямими, які й треба було побудувати.

IV. Дослідження. Проаналізуємо проведену побудову з приводу того, чи за будь-якого варіанту обрання вихідних даних задачу можна розв'язати тим способом, який ми обрали. Зрозуміло, що кроки побудов (1) – (6) можна виконати завжди (у тому числі й крок (4), бо, за умови задачі, точка A знаходиться у зовнішній відносно кола Q області і, в силу цього, не може співпадати з його центром). На сьомому кроці побудов визначаються дві точки перетину кіл Q_1 і Q_2 . Кола Q_1 і Q_2 мають однакові радіуси, які дорівнюють відстані OA між їхніми центрами. Отже, вірною є подвійна нерівність $|OA - OA| < OA < OA + OA$, для кіл Q_1 і Q_2 існують точно дві точки перетину, сьомий крок побудов також є виконаним за будь-якого варіанту обрання вихідних даних, чотирикутник $OPAT$ існує, згідно доведення, він є ромбом з діагоналями OA і PT . Діагоналі кожного ромба перетинаються і діляться точкою перетину навпіл, в силу цього, точка B , як точка перетину відрізків $[OA]$ і $[PT]$, існує, вона ж є і точкою перетину променю $[PT)$, який можна побудувати завжди, з відрізком $[OA]$, дев'ятий крок побудов є виконаним завжди. Десятий крок побудов є виконаним завжди. Як середина

відрізка $[OA]$, точка B не співпадає з точкою O , одинадцятий крок побудов є виконаним завжди. Тоді завжди виконаним є й дванадцятий крок побудов.

Розглянемо кола Q і Q_3 . Відстань OB між їх центрами дорівнює радіусу кола Q_3 , згідно умови задачі, радіус r кола Q є меншим за відстань OA , яка дорівнює $2OB$. Отже, по-перше, правильною є нерівність $OB < r + OB$. По-друге, можливими є два випадки: а) $r < OB$, б) $OB \leq r < 2OB$. У випадку (а), $|r - OB| = OB - r < OB$. У випадку (б), $|r - OB| = r - OB$, в силу справедливості нерівності $r < 2OB$ правильною є нерівність $r - OB < OB$. У підсумку, завжди правильною є подвійна нерівність $|r - OB| < OB < r + OB$, за будь-якого варіанта обрання вихідних даних кола Q і Q_3 перетинаються у двох точках.

Кроки побудов (14) і (15) є виконаними завжди.

У підсумку, ми обґрунтували, що дану задачу за будь-якого варіанта обрання вихідних даних можна розв'язати тим способом, який ми обрали, вона має принаймні два розв'язки. Одночасно, більш ніж два розв'язки дана задача мати не може тому, що у евклідовій геометрії через точку, що знаходиться у зовнішній відносно даного кола області, до даного кола проходять точно дві дотичні прямі. (Останній факт, між іншим, обґрунтовується тим, що, якщо мова йде про дотичні, проведені до кола з центром у точці O через таку точку A , що відстань OA є більшою за радіус даного кола, то точки дотику є спільними точками даного кола і кола з діаметром OA ; як тільки-но було обґрунтовано, таких точок існує точно дві).

Отже, результатом дослідження є висновок про те, що задача №9 за будь-якого варіанту обрання вихідних даних має два розв'язки.

Як вже було підкреслено раніше, розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки вважається тим більш раціональним, чим меншу кількість відповідних кроків побудов воно вимагає. Одним з найбільш

раціональних способів побудови дотичних до кола, які проходять через задану точку у зовнішній області даного кола, вважають наступний. Опишемо його стисло.

Через задану точку A (що знаходиться у зовнішній відносно заданого кола області) проведемо до заданого кола три січні: a_1, a_2, a_3 (рис. 4.6).

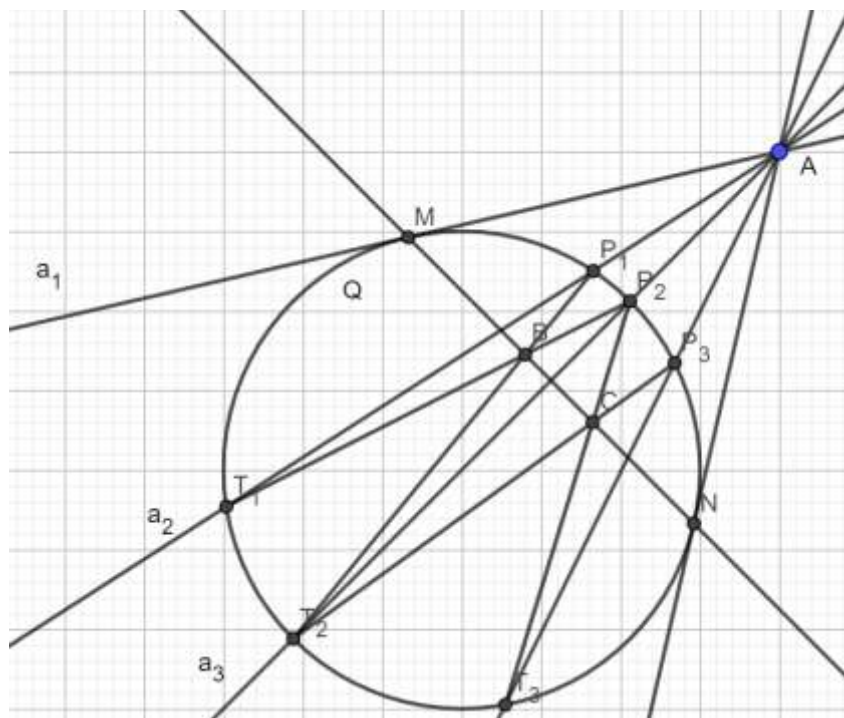


Рис. 4.6.

Нехай січна a_1 перетинає задане коло Q у точках P_1, T_1 ($AP_1 < AT_1$), січна a_2 перетинає коло Q у точках P_2, T_2 ($AP_2 < AT_2$), січна a_3 перетинає коло Q у точках P_3, T_3 ($AP_3 < AT_3$), точка B є точкою перетину відрізків T_1P_2 і T_2P_1 , точка C - точкою перетину відрізків T_2P_3 і T_3P_2 , пряма BC перетинає коло Q у точках M і N . Можна довести, що прямі AM і AN є дотичними до кола Q , які проведено через точку A , M і N - відповідні точки дотику. Це можна довести, але, виходячи із змістового наповнення курсів математики закладів загальної середньої освіти, достатньо важко довести. З відповідним доведенням можна ознайомитися, наприклад, за [26]. Варто також зауважити, що вказаний спосіб побудови передбачає використання виключно лінійки, взагалі не передбачає використання циркуля.

Розглянемо тепер задачу побудови за допомогою циркуля і лінійки спільної дотичної до двох кіл. Зрозуміло, що при цьому для двох заданих кіл треба розглянути різні можливі варіанти взаємного розташування. Подібні задачі вже не є задачами на побудову за допомогою циркуля і лінійки першого рівня складності. Етап аналізу для них вважається доцільною складовою розв'язання. Реалізацію етапу побудови вже можна описувати у скороченому вигляді, застосовуючи комплексні посилання на відповідні задачі першого рівня складності.

Детально розглянемо той випадок, коли задані кола мають різні радіуси, наприклад, коло Q_1 з центром у точці O_1 має радіус r_1 , коло Q_2 з центром у точці O_2 має радіус r_2 , $r_1 > r_2$, одне коло розташоване у зовнішній області іншого ($O_1O_2 > r_1 + r_2$).

Дано: коло Q_1 радіусу r_1 з центром у точці O_1 ; коло Q_2 радіусу r_2 з центром у точці O_2 , $r_1 > r_2$, $O_1O_2 > r_1 + r_2$ (рис. 4.7).

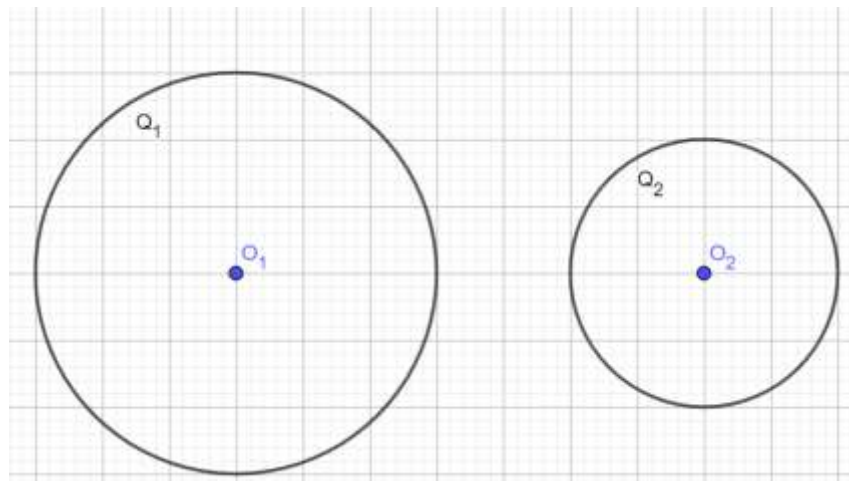


Рис. 4.7.

Побудувати: спільну дотичну до кіл Q_1 і Q_2 .

Розв'язання. І. Аналіз. Відомо, що у випадку визначеного умовою задачі характеру взаємного розташування заданих кіл, кола Q_1 і Q_2 мають чотири спільні дотичні: дві зовнішні та дві внутрішні. Дотичні кожної пари є симетричними одна до одної відносно лінії центрів заданих кіл – прямої O_1O_2 .

Припустимо, пряма a є спільною зовнішньою дотичною до кіл Q_1 і Q_2 - відповідні точки дотику A_1 і A_2 розташовані по одну сторону відносно прямої O_1O_2 (рис. 4.8).

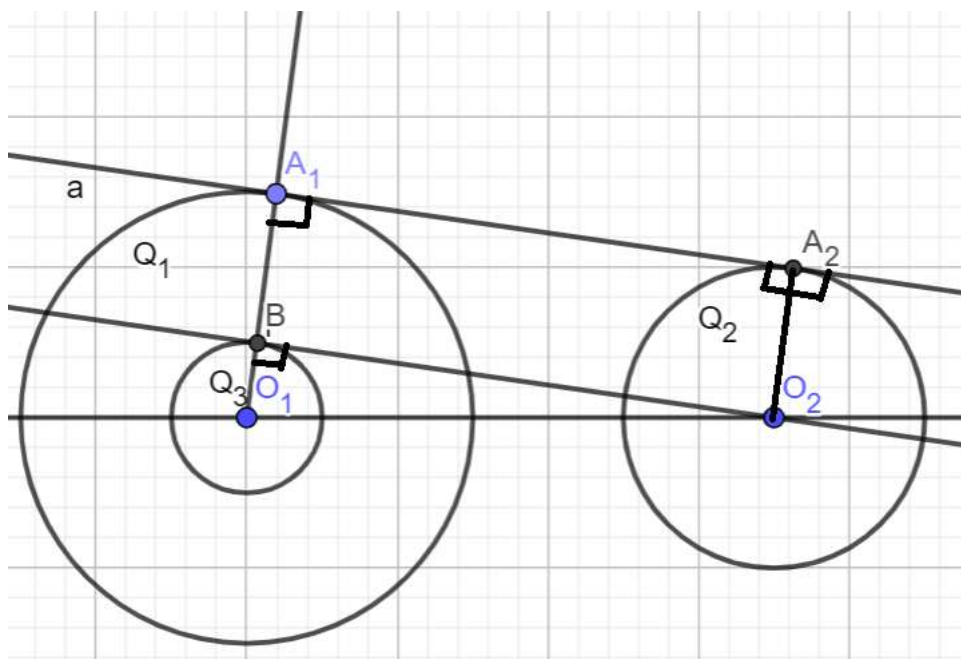


Рис. 4.8.

Проведемо радіуси O_1A_1 і O_2A_2 . $O_1A_1 \perp a$, $O_2A_2 \perp a$, отже, $O_1A_1 \parallel O_2A_2$. Промені O_1A_1 і O_2A_2 є однаково напрямленими. Обидва радіуси O_1A_1 і O_2A_2 знаходяться у одній півплощині відносно прямої O_1O_2 , $O_1A_1 > O_2A_2$. Проведемо пряму O_2B , $O_2B \parallel A_1A_2$ до перетину з променем O_1A_1 у точці B . На прямій O_1A_1 будемо мати той варіант розташування точок O_1 , B і A_1 , що O_1-B-A_1 . $O_2B \perp O_1A_1$. Отже, чотирикутник $BA_1A_2O_2$ є прямокутником, $A_1B = A_2O_2$. Звідси випливає, що пряма O_2B у точці B дотикається кола Q_3 з центром у точці O_1 радіусу O_1B , $O_1B = O_1A_1 - O_2A_2 = r_1 - r_2$.

Коло Q_3 можна побудувати за вихідними даними задачі. Точка O_2 розташована у зовнішній області відносно кола Q_3 , бо вірною є подвійна нерівність $O_1O_2 > r_1 + r_2 > r_1 - r_2$. Згідно задачі 9 першого рівня складності, дотичну O_2B можна побудувати. Далі можна визначити точку A_1 як точку

перетину променю O_1B з колом Q_1 і точку A_2 як точку перетину променю з початком у точці O_2 , однаково напрямленого до променю O_1B , з колом Q_2 . Пряма A_1A_2 буде шуканою дотичною.

Припустимо тепер, що пряма b є спільною внутрішньою дотичною до кіл Q_1 і Q_2 - відповідні точки дотику C_1 і C_2 розташовані по різні сторони відносно прямої O_1O_2 (рис.4.9).

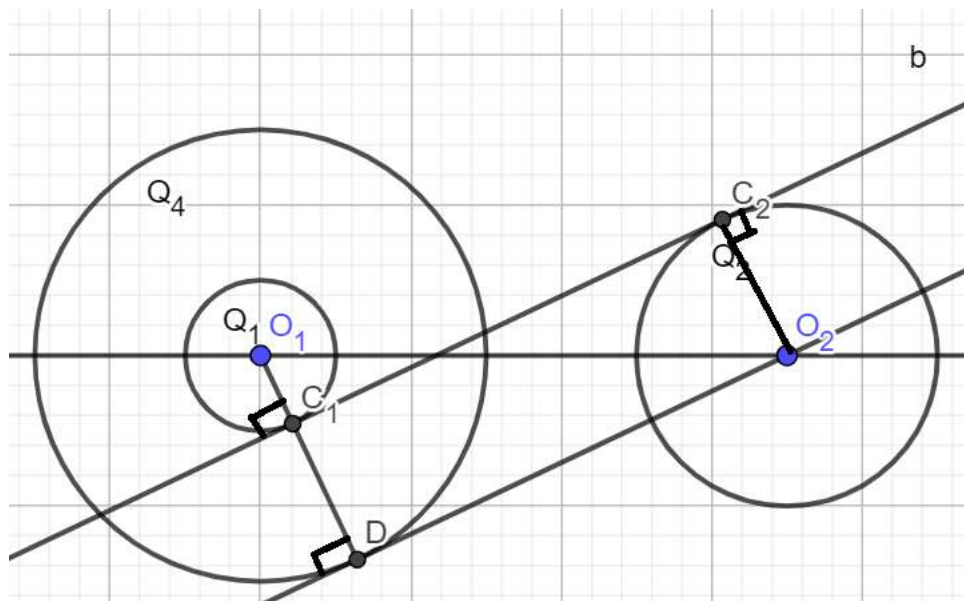


Рис. 4.9.

Проведемо радіуси O_1C_1 і O_2C_2 . $O_1C_1 \perp b$, $O_2C_2 \perp b$, отже, $O_1C_1 \parallel O_2C_2$. Промені O_1C_1 і O_2C_2 є протилежно напрямленими, обидва радіуса знаходяться у різних півплощинах відносно прямої O_1O_2 , $O_1C_1 > O_2C_2$. Паралельно до прямої C_1C_2 проведемо пряму O_2D до перетину з променем O_1C_1 у точці D . На прямій O_1C_1 будемо мати наступний варіант розташування точок O_1 , C_1 , D : $O_1 - C_1 - D$, $O_2D \perp O_1C_1$. Отже, чотирикутник $DC_1C_2O_2$ є прямокутником, $DC_2 = O_2C_2$, $\angle O_1DO_2 = 90^\circ$. Останнє означає, що пряма O_2D у точці D дотикається кола Q_4 з центром у точці O_1 радіусу O_1D , $O_1D = O_1C_1 + C_1D = O_1C_1 + O_2C_2 = r_1 + r_2$.

Коло Q_4 можна побудувати за вихідними даними задачі. Точка O_2 розташована у зовнішній відносно кола Q_4 області, бо $O_1O_2 > r_1 + r_2$, $O_1D = O_1C_1 + C_1D = O_1C_1 + O_2C_2 = r_1 + r_2$, $O_1O_2 > O_1D$. Згідно задачі №9 першого рівня складності, дотичну O_2D можна побудувати також. Далі можна визначити точку C_1 як точку перетину радіусу O_1D з колом Q_1 і точку C_2 як точку перетину променя з початком у точці O_2 , протилежно напрямленого до променя O_1D , з колом Q_2 . Пряма C_1C_2 буде шуканою дотичною.

II. Побудова.

1. Побудуємо лінію центрів заданих кіл – пряму O_1O_2 .
2. Позначимо через E одну з точок перетину кола Q_2 з прямою O_1O_2 , побудуємо відрізок O_2E , який є радіусом заданого кола Q_2 .
3. Позначимо через K одну з точок перетину кола Q_1 з прямою O_1O_2 .
4. Побудуємо коло Q_3 з центром у точці K радіусу O_2E , визначимо точки

M і N перетину даного кола з прямою O_1O_2 , відклавши таким чином відрізки KM і KN , які дорівнюють радіусу r_2 кола Q_2 , на промені KO_1 і на доповняльному до нього промені.

5. Побудуємо коло Q_4 з центром у точці O_1 радіусу O_1M .
6. Побудуємо коло Q_5 з центром у точці O_1 радіусу O_1N .
7. Побудуємо дотичні O_2B та O_2B' до кола Q_4 , дотичні O_2D та O_2D' до кола Q_5 .

8. Проведемо промінь O_1B до перетину з колом Q_1 у точці A_1 , промінь O_2A_2 , однаково напрямлений до променя O_1A_1 , до перетину з колом Q_2 у точці A_2 . Проведемо пряму A_1A_2 .

9. Проведемо промінь O_1B' до перетину з колом Q_1 у точці A'_1 , промінь $O_2A'_2$, однаково напрямлений до променю $O_1A'_1$, до перетину з колом Q_2 у точці A'_2 . Проведемо пряму $A'_1A'_2$.

10. Проведемо промінь O_1D , позначимо через C_1 точку перетину цього променю з колом Q_1 . Проведемо промінь O_2C_2 , протилежно напрямлений до променю O_1D , до перетину з колом Q_2 у точці C_2 . Побудуємо пряму C_1C_2 .

11. Проведемо промінь O_1D' , позначимо через C'_1 точку перетину цього променю з колом Q_1 . Проведемо промінь $O_2C'_2$, протилежно напрямлений до променю O_1D' , до перетину з колом Q_2 у точці C'_2 . Побудуємо пряму $C'_1C'_2$.

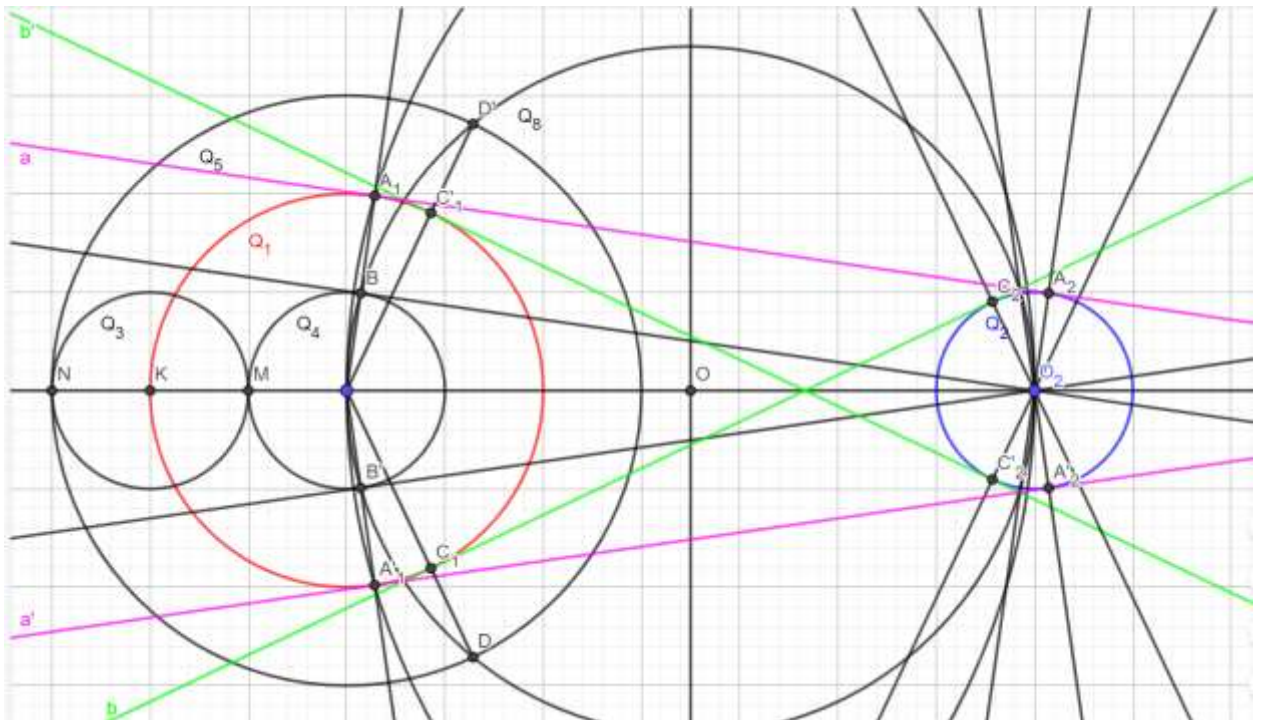


Рис. 4.10.

Прямі $A_1A_2, A'_1A'_2, C_1C_2, C'_1C'_2$ є тими спільними дотичними до кіл Q_1 і Q_2 , які треба було побудувати.

III. Доведення. На підставі здійснених етапів побудов треба обґрунтувати, що побудовані прямі A_1A_2 , $A'_1A'_2$, C_1C_2 і $C'_1C'_2$ насправді є спільними дотичними до заданих кіл Q_1 і Q_2 , до того ж – різними спільними дотичними (попарно не співпадають між собою).

Згідно сьомого кроку побудов, пряма O_2B є дотичною, проведеною через зовнішню точку O_2 до кола Q_4 з центром у точці O_1 . Згідно п'ятого кроку побудов, радіус Q_5 дорівнює O_1M , згідно четвертого кроку побудов, $O_1M = OK - KM = r_1 - r_2$. Точка B при цьому є точкою дотику, отже, точка B не належить прямій O_1O_2 , $O_1B = r_1 - r_2$, $\angle O_1BO_2 = 90^\circ$. Згідно восьмого кроку побудов, точка A_1 належить променю O_1B , $O_1A_1 = r_1$. Отже, $O_1A_1 > O_1B$, промінь BA_1 є однаково напрямленим з променем O_1A_1 . Згідно восьмого кроку побудов, промінь O_2A_2 є однаково напрямленим з променем O_1A_1 , отже, і з променем BA_1 , маємо чотирикутник $BA_1A_2O_2$, протилежними сторонами якого є відрізки BA_1 і A_2O_2 , AA_1 і BO_2 . Промені BA_1 і O_2A_2 не можуть лежати на одній прямій, бо вони лежать на прямих O_1A_1 і O_2A_2 , які перетинають пряму O_1O_2 у різних точках O_1 і O_2 .

$BA_1 = O_1A_1 - O_1B = r_1 - (r_1 - r_2) = r_2 = O_2A_2$. $A_1B \parallel O_2A_2$ в силу однакової спрямованості променів BA_1 і O_1A_1 . Отже, чотирикутник $BA_1A_2O_2$ є паралелограмом. Але $\angle A_1BO_2 = 180^\circ - \angle O_1BO_2 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, тобто, це прямокутник, $\angle O_1A_1A_2 \equiv \angle BA_1A_2 = 90^\circ$, $\angle O_2A_2A_1 = 90^\circ$. Останнє означає, що пряма A_1A_2 є спільною дотичною до заданих кіл Q_1 і Q_2 .

Аналогічним чином доводиться, що пряма $A'_1A'_2$ також є спільною дотичною до заданих кіл Q_1 і Q_2 .

Дотична $A'_1A'_2$ не співпадає з дотичною A_1A_2 . Дійсно, якщо припустити, що дотичні співпадають, то повинні співпадати і відповідні точки дотику, бо кожна пряма, дотична до кола, має з колом єдину спільну точку, отже, тоді $A_1 \equiv A'_1$. Але точка A_1 розташована у тій півплощині відносно прямої O_1O_2 , якій належить точка B , а точка A'_1 розташована у тій півплощині відносно прямої O_1O_2 , якій належить точка B' . Згідно задачі 9 першого рівня складності, точки B і B' належать різним півплощинам відносно прямої O_1O_2 , отже, точки A_1 і A'_1 також. Отримали суперечність, яка свідчить про те, що зроблене припущення є невірним, точки A_1 і A'_1 не співпадають, пряма A_1A_2 не співпадає з прямою $A'_1A'_2$.

Згідно сьомого кроку побудов, пряма O_2D є дотичною, проведеною із зовнішньої точки O_2 до кола Q_5 з центром у точці O_1 . Згідно шостого кроку побудов, радіус кола Q_5 дорівнює відрізку O_1N , згідно четвертого кроку побудов, $O_1N = O_1K + KN = r_1 + r_2$. (За умови задачі, $O_1O_2 > r_1 + r_2$, отже, точка O_2 лежить у зовнішній відносно кола Q_5 області). Точка D при цьому є точкою дотику, згідно задачі 9 першого рівня складності, точка D не належить прямій O_1O_2 , $O_1D = r_1 + r_2$, $\angle O_1DO_2 = 90^\circ$.

Будемо, для визначеності, вважати, що точка D належить тій півплощині відносно прямої O_1O_2 , яка містить точку B' . Промінь O_1D перетинає коло Q_1 у точці C_1 . $O_1C_1 = r_1$, тобто, $O_1D > O_1C_1$, на промені O_1D точка C_1 розташована між точками O_1 і D , промінь O_1C_1 співпадає з променем O_1D .

Із прямокутного трикутника O_2O_1D , $\cos(\angle O_2O_1D) = \frac{O_1D}{O_1O_2} = \frac{r_1 + r_2}{OO}$. Із

прямокутного трикутника O_2O_1B' , $\cos(\angle O_2O_1B') = \frac{O_1B'}{O_1O_2} = \frac{r_1 - r_2}{O_1O_2}$. Отже,

для гострих кутів $\angle O_2 O_1 D$ і $\angle O_2 O_1 B'$, $\cos(\angle O_2 O_1 D) > \cos(\angle O_2 O_1 B')$. Звідси випливає, що $(\angle O_2 O_1 D) > (\angle O_2 O_1 B')$, промінь $O_1 D$ не співпадає з променем $O_1 B'$, точка C_1 не співпадає з точкою A'_1 . Згідно десятого кроку побудов, промінь $O_2 C_2$ є протилежно напрямленим до променю $O_1 D$, отже, і до променю $C_1 D$, існує чотирикутник $C_1 C_2 O_2 D$ з протилежними сторонами $C_1 D$ і $O_2 C_2$ та $C_1 C_2$ і DO_2 (промені $C_1 D$ і $O_2 C_2$ не можуть лежати на одній прямій, бо вони належать прямим $O_1 C_1$ і $O_2 C_2$, які у різних точках - O_1 і O_2 - перетинають пряму $O_1 O_2$). В силу того, що точка C_1 розташована між точками O_1 і D , $C_1 D = O_1 D - O_1 C_1 = O_1 N - OC_1 = (r_1 + r_2) - r_1$. В силу протилежної спрямованості променів $C_1 D$ і $O_2 C_2$, прямі $C_1 D$ і $O_2 C_2$ є паралельними. Отже, чотирикутник $C_1 C_2 O_2 D$ є паралелограмом. Але $\angle O_2 DC = 90^\circ$. Звідси випливає, що цей чотирикутник є прямокутником, $\angle DC_1 C_2 = \angle C_1 C_2 O_2 = 90^\circ$, $O_1 C_1 \perp C_1 C_2$, $O_2 C_2 \perp C_1 C_2$, пряма $C_1 C_2$ є спільною дотичною до кіл Q_1 і Q_2 . Дотична $C_1 C_2$ дотикається кола Q_1 у точці C_1 , що, як було попередньо обґрунтовано, не співпадає з точкою A'_1 . Звідси випливає, що дотична $C_1 C_2$ не співпадає з дотичною $A'_1 A'_2$. Одночасно, точка C_1 не може співпадати з точкою A_1 , бо ці точки розташовані по різні сторони відносно прямої $O_1 O_2$. Звідси випливає, що дотична $C_1 C_2$ не співпадає і з дотичною $A_1 A_2$.

Аналогічним чином доводиться, що пряма $C'_1 C'_2$ також є спільною дотичною до заданих кіл Q_1 і Q_2 , відмінною від дотичних $A_1 A_2$ і $A'_1 A'_2$. Одночасно, дотична $C'_1 C'_2$ не може співпадати з дотичною $C_1 C_2$, бо не можуть

співпадати точки C_1 та C'_1 дотику цих дотичних до кола Q_1 - ці точки лежать по різні сторони відносно прямої O_1O_2 . Отже, прямі AA_2 , $A'A'_2$, C_1C_2 та $C'_1C'_2$ є чотирма різними спільними дотичними до заданих кіл Q_1 і Q_2 , які й треба було побудувати.

IV. Дослідження. Ретельний аналіз процесу побудови свідчить про те, що, виходячи із заданих вихідних даних (задані кола Q_1 і Q_2 з центрами, відповідно, у точках O_1 і O_2 мають різні радіуси r_1 і r_2 , $O_1O_2 > r_1 + r_2$), дану задачу завжди можна розв'язати тим способом, який ми обрали. (Під час реалізації етапу доведення було обґрунтовано, що точка O_2 у випадку заданого умовою задачі варіанту вихідних даних знаходиться у зовнішній області кіл Q_4 і Q_5 , дотичні до яких, що проходять через цю точку, ми будуємо; кожний промінь з початком у центрі заданого кола це коло перетинає у однозначно визначеній точці.) Ми отримали чотири розв'язки. Іншої кількості розв'язків не існує, бо у евклідовій геометрії доведено, що за умови вказаного варіанту розташування кіл Q_1 і Q_2 у них існує точно чотири спільні дотичні.

Аналогічні задачі для інших можливих варіантів взаємного розташування двох заданих кіл різних радіусів, для всіх можливих варіантів взаємного розташування кіл однакових радіусів, пропонуємо розв'язати самостійно. Зауважимо, що запропонований метод розв'язання задач подібного виду не є єдиним можливим. Доцільним, також, тут представляється, наприклад, використання методу подібності. Особливості застосування методу подібності до розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки будуть розглянуті подальше.

Питання та завдання для самоконтролю до §4

1. Наведіть стандартне для евклідової планіметрії означення дотичної прямої до кола.
2. Сформулюйте критерій того, що дана пряма до даного кола є дотичною.

3. Обґрунтуйте факт існування і єдиності у евклідовій планіметрії прямої, яка дотикається заданого кола у заданій на ньому точці.
4. Як за допомогою циркуля і лінійки побудувати пряму, що дотикається заданого кола у заданій точці?
5. Обґрунтуйте, що у евклідовій планіметрії пряма, яка проходить через точку всередині кола, не може бути для даного кола дотичною прямою.
6. Обґрунтуйте, що у евклідовій планіметрії через кожну точку, яка знаходиться у зовнішній відносно даного кола області, до даного кола проходять точно дві дотичні прямі.
7. Як за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати прямі, які проходять через точку, розташовану у зовнішній відносно даного кола області і є дотичними до даного кола?
8. Які існують варіанти взаємного розташування двох кіл різних радіусів у евклідовій планіметрії?
9. Наведіть стандартне для евклідової планіметрії означення спільної дотичної до двох кіл.
10. Скільки у евклідовій планіметрії існує спільних дотичних до двох кіл різних радіусів у залежності від характеру взаємного розташування цих кіл? Як такі дотичні розташовані відносно лінії центрів даних кіл?
11. Які існують варіанти взаємного розташування двох кіл однакових радіусів у евклідовій планіметрії?
12. Скільки у евклідовій планіметрії існує спільних дотичних до двох кіл однакових радіусів у залежності від характеру взаємного розташування цих кіл? Як такі дотичні розташовані відносно лінії центрів даних кіл?

Задачі до самостійного розв'язування до §4

4.1. Два кола однакових радіусів розташовані так, що відстань між їх центрами є більшою за їх подвоєний радіус. Побудувати спільні дотичні даних кіл.

4.2. Два кола різних радіусів дотикаються одне до одного зовнішнім образом. Побудувати спільні дотичні даних кіл.

4.3. Два кола однакових радіусів дотикаються одне до одного зовнішнім образом. Побудувати спільні дотичні даних кіл.

4.4. Два кола різних радіусів перетинаються у двох точках. Побудувати спільні дотичні даних кіл.

4.5. Два кола однакових радіусів перетинаються у двох точках. Побудувати спільні дотичні даних кіл.

4.6. Два кола різних радіусів дотикаються одне до одного внутрішнім образом. Побудувати спільну дотичну даних кіл.

§5. Метод геометричних місць точок розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки

Поняття про геометричне місце точок сформувалося у геометрії ще за часів Евкліда (біля 300 років до нашої ери). Варто зауважити при цьому, що, з точки зору математики, безпосередньо вираз «геометричне місце точок» жодного сенсу не має. Має сенс лише вираз «геометричне місце точок, наділених певною визначеною властивістю». Натепер, з точки зору теорії множин, він є рівносильним до виразу «множина точок, заданих за допомогою певної характеристичної властивості».

У теорії побудов за допомогою циркуля і лінійки розглядають виключно геометричні місця точок евклідової площини. Традиційно, геометричним місцем точок евклідової площини, наділених властивістю P , називають множину тих та тільки тих точок площини, які мають властивість P (див. [1; 18; 34; 38], наприклад). Використовуючи сучасну символіку теорії множин, можна записати, що

$$GMT(P) = \{M \mid \text{точка } M \text{ має властивість } P\}$$

Теоретично, будь-яка геометрична фігура може бути представленою у вигляді геометричного місця точок, якщо визначити певну її характеристичну властивість.

Твердження про те, що та чи інша геометрична фігура утворює геометричне місце точок, наділених певною визначеною властивістю, є теоремами евклідової геометрії. З точки зору теорії геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки цікавими є лише ті з них, відповідні геометричні фігури яких допускають побудову саме за допомогою циркуля і лінійки. Це аж ніяк не будь-які геометричні місця точок взагалі. Так, наприклад, відомо, що еліпс є геометричним місцем точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок цієї площини є величиною сталою, більшою за відстань між даними фіксованими точками. І, одночасно, відомо, що еліпс, як цілісну геометричну фігуру, за вихідними даними, що складаються із двох заданих точок і відрізка, довжина якого визначає

відповідну суму відстаней, не можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки [13; 15].

У підсумку, для вдалого застосування методу геометричних місць точок до розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки, треба знати певну кількість відповідних теорем і вміти будувати визначені цими теоремами геометричні фігури за допомогою циркуля і лінійки.

Наведемо перелік основних геометричних місць точок, заданих за допомогою певних характеристичних властивостей, що розглядаються у курсах планіметрії закладів загальної середньої освіти і можуть бути використаними до розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки. Підкреслимо, що мова буде йти виключно про геометричні місця точок евклідової площини.

1. Геометричне місце точок, розташованих на певній фіксованій відстані від визначеної фіксованої точки.
2. Геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців відрізка.
3. Геометричне місце точок, розташованих у внутрішній області нерозгорнутого кута на однаковій відстані від його сторін.
4. Геометричне місце точок, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються.
5. Геометричне місце точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих.
6. Геометричне місце центрів кіл, вписаних у заданий нерозгорнутий кут.
7. Геометричне місце центрів кіл, що дотикаються кожної з двох паралельних прямих.
8. Геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до кожної з прямих, що містять сторони заданого трикутника.
9. Геометричне місце точок, розташованих на заданій відстані від заданої прямої.

10. Геометричне місце точок, що ділять навпіл паралельні відрізки з кінцями на сторонах заданого нерозгорнутого кута.
11. Геометричне місце точок, що ділять навпіл відрізки з кінцями на двох сторонах трикутника, паралельні до його третьої сторони.
12. Геометричне місце точок, що ділять у відношенні 2:3 паралельні відрізки з кінцями на сторонах заданого нерозгорнутого кута.
13. Геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін заданого нерозгорнутого кута.
14. Геометричне місце точок, відстані від яких до сторін заданого нерозгорнутого кута знаходяться у відношенні 1:2.
15. Геометричне місце точок, з яких даний відрізок «видно» під заданим нерозгорнутим кутом.
16. Геометричне місце вершин прямокутних трикутників зі спільною гіпотенузою.
17. Геометричне місце вершин трикутників, рівновеликих до заданого трикутника ABC , які мають з ним спільну сторону AC .
18. Геометричне місце ортоцентрів таких трикутників ABC , для яких сторона AC є спільною, а кут ABC має однакову міру.
19. Геометричне місце інцентрів таких трикутників ABC , для яких сторона AC є спільною, а кут ABC має однакову міру.
20. Геометричне місце центроїдів таких трикутників ABC , для яких сторона AC є спільною, а кут ABC має однакову міру.
21. Геометричне місце точок, які ділять навпіл хорди однакової довжини, проведені у заданому колі.
22. Геометричне місце точок, які ділять у відношенні 1:2 хорди однакової довжини, проведені у заданому колі.
23. Геометричне місце точок, відрізки дотичних з яких до заданого кола дорівнюють заданому відрізку.
24. Геометричне місце точок, з яких задане коло «видно» під заданим нерозгорнутим кутом.

25. Геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до двох заданих точок A і B є величиною сталою та складає a^2 , $2a^2 > AB^2$.

26. Геометричне місце вершин C трикутників ABC , для яких сторона AB є спільною, а медіана AM дорівнює стороні BC .

27. Геометричне місце вершин C трикутників ABC , для яких сторона AB є спільною, а висота CD дорівнює медіані AM .

28. Геометричне місце точок, відстані від яких до двох заданих точок A і B знаходяться у заданому відношенні $m:n$; $m, n \in R, m \neq n$.

29. Геометричне місце точок, модуль різниці квадратів відстаней від яких до заданих точок A і B є величиною сталою та складає a^2 , $a > 0$.

30. Геометричне місце точок, відрізки дотичних з яких до двох заданих кіл є рівними між собою.

Розглянемо, наприклад, геометричне місце точок під номером 2. Мається на увазі факт справедливості наступної теореми, яка, традиційно, входить до змістового наповнення курсу планіметрії сьомого класу закладів загальної середньої освіти (див., наприклад, [9; 18]).

Теорема 5.1. *Геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр до даного відрізка.*

Зрозуміло, що серединним перпендикуляром до відрізка AB називається пряма, яка проходить через середину даного відрізка перпендикулярно до прямої AB . Для кожного відрізка існує єдиний серединний перпендикуляр, який можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки – це одна із задач, віднесених до задач на побудову першого рівня складності.

Доведення сформульованої теореми 5.1, насправді, передбачає доведення справедливості двох взаємно обернених теорем.

I. Дано: відрізок AB , точку M , для якої відомо, що $MA = MB$.

Довести: точка M належить серединному перпендикуляру до відрізка AB .

Доведення. Відрізок AB однозначно визначає пряму AB . Припустимо спочатку, що точка M не належить прямій AB (рис. 5.1).

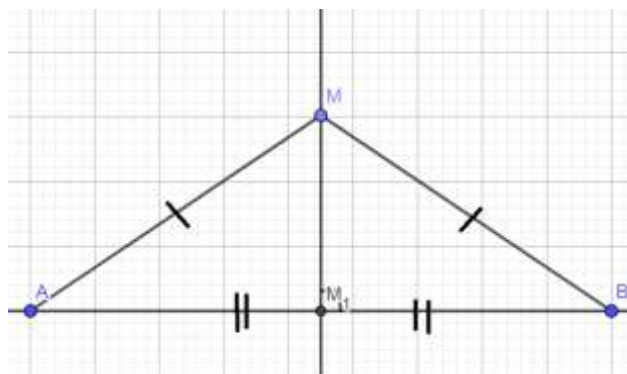


Рис. 5.1.

Тоді існує трикутник AMB . За умови теореми, $MA=MB$, отже, це рівнобедрений трикутник з основою AB . Проведемо у трикутнику AMB медіану MM_1 . Згідно означення медіани трикутника, точка M_1 є серединою відрізка AB . Згідно однієї з властивостей рівнобедреного трикутника, медіана, проведена до його основи, є і його висотою. Отже, відрізок MM_1 є перпендикуляром, проведеним з точки M до прямої AB , пряма MM_1 проходить через середину M_1 відрізка AB і є перпендикулярною до прямої AB , це серединний перпендикуляр до прямої AB , точка M йому належить.

Припустимо тепер, що точка M належить прямій AB . Зрозуміло, що, якщо $MA=MB$, то точка M не може співпадати ані з точкою A , бо тоді $MA=0$, $MB=AB$, ані з точкою B , бо тоді $MB=0$, $MA=AB$. Отже, точки A , M , B є різними точками прямої AB , теоретично, можливими є три випадки: $M-A-B$, $A-B-M$, $A-M-B$. У першому випадку вірною є рівність $MB=MA+AB$, звідки випливає, що $MB>MA$, як наслідок, маємо суперечність з умовою теореми. У другому випадку вірною є рівність $AM=AB+BM$ і тому $AM>BM$, знову-таки маємо суперечність. Отже, можливим є лише третій випадок: $A-M-B$, $AB=AM+MB$, точка M є серединою відрізка AB і тому належить серединному перпендикуляру до даного відрізка.

II. Дано: відрізок AB , пряму l , що є серединним перпендикуляром до відрізка AB : $l \perp AB$, пряма l проходить через середину M_1 відрізка AB , точка M належить прямій l .

Довести: $MA = MB$.

Доведення. За умови теореми, $M \in l$, $M_1 \in l$. Якщо точка M співпадає з точкою M_1 , то точка M є серединою відрізка AB , $MA = MB$, що й треба було довести.

Якщо точка M не співпадає з точкою M_1 , то точка M не належить прямій AB , бо єдиною спільною точкою прямих l та AB є точка M_1 . Але тоді існує трикутник AMB , для якого відрізок MM_1 одночасно, є медіаною і висотою. Отже, трикутник AMB є рівнобедреним з основою AB , $MA = MB$, що й треба було довести.

Розглянемо тепер теорему, що відповідає окремому випадку геометричного місця точок за номером 15.

Теорема 5.2. *Геометричним місцем точок, з яких заданий відрізок AB «видно» під заданим гострим кутом, є геометрична фігура, утворена дугою кола, яка спирається на хорду AB і містить одну з таких точок, і дугою кола, симетричною до даної дуги відносно прямої AB .*

Доведення даної теореми, зрозуміло, також передбачає доведення справедливості двох взаємно обернених тверджень.

I. Дано: відрізок AB , гострий кут α , точку M , для якої $\angle AMB = \alpha$.

Довести: точка M належить геометричній фігурі F , утвореній дугою AMB кола, описаного навколо трикутника AMB , і дугою кола, симетричною до даної дуги відносно прямої AB .

Доведення. Розглянемо задані відрізок AB і гострий кут α . Обґрунтуємо, спочатку, існування такого трикутника AMB , у якого $\angle AMB = \alpha$. Позначимо півплощини, на які пряма AB розділяє евклідову площину, через Π_1 і Π_2 . У евклідовій планіметрії, для кожного

нерозгорнутого кута α у півплощині Π_2 існує такий промінь AP , що $\angle BAP = \alpha$. Розглянемо пряму a , яка проходить через точку A перпендикулярно до прямої AP . Точка A розділяє пряму a на два взаємно доповняльних променя, один з яких належить півплощині Π_1 , а другий – півплощині Π_2 . Один з цих променів утворює з променем AB гострий кут, інший – тупий. В силу того, що, за умови даної теореми, $\angle BAP = \alpha$ є кутом гострим, а промінь AP належить півплощині Π_2 , то той промінь AT прямої a , який з променем AB утворює гострий кут, належить півплощині Π_1 , промінь AB проходить між сторонами прямого кута TAP , $\angle TAB = 90^\circ - \alpha$. Розглянемо пряму b , що проходить через точку B перпендикулярно до прямої AB . Зрозуміло, що пряма b не є паралельною до прямої a , яка утворює з прямою AB гострий кут, пряма b перетинає саме той промінь прямої a , який з променем AB утворює гострий кут, тобто, саме промінь AT , у певній точці M (саме січна AB утворює з променем AT і відповідним променем прямої b внутрішні односторонні кути, сума яких є меншою за 180°), $\triangle AMB$ є прямокутним трикутником з гіпотенузою AM . $\angle AMB = 90^\circ - \angle MAB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$. Отже, точка M є такою точкою евклідової площини, що $\angle AMB = \alpha$, існування відповідного трикутника AMB обґрунтовано.

Центр O кола Q , описаного навколо прямокутного трикутника AMB , лежить на середині його гіпотенузи AM і, одночасно, на серединному перпендикулярі l до катета AB . Зрозуміло, що точка M належить дузі $A_M B$ даного кола.

Якщо точка K є серединою відрізка AB , $K \in l$, $OK \perp AB$, центр O_1 кола Q_1 , симетричного до кола Q відносно прямої AB , лежить на прямій l , у півплощині Π_2 на відстані $O_1 K$, $O_1 K = OK$ відносно прямої AB , дуга

кола Q_1 , симетрична до дуги $A_M B$ кола Q відносно прямої AB , є тією дугою кола Q_1 , що належить півплощині Π_2 . Отже, шукану фігуру F визначено, точка M їй належить. Зрозуміло, що мова йде про фігуру F , утворену дугою $A_M B$ і симетричною до неї дугою відносно прямої AB , за виключенням самих точок A і B (рис. 5.2).

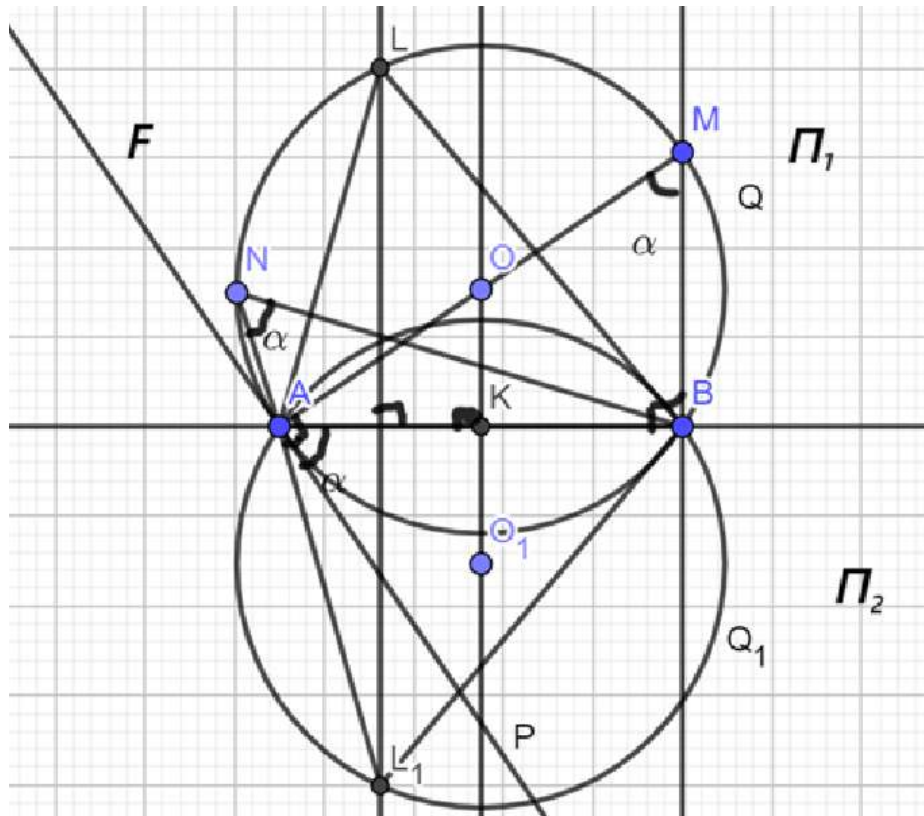


Рис. 5.2.

II. Дано: відрізок AB , гострий кут α , фігуру F , визначену під час доведення першої частини теореми.

Довести: для кожної точки N фігури F , $\angle ANB = \alpha$.

Доведення. Розглянемо геометричну фігуру F , знайдену під час обґрунтування першої частини теореми. Фігуру F визначено за допомогою прямокутного трикутника AMB , гострий кут AMB якого дорівнює заданому куту α . Фігура F складається з двох дуг рівних між собою кіл Q і Q_1 , симетричних одна до одної відносно прямої AB , і, в силу цього, розташованих у різних півплощинах відносно прямої AB , точка M належить одній з цих дуг.

Нехай точка N належить фігурі F . Якщо точка N належить колу Q , то вона належить дузі $A_M B$ цього кола, тобто, $\angle ANB$ є кутом, вписаним у коло Q , який спирається на ту ж саму дугу кола Q , що й кут AMB . Отже, $\angle ANB = \alpha$.

Якщо точка L_1 належить колу Q_1 , то вона належить тій дузі цього кола, що є симетричною до дузі $A_M B$ кола Q відносно прямої AB . Розглянемо точку L дузі $A_M B$, симетричну до точки L_1 відносно прямої AB . $\angle ALB = \alpha$. $\angle ALB = \angle AL_1 B$ тому, що симетрія відносно прямої є рухом площини, а при рухах площини величини кутів зберігаються (по-іншому, можна легко обґрунтувати, що $\triangle ALB = \triangle AL_1 B$). Отже, і у даному випадку, $\angle AL_1 B = \alpha$.

Теорему доведено.

Визначене геометричне місце точок – фігуру F – виходячи із заданого відрізка AB і заданого кута α , можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Дійсно, від заданого за допомогою відрізка AB променю AB у певну півплощину можна відкласти кут BAP , що дорівнює заданому куту α – задача 2 першого рівня складності. До визначеної за допомогою променю AP прямої AP у точці A можна побудувати перпендикулярну пряму a – задача 7 першого рівня складності. До відрізка AB можна побудувати серединний перпендикуляр l – задача першого рівня складності №3. Одночасно, буде визначено і середину K відрізка AB - задача 4 першого рівня складності. Центр O кола Q буде знайдено як точку перетину прямих a і l . Після цього можна буде побудувати коло Q з центром у точці O радіусу OA . Центр O_1 кола Q_1 будують як точку, що належить серединному перпендикуляру l , лежить по іншу сторону відносно прямої AB , ніж точка O , на відстані $O_1 K$, $O_1 K = OK$ від прямої AB . Після цього будують коло

Q_1 з центром у точці O_1 того самого радіусу, що й коло Q . Наостанок, визначаються з шуканою фігурою F .

У випадках прямого чи тупого кута α міркування проводяться, фактично, аналогічним чином. Визначена унаслідок відповідних міркувань фігура F має при цьому дещо інший вигляд.

Якщо $\alpha = 90^\circ$, то фігура F є колом, діаметром якого є заданий відрізок AB , за виключенням самих точок A і B (рис. 5.3).

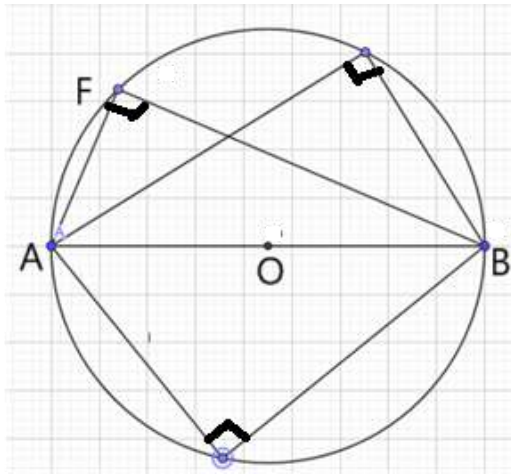


Рис. 5.3.

У випадку тупого кута α , як і у розглянутому випадку, маємо фігуру F ,

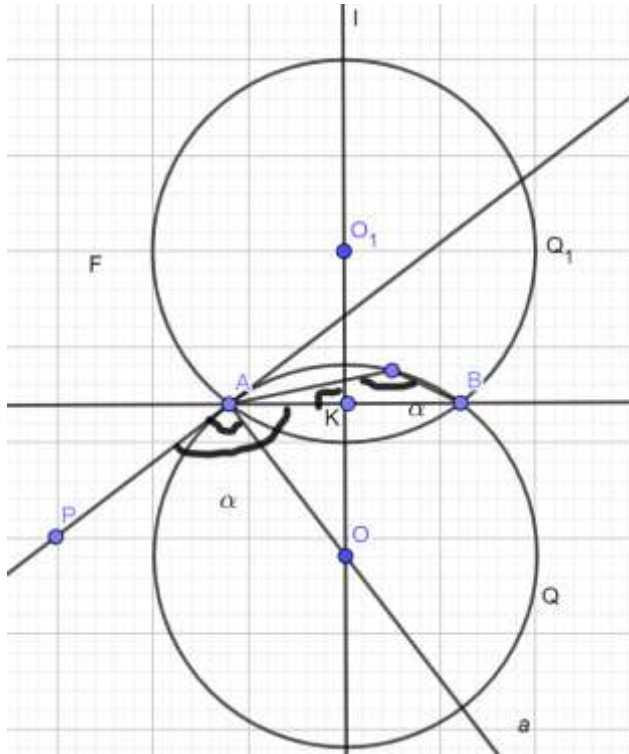


Рис. 5.4.

утворену дугами двох, симетричних відносно прямої, що містить їх спільну хорду, кіл. Відміна полягає лише у тому, що відповідні дуги і центри їхніх кіл лежать по різні сторони відносно прямої, що містить заданий відрізок (рис. 5.4).

Розглянуте геометричне місце точок є підставою для визначення геометричних місць точок за номерами 18, 19, 20.

Дослідимо, натепер, геометричне місце точок 25.

Теорема 5.3. *Геометричним місцем точок, сума квадратів відстаней від яких до двох заданих точок A і B , є величиною сталою та складає a^2 , $2a^2 > AB^2$, є коло певного центру і певного радіусу.*

I. Дано: точки A , B , точка A не співпадає з точкою B , $AB^2 < 2a^2$, точка M , $AM^2 + MB^2 = a^2$.

Довести: точка M належить колу визначеного вихідними даними задачі радіусу, з центром у визначеній точці.

Доведення. Розглянемо точку M , яка не належить прямій AB та задовольняє визначену умовою задачі вимогу: $AM^2 + MB^2 = a^2$. Позначимо через O середину відрізка AB ($A-O-B$, $AO=OB$). На промені, доповняльному до променю OM , розглянемо таку точку N , що $ON=OM$. Чотирикутник $AMBN$ є паралелограмом, бо його діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл (рис. 5.5).

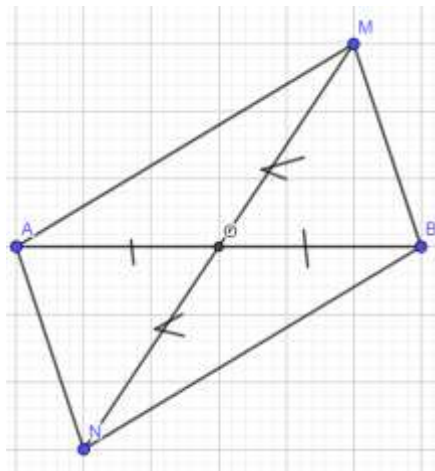


Рис. 5.5.

Як відомо, сума квадратів діагоналей кожного паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін. Отже, правильною є рівність $2AM^2 + 2MB^2 = AB^2 + 4MO^2$ або $2a^2 = AB^2 + 4MO^2$. Звідси маємо:

$$MO^2 = \frac{1}{4}(2a^2 - AB^2), \quad MO = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - AB^2}.$$

За умови теореми, $2a^2 > AB^2$. Отже, отримана рівність означає, що досліджувана точка M належить колу Q з центром у точці O радіусу $r = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - AB^2}$.

Припустимо тепер, що точка M належить прямій AB , $AM^2 + MB^2 = a^2$, точка O є серединою відрізка AB . Теоретично, можливими при цьому є наступні випадки.

1. Точка M на прямій AB знаходиться поза відрізком AB ($M - A - B$ або $A - B - M$). Нехай, для визначеності, має місце той випадок, що зображено на рисунку 5.6: $M - A - B$.

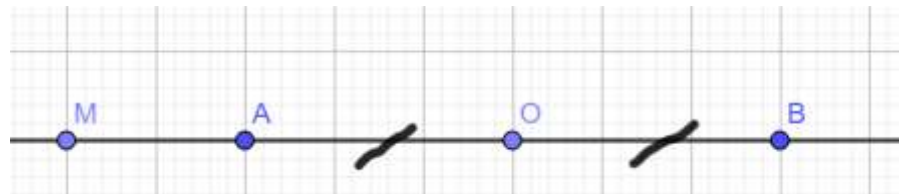


Рис. 5.6.

Тоді $MA = OM - OA = OM - \frac{1}{2}AB$, $MB = AB + MA = OM + \frac{1}{2}AB$,

$$\left(OM - \frac{1}{2}AB\right)^2 + \left(OM + \frac{1}{2}AB\right)^2 = a^2,$$

$2OM^2 + \frac{1}{2}AB^2 = a^2$, $OM^2 = \frac{1}{4}(2a^2 - AB^2)$. Отже, у цьому випадку

точка M належить тому ж самому колу.

2. Точка M співпадає з точкою A або з точкою B .

Нехай, для визначеності, $M \equiv A$. Тоді $MA = 0$, $MB = AB$,

$$AB^2 = a^2, \quad AB = a, \quad OM = OA = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - a^2}.$$

Отже, подібний випадок має місце виключно тоді, коли $AB = a$, точка M є точкою кола діаметра a з центром у точці O .

3. Точка M є внутрішньою точкою відрізка AB : $A-M-B$ (рис. 5.7).

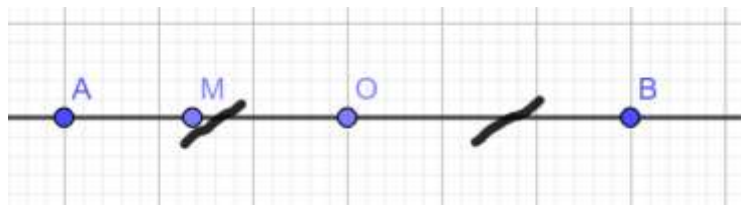


Рис. 5.7.

Тоді $AM = AO - OM = \frac{1}{2}AB - OM$, $BM = BO + OM = \frac{1}{2}AB + OM$,

або $AM = \frac{1}{2}AB - OM$, $BM = \frac{1}{2}AB + OM$. У обох випадках

$$AM^2 + BM^2 = \left(\frac{1}{2}AB - OM\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AB + OM\right)^2 = \frac{1}{2}AB^2 + 2OM^2$$

Із рівності $AM^2 + BM^2 = a^2$ випливає, що

$$\frac{1}{2}AB^2 + 2OM^2 = a^2, \quad OM^2 = \frac{1}{4}(2a^2 - AB^2).$$

Отже, випадок (3) також є можливим, точка M є точкою кола з центром в точці O відповідного радіусу.

II. Дано: точки A, B , точка A не співпадає з точкою B , $2a^2 > AB^2$, $A-O-B$, $AO=OB$, коло Q з центром у точці O радіусу

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - AB^2}, \text{ точка } M, M \in Q.$$

Довести: $AM^2 + MB^2 = a^2$.

Доведення. За умови, центр O кола Q є серединою відрізка AB . Отже, пряма AB проходить через центр O кола Q . Нехай точка M є точкою кола

Q , яка не належить прямій AB . Точка N , симетрична до точки M відносно точки O , зрозуміло, також належить колу Q (рис. 5.8).

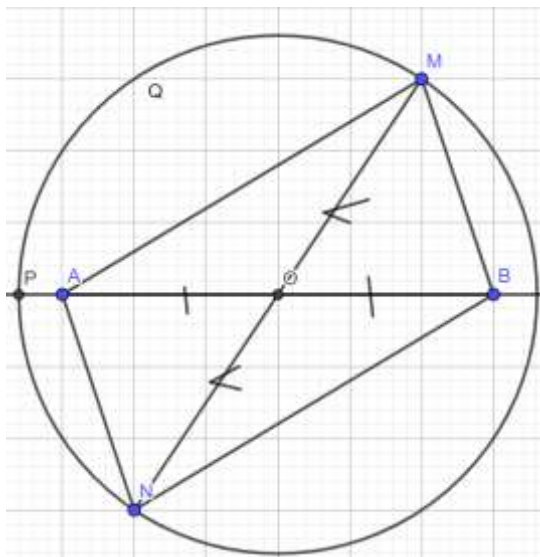


Рис. 5.8.

Розглянемо чотирикутник $AMBN$. Його діагоналі перетинаються у точці O і точкою перетину діляться навпіл. Отже, це паралелограм. А сума квадратів сторін паралелограма дорівнює сумі квадратів його діагоналей:

$$2(AM^2 + BM^2) = AB^2 + 4MO^2;$$

$$2(AM^2 + BM^2) = AB^2 + 4 \cdot \frac{1}{4}(2a^2 - AB^2);$$

$$2(AM^2 + BM^2) = 2a^2; \quad AM^2 + MB^2 = a^2,$$

що й треба було довести.

Нехай тепер точка M є точкою перетину кола Q з прямою AB . Так само, як і при обґрунтуванні справедливості твердження частини I, неважко довести, що, в силу того, що центр O кола Q є серединою відрізка AB , незалежно від розташування точки M відносно відрізка AB ,

$$AM^2 + BM^2 = \left(\frac{1}{2}AB - r\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AB + r\right)^2 = \frac{1}{2}AB^2 + 2r^2 =$$

$$= \frac{1}{2}AB^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}(2a^2 - AB^2) = \frac{1}{2}AB^2 + a^2 - \frac{1}{2}AB^2 = a^2,$$

що й треба було довести.

Можна легко переконатися у тому, що у випадку, коли $2a^2 = AB^2$, шукане геометричне місце точок зводиться до однієї точки – середини O відрізка AB . У випадку $2a^2 < AB^2$ – відповідних точок M не існує, шукане геометричне місце точок є порожньою множиною.

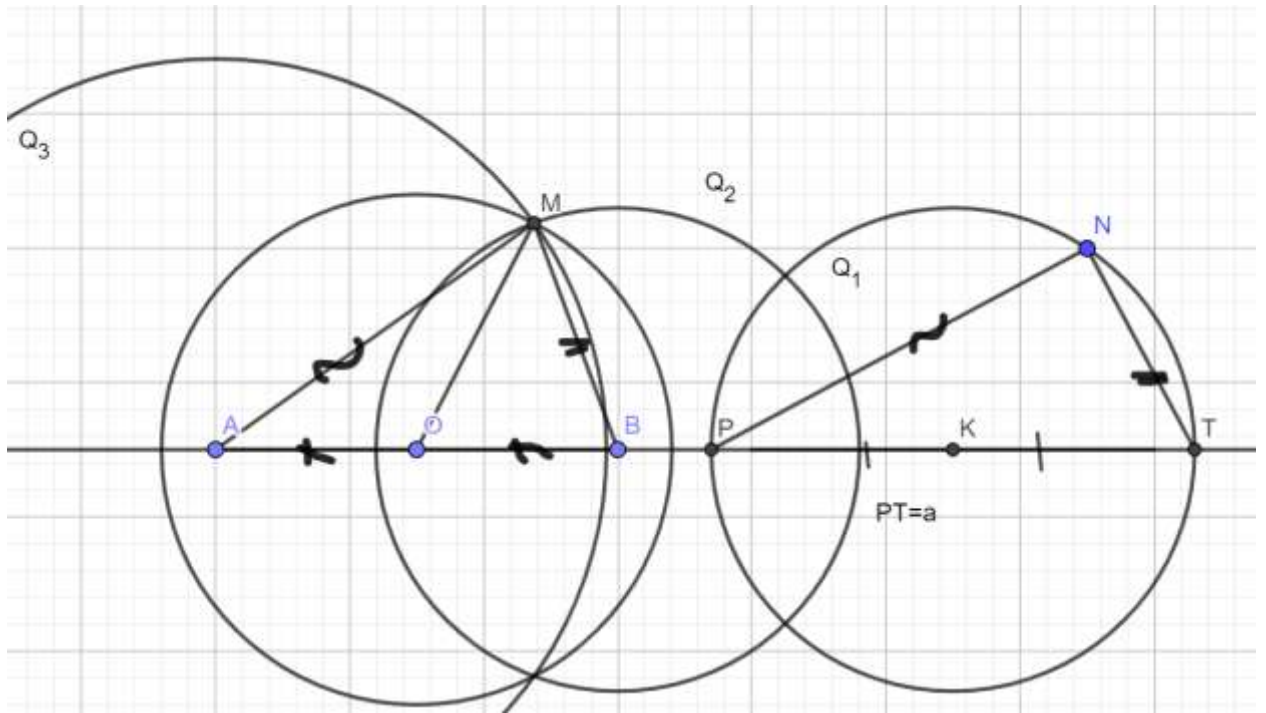


Рис. 5.9.

Якщо задано відрізок AB і відрізок, довжину якого відносно певного одиничного відрізка прийнято за a , то визначене геометричне місце точок за такими вихідними даними можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки (рис. 5.9). Дійсно, на заданому відрізку PT , $PT=a$, як на діаметрі, достатньо побудувати коло Q_1 . Далі, на колі Q_1 треба обрати довільну точку N , відмінну від точок P і T . Згідно теореми Піфагора, $PN^2 + NT^2 = a^2$. Знайдемо точку M як одну з точок перетину кіл Q_2 з центром у точці B радіусу NT та Q_3 з центром у точці A радіусу PN . Коло радіусу OM з центром у середині O відрізка AB буде шуканим геометричним місцем

точок. Існування точки перетину кіл Q_2 і Q_3 , яка не належить прямій AB , тобто, фактично, двох точок перетину цих кіл, забезпечено вимогою $2a^2 > AB^2$, цей факт було обґрунтовано під час визначення шуканого геометричного місця точок.

Розглянемо питання щодо знаходження геометричного місця точок за номером 29.

Теорема 5.4. *Геометричним місцем точок, різниця квадратів відстаней яких до двох заданих точок M і N складає a^2 , $a > 0$, є перпендикулярна до прямої MN пряма, що проходить через точку E , визначену за допомогою рівності*

$$EM^2 - EN^2 = a^2, \quad (5.1)$$

тобто, через одну з точок шуканої множини.

І. Дано: точки M , N , точка M не співпадає з точкою N , точка E , для якої має місце рівність $EM^2 - EN^2 = a^2$, пряма EE_0 , $EE_0 \perp MN$, точка K , для якої має місце рівність $KM^2 - KN^2 = a^2$.

Довести: $K \in EE_0$.

Доведення. Згідно умови, пряма EE_0 , яка є перпендикулярною до прямої MN , перетинає пряму MN у точці E_0 . Припустимо, точка E не співпадає з точкою E_0 , тобто, не належить прямій MN . Тоді існують прямокутні трикутники ME_0E і NE_0E (рис. 5.10), за теоремою Піфагора,

$$ME_0^2 = ME^2 - EE_0^2, \quad NE_0^2 = NE^2 - EE_0^2, \quad ME_0^2 - NE_0^2 = ME^2 - NE^2 = a^2.$$

Отже, точка E_0 також задовольняє умову (5.1). Якщо точка K не належить прямій MN , проведемо пряму KK_0 , $KK_0 \perp MN$, $K_0 \in MN$. В силу того, що точка K задовольняє умову (5.1), звідси буде випливати, що точка K_0 також задовольняє цю умову. Залишається обґрунтувати той факт, що на прямій MN існує єдина точка, яка задовольняє умову (5.1). З того, що

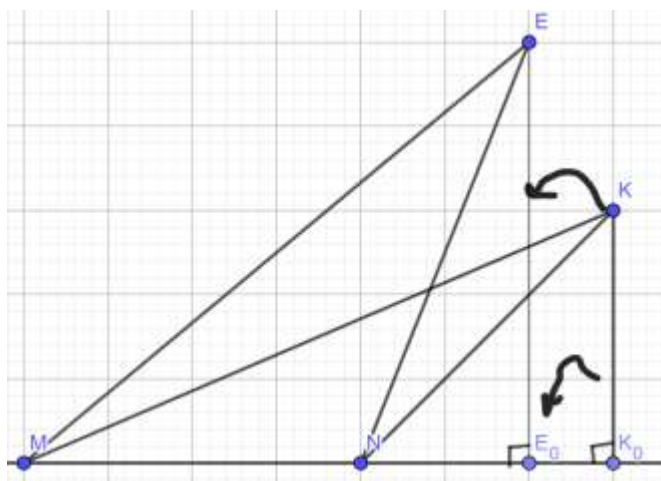


Рис. 5.10

$ME_0^2 - NE_0^2 = a^2$, випливає, що $ME_0^2 > NE_0^2$, $ME_0 > NE_0$, на прямій MN точки M , N , E_0 розташовані так, що $M - E_0 - N$ або $M - N - E_0$. Теоретично, можливим є й той випадок, коли $E_0 \equiv N$ ($MN \equiv a$). У будь-якому варіанті точка E_0 є точкою променя MN . У першому випадку, $NE_0 = MN - ME_0$, у другому та третьому випадках, $NE_0 = ME_0 - MN$. Отже, у будь-якому випадку $NE_0 = |MN - ME_0|$, $ME_0^2 - (MN - ME_0)^2 = a^2$, $2MN \cdot ME_0 - MN^2 = a^2$;

$$ME_0 = \frac{a^2 + MN^2}{2MN}. \quad (5.2)$$

Положення точки E_0 на промені MN за вихідними даними є визначеним однозначно – згідно відповідного факту евклідової планіметрії, на будь-якому промені від його початку однозначно «можна відкласти» відрізок будь-якої наперед заданої довжини. Звідси випливає, що точка K_0 неминуче співпадає з точкою E_0 , $K \in EE_0$ в силу того, що через точку E_0 прямої MN до прямої MN проходить єдиний перпендикуляр.

II. Дано: точки M , N , точка M не співпадає з точкою N , точка E , для якої має місце рівність (5.1), пряма EE_0 , $EE_0 \perp MN$, точка K , $K \in EE_0$.

Довести: $KM^2 - KN^2 = a^2$.

Доведення. Під час доведення першої частини теореми було обґрунтовано, що, якщо точка $E_0 \in MN$ і для певної точки E прямої $EE_0 \perp MN$ виконано умову (5.1), то цю умову виконано і для точки E_0 : $ME_0^2 - NE_0^2 = a^2$. Отже, якщо $K \equiv E_0$, то визначене умовою теореми твердження доведено. Нехай $K \in EE_0$, точка K не співпадає з точкою E_0 . Тоді $K \notin MN$, існують прямокутні трикутники ME_0K і NE_0K (рис. 5.11), з яких, за теоремою Піфагора, випливає справедливність рівностей $MK^2 = ME_0^2 + KE_0^2$; $NK^2 = NE_0^2 + KE_0^2$; $MK^2 - NK^2 = ME_0^2 - NE_0^2$, що й треба було довести.

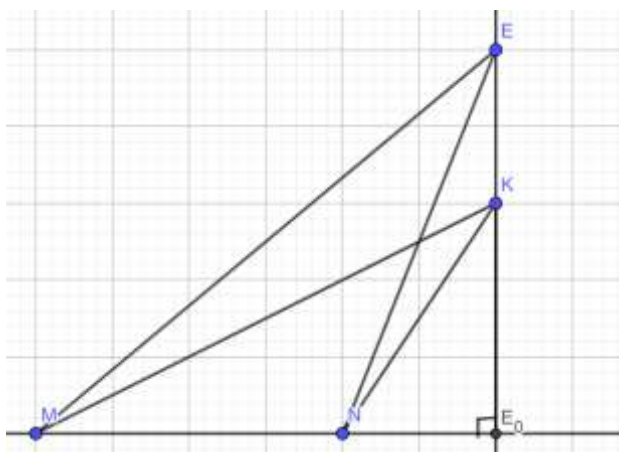


Рис. 5.11

У підсумку, справедливність теореми 5.4 обґрунтовано. Однозначну визначеність відповідної прямої за довільними заданими точками M і N (точка M не співпадає з точкою N) та довільним відрізком довжини a встановлює формула (5.2) – на промені MN можна однозначно визначити точку E_0 , через яку проходить шукана пряма, перпендикулярна до прямої MN .

За відрізком MN і відрізком довжини a , виходячи з формули (5.2), відрізок, довжина якого дорівнює довжині відрізка ME_0 , можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

Дійсно, розглянемо прямокутний трикутник PMN , $PM \perp MN$, $PM = a$ (рис. 5.12).

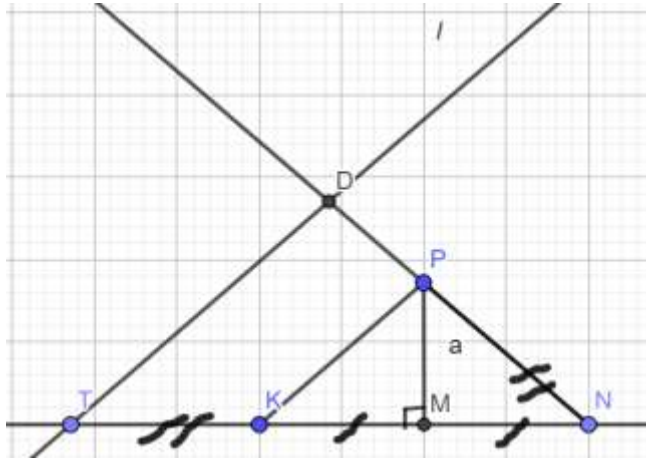


Рис. 5.12

За теоремою Піфагора, $PN = \sqrt{a^2 + MN^2}$. На промені, доповняльному до променю MN , послідовно відкладемо відрізки MK , $MK = MN$ і KT , $KT = PN$. Через точку T , паралельно до прямої KP , проведемо пряму l до перетину з променем NP у точці D . За теоремою Фалеса,

$$\frac{DP}{TK} = \frac{PN}{KN} \quad \text{або} \quad \frac{DP}{\sqrt{a^2 + MN^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + MN^2}}{2MN}, \quad DP = \frac{a^2 + MN^2}{2MN}.$$

Отже, згідно формули (5.2), $ME_0 = DP$.

Зрозуміло, що, якщо точка E належить визначеному геометричному місцю точок, то $ME^2 = a^2 + NE^2$, відрізки ME і NE дорівнюють, відповідно, гіпотенузі і катету прямокутного трикутника, іншим катетом якого є катет довжиною у a одиниць. Отже, для побудови точки E можна використати певний прямокутний трикутник ABC , у якого катет $BC = a$ (рис. 5.13).

Для знаходження точки E достатньо побудувати коло Q_1 радіусу AB з центром у точці M і коло Q_2 радіусу AC з центром у точці N . Якщо ці кола перетнуться, то точка E їх перетину буде належати шуканому геометричному місцю точок, для побудови якого через точку E достатньо

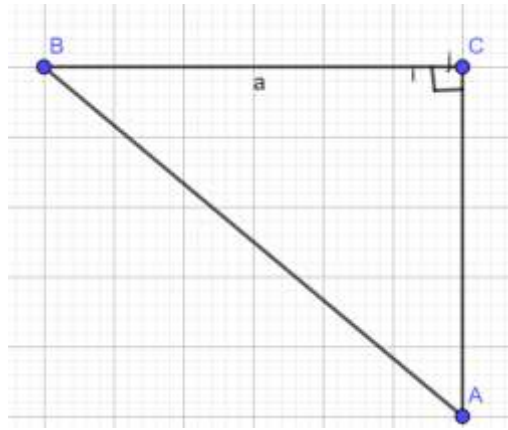


Рис. 5.13

буде провести пряму, перпендикулярну до прямої MN . Проблема полягає лише в тому, що не за будь-якого варіанту обрання катету AC кола Q_1 та Q_2 будуть перетинатися. Треба проводити відповідні дослідження.

Постановка задачі, безумовно, має сенс і у випадку, коли число a дорівнює нулю. Але тоді мова йде про геометричне місце точок E , для яких $ME^2 - NE^2 = 0$, тобто, $ME^2 = NE^2$, $ME = NE$. Це – відоме геометричне місце точок, серединний перпендикуляр до відрізка MN .

Розглянемо тепер геометричне місце точок за номером 28. Має місце наступна

Теорема 5.5. *Геометричним місцем точок, відстані від яких до двох заданих точок A і B (точка A не співпадає з точкою B) перебувають у даному відношенні $m:n$, $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq n$, є коло певного радіусу з центром у певній точці (так зване коло Аполлонія [1; 19]).*

І. Дано: точки A , B , точка A не співпадає з точкою B , точка C , $AC:CB = m:n$, $m, n \in \mathbb{R}$, $m > n$.

Довести: точка C належить колу, однозначно визначеному точками A , B , і числами m , n .

Доведення. Припустимо, задана точка C не належить прямій AB . Тоді існує трикутник ABC . Проведемо його бісектрису CL . За властивістю бісектриси трикутника, $\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$ ($m > n$). Отже, точка L є точкою прямої AB , яка має ту ж саму властивість, що й точка C (рис. 5.14).

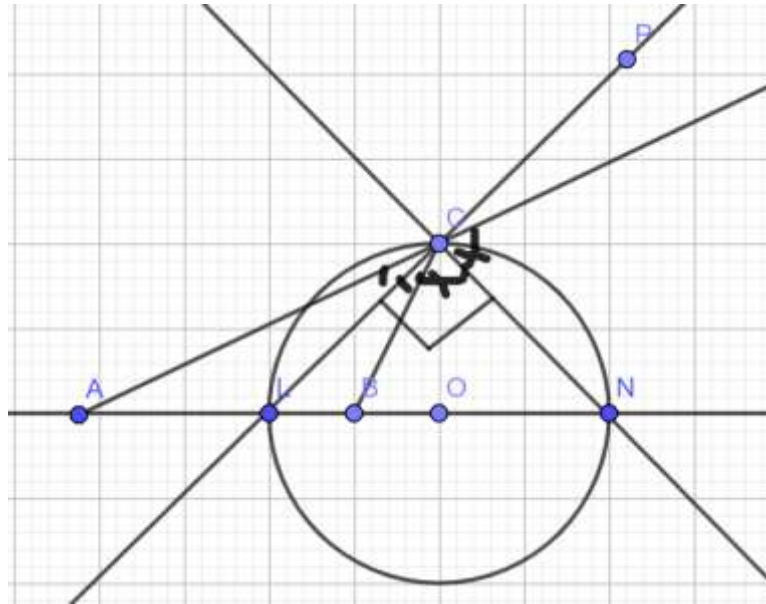


Рис. 5.14

Проведемо бісектрису CN зовнішнього кута BSP при вершині C трикутника ABC . В силу того, що $AC > BC$, ця бісектриса перетне промінь прямої AB , доповняльний до променя BA , у певній точці N , для якої $\frac{AN}{NB} = \frac{AC}{BC} = \frac{m}{n}$, точка N є другою точкою прямої AB , яка має ту ж саму властивість, що й точка C . $\angle LCN = 90^\circ$ як кут між бісектрисами суміжних кутів. Це означає, що точка C (як і точки L , N) належить колу Q з діаметром LN . Точки L і N є визначеними відрізком AB і заданими числами m і n , $m > n$, однозначно, бо ці точки ділять відрізок AB у відношенні $m:n$, відповідно, внутрішнім і зовнішнім чином.

Якщо точка C належить прямій AB , то точка C співпадає з точкою L або з точкою N , бо на прямій AB існують лише дві точки C , для яких $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$ у випадку $m > n$. Отже, за подібного припущення, точка C також є точкою кола Q .

II. Дано: точки A , B , точка A не співпадає з точкою B , числа m , n , $m, n \in \mathbb{R}$, $m > n$, точка L , яка ділить відрізок AB внутрішнім образом у відношенні $m:n$, ($AL:LB = m:n$); точка N , яка ділить відрізок AB

зовнішнім образом у відношенні $m:n$, ($AN:NB=m:n$), коло Q з діаметром LN , точка C , $C \in Q$.

Довести: $AC:CB=m:n$.

Доведення. Нехай точка C належить колу Q . Якщо точка C лежить на прямій AB , то точка C співпадає з точкою L або з точкою N . У обох випадках співвідношення $AC:CB=m:n$ за умови теореми має місце.

Розглянемо тепер той випадок, коли точка C не належить прямій AB . Тоді існує трикутник ABC . (рис. 5.15).

Одночасно, існує $\triangle LCN$, який є прямокутним, бо $\angle LCN$ є кутом, вписаним у коло Q , який спирається на діаметр. Проведемо пряму BT , $BT \parallel NC$. Згідно теореми Фалеса, $\frac{AN}{NB} = \frac{AC}{TC}$. Тоді $\frac{AC}{TC} = \frac{m}{n}$. Проведемо також пряму BK , $BK \parallel LC$. За теоремою Фалеса, $\frac{AC}{CK} = \frac{AL}{LB} = \frac{m}{n}$. Отже,

$$\frac{AC}{TC} = \frac{AC}{CK}, TC = CK.$$

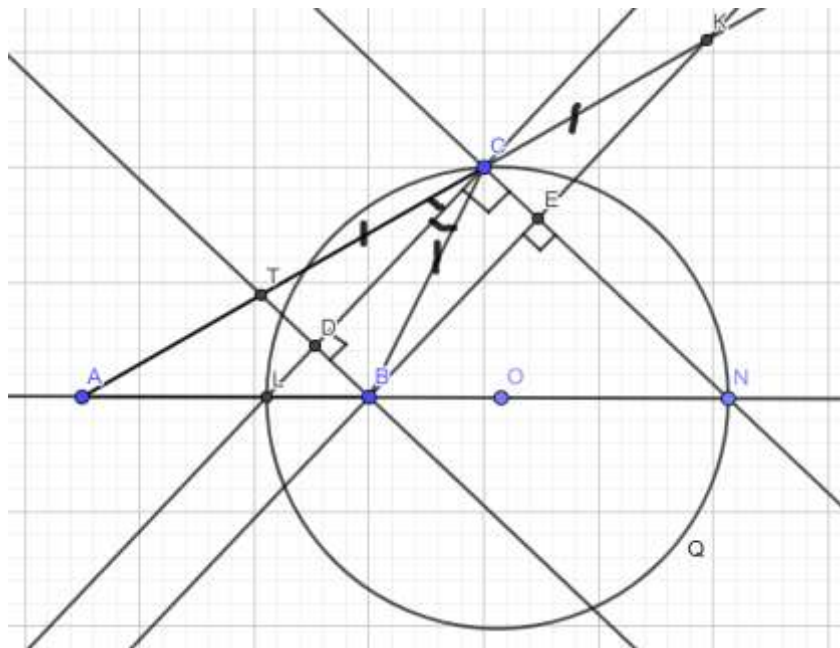


Рис. 5.15

З іншого боку, якщо пряма BT перетинає пряму CL у точці D , а пряма BK перетинає пряму CN у точці E , то $\angle DCE$ паралелограма $BDCE$ є прямим. А це означає, що даний паралелограм є прямокутником, всі його кути є прямими, зокрема, $\angle DBE = 90^\circ$. Але це означає, що $\triangle TBK$ є

прямокутним трикутником з гіпотенузою TK . З того, що $TC=CK$ випливає, що відрізок BC є медіаною цього трикутника, проведеною до гіпотенузи. А медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, складає половину гіпотенузи. Отже, $BC=TC=CK$. Звідси випливає, що трикутник TCB є рівнобедреним з основою TB . Але $\angle BDC=90^\circ$, це означає, що відрізок CD є висотою рівнобедреного трикутника, проведеною до його основи. А така висота, одночасно, є й бісектрисою: $\angle TCD=\angle DCB$. Останнє означає, що відрізок CL є бісектрисою трикутника ABC . За властивістю бісектриси трикутника, $AC:CB=AL:LB=m:n$, що й треба було довести.

Якщо задано точки A, B , точка A не співпадає з точкою B , і відрізки, припустимо, P_1T_1 та P_2T_2 , довжини яких, відповідно, дорівнюють m та n , $m > n$, визначене геометричне місце точок – коло Q - можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Дійсно, нехай задано відрізки $P_1T_1=m$, $P_2T_2=n$, $P_1T_1 > P_2T_2$ (рис. 5.16).

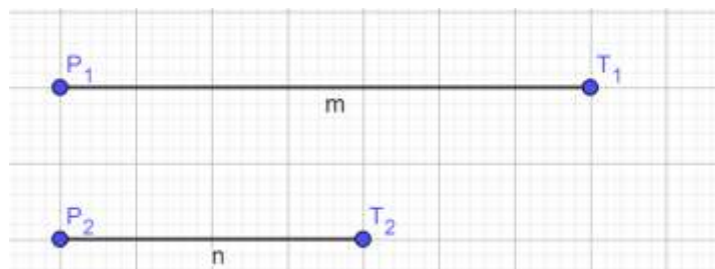
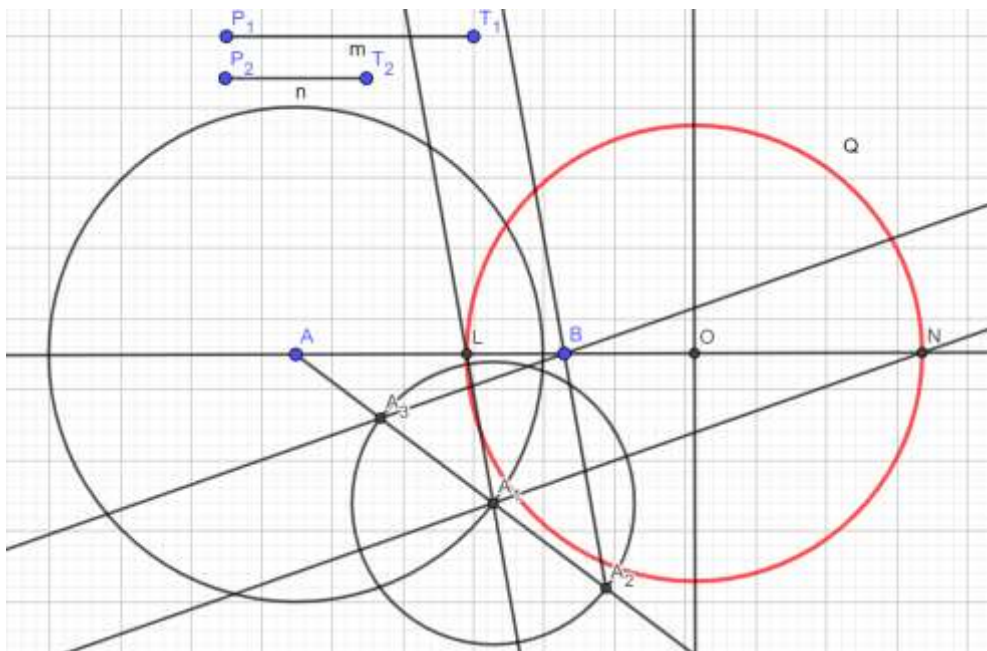


Рис. 5.16

На промені з початком у точці A , який не належить прямій AB , послідовно відкладемо відрізки $AA_1=P_1T_1$, $AA_2=P_2T_2$. Проведемо пряму A_1L , $A_1L \parallel A_2B$, $L \in AB$. За теоремою Фалеса, $AL:LB=AA_1:AA_2=m:n$. На промені AA_1 відкладемо відрізок AA_3 , $AA_3=P_2T_2$. Проведемо $A_1N \parallel A_3B$, $N \in AB$. За теоремою Фалеса, $AN:NB=AA_1:AA_3=m:n$. Отже, визначені точки L і N є діаметрально протилежними точками шуканого кола Q . Поділивши відрізок LN навпіл, отримаємо центр O шуканого кола,

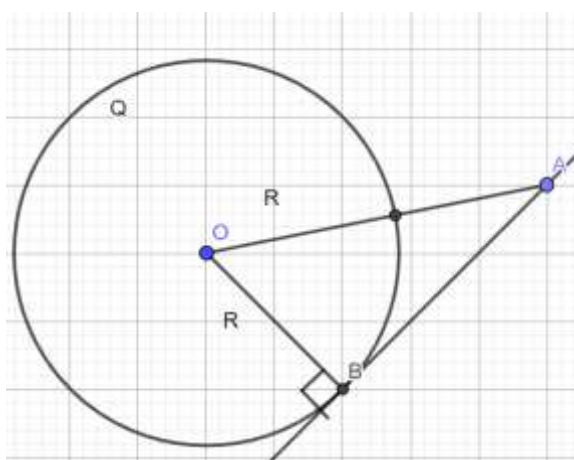
Розглянемо коло Q радіусу r з центром у точці O і довільну точку A .



Степенем точки A відносно кола Q називають ([1]) число

$$p = OA^2 - r^2 \quad (5.3)$$

Зрозуміло, що у випадку, коли точка A знаходиться всередині кола, число p є від'ємним, найменше від'ємне значення, яке воно може приймати, складає $(-r^2)$ ($A \equiv O$); $p=0$, коли точка A належить колу; $p>0$ у випадку, коли точка A знаходиться поза колом (рис. 5.18).



Розглянемо той випадок, коли точка A знаходиться поза колом Q ($OA > r$). Проведемо із точки A до кола Q дотичну AB (точка $B \in Q$).

точкою дотику). За теоремою Піфагора, із прямокутного трикутника ABO , $AB^2 = AO^2 - OB^2 = AO^2 - r^2 = p$. Отже, якщо точка A знаходиться поза колом Q , то степінь цієї точки відносно кола Q дорівнює квадрату відрізка дотичної, проведеної з точки A до кола Q , з кінцями у точці A і точці дотику. Цей факт, очевидно, можна вважати вірним і у випадку, коли точка A знаходиться на колі Q .

Теорема 5.6. *Геометричним місцем точок, які мають однаковий степінь, відносно двох заданих не концентричних між собою кіл, є пряма, перпендикулярна до прямої, що проходить через центр даних кіл.*

(Таку пряму називають **радикальною віссю** даних кіл або **віссю однакових степенів** даних кіл, див., наприклад, [1; 19]).

Нехай задані коло Q_1 радіусу r_1 з центром у точці O_1 і коло Q_2 радіусу r_2 з центром у точці O_2 , точка O_1 не співпадає з точкою O_2 . Згідно означення, точка A має однаковий степінь відносно кіл Q_1 і Q_2 тоді та тільки тоді, коли $AO_1^2 - r_1^2 = AO_2^2 - r_2^2$ або

$$AO_1^2 - AO_2^2 = r_1^2 - r_2^2 \quad (5.4)$$

Якщо кола Q_1 і Q_2 задано, то величина $r_1^2 - r_2^2$ є визначеною сталою, не втрачаючи загальності, можна вважати, що вона є невід'ємною сталою (або $r_1 = r_2$ і ця величина дорівнює нулю, або $r_1 \neq r_2$, за коло Q_1 можна прийняти те коло, радіус якого є більшим). Звідси випливає, що шукане геометричне місце точок співпадає з розглянутим раніше геометричним місцем точок за номером 29 і представляє собою пряму l , яка проходить перпендикулярно до прямої O_1O_2 . Для визначення прямої l достатньо знайти принаймні одну точку, яка задовольняє умову шуканого геометричного місця точок, пряма l проходить через цю точку перпендикулярно до прямої O_1O_2 .

Якщо кола Q_1 і Q_2 є концентричними, то визначене геометричне місце точок представляє собою порожню множину – для кожної точки A евклідової площини рівність (5.4) означає протиріччя: $O_1 \equiv O_2$ і тому $AO_1 = AO_2$, $AO_1^2 - AO_2^2 = 0$, r_1 не дорівнює r_2 , отже, $r_1^2 - r_2^2$ не дорівнює нулю.

Наведені вище міркування дозволяють охарактеризувати геометричне місце точок 30. Справедливою є наступна теорема.

Теорема 5.7. Геометричне місце точок, відрізки дотичних з яких до двох заданих не концентричних кіл є рівними між собою, складає підмножину радикальної осі даних кіл. Цю підмножину утворено точками, які відносно заданих кіл мають однакові невід'ємні степені.

Зрозуміло, що це геометричне місце точок співпадає з радикальною віссю заданих кіл, якщо сукупність усіх однакових степенів точок відносно даних кіл є невід'ємною множиною (радикальна вісь заданих кіл не містить точок, що знаходяться всередині цих кіл).

Розглянемо питання про побудову радикальної осі двох не концентричних кіл за допомогою циркуля і лінійки. Дослідимо усі можливі випадки і найпростіші варіанти відповідних побудов.

1. Кожне коло розташоване у зовнішній відносно іншого кола області: $O_1O_2 > r_1 + r_2$ (рис. 5.19).

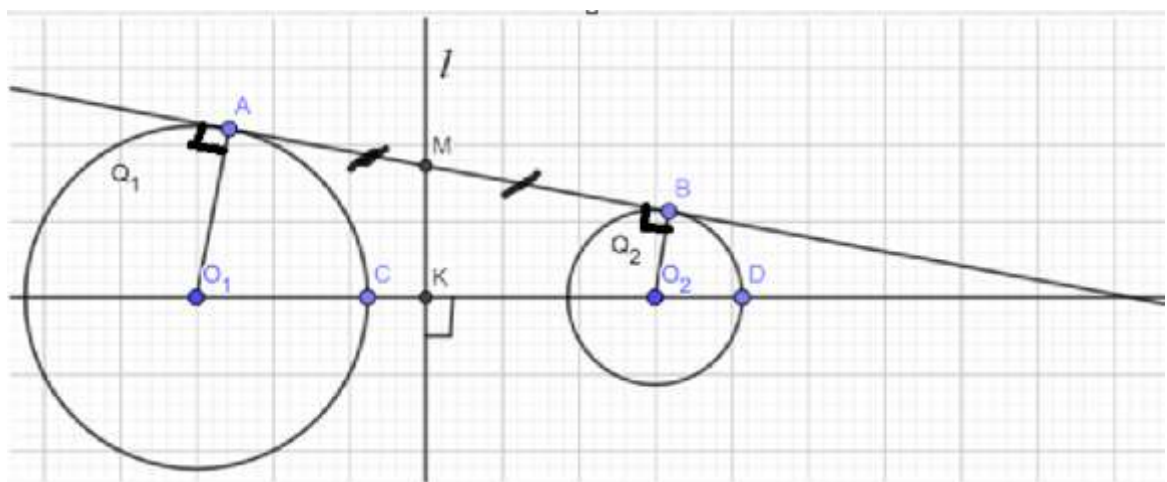


Рис. 5.19

У даному випадку кола мають спільну дотичну, точніше, чотири спільні дотичні, які можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Нехай, пряма AB є однією з цих спільних дотичних, точки A і B , відповідно, є точками дотику, точка M є серединою відрізка AB . Побудуємо перпендикуляр MK до прямої O_1O_2 . Пряма MK є радикальною віссю кіл Q_1 і Q_2 .

Можна обґрунтувати, що у даному випадку радикальна вісь заданих кіл Q_1 і Q_2 відносно обох кіл розташована у зовнішній області, ділить навпіл відрізок O_1O_2 , якщо радіуси кіл є рівними, розташована ближче до центру того кола, радіус якого є меншим, якщо радіуси є різними (якщо $K \in O_1O_2$, $r_1 > r_2$, то $O_2K < O_1K$). Одночасно, звідси випливає, що середини відрізків між точками дотику всіх чотирьох дотичних лежать на одній прямій.

2. Кола Q_1 і Q_2 дотикаються зовнішнім образом: $O_1O_2 = r_1 + r_2$ (рис. 5.20).

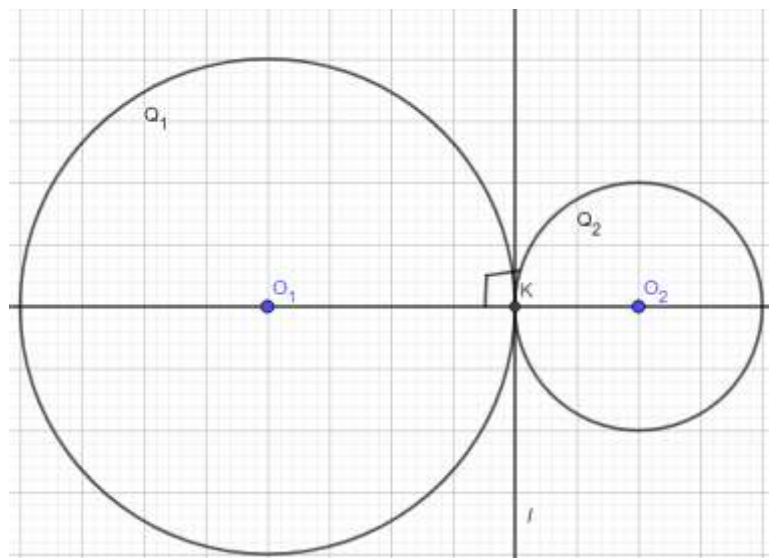


Рис. 5.20

У даному випадку точка дотику K належить радикальній осі кіл Q_1 і Q_2 .

$K \in O_1O_2$. Отже, для побудови радикальної осі l достатньо побудувати пряму, яка проходить через точку K перпендикулярно до прямої O_1O_2 .

3. Кола Q_1 і Q_2 перетинаються у двох точках: $|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$ (рис. 5.21).

Нехай задані кола перетинаються в точках A і B . Точки A і B належать радикальній осі l , бо кожна з них є точкою нульового степеню відносно

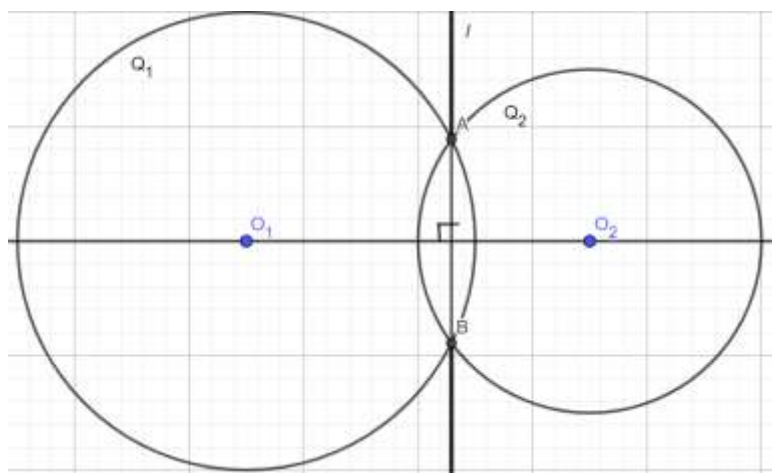


Рис. 5.21

кожного із заданих кіл. Отже, радикальна вісь l просто співпадає з прямою AB , яку, зрозуміло, можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

4. Нехай кола Q_1 і Q_2 дотикаються внутрішнім образом: $O_1O_2 = |r_1 - r_2| > 0$ (рис. 5.22). (Цей випадок, зрозуміло, є можливим лише тоді, коли радіуси кіл є різними).

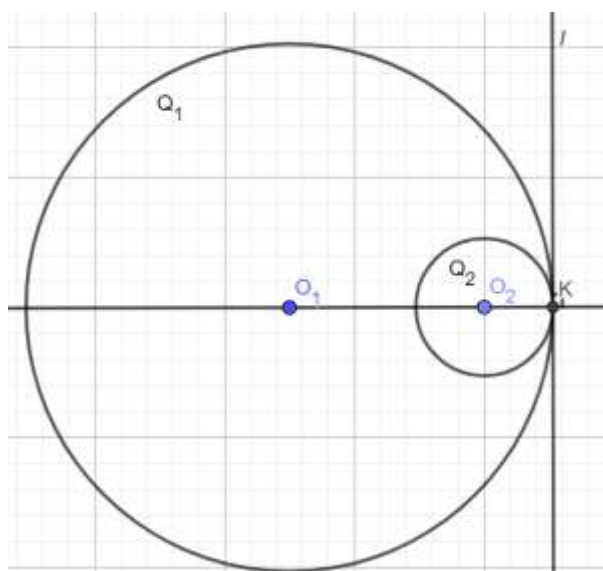


Рис. 5.22

У даному випадку, як і у випадку (2), точка K дотику кіл Q_1 і Q_2 лежить на їх лінії центрів і належить їх радикальній осі l . Для побудови осі

l достатньо побудувати пряму, що проходить через точку K перпендикулярно до лінії центрів O_1O_2 .

5. Одне коло знаходиться всередині іншого (рис. 5.23). Випадок, також, зрозуміло, є можливим лише тоді, коли радіуси кіл є різними. При цьому правильною є подвійна нерівність: $0 < O_1O_2 < |r_1 - r_2|$.

У даному випадку, для побудови радикальної осі l , зручніше за все використати наступну відому теорему: якщо центри трьох кіл не належать одній прямій, то три радикальні осі для відповідних пар цих кіл перетинаються у одній точці. (Справедливість теореми, виходячи із наведеного означення радикальної осі двох кіл є очевидною).

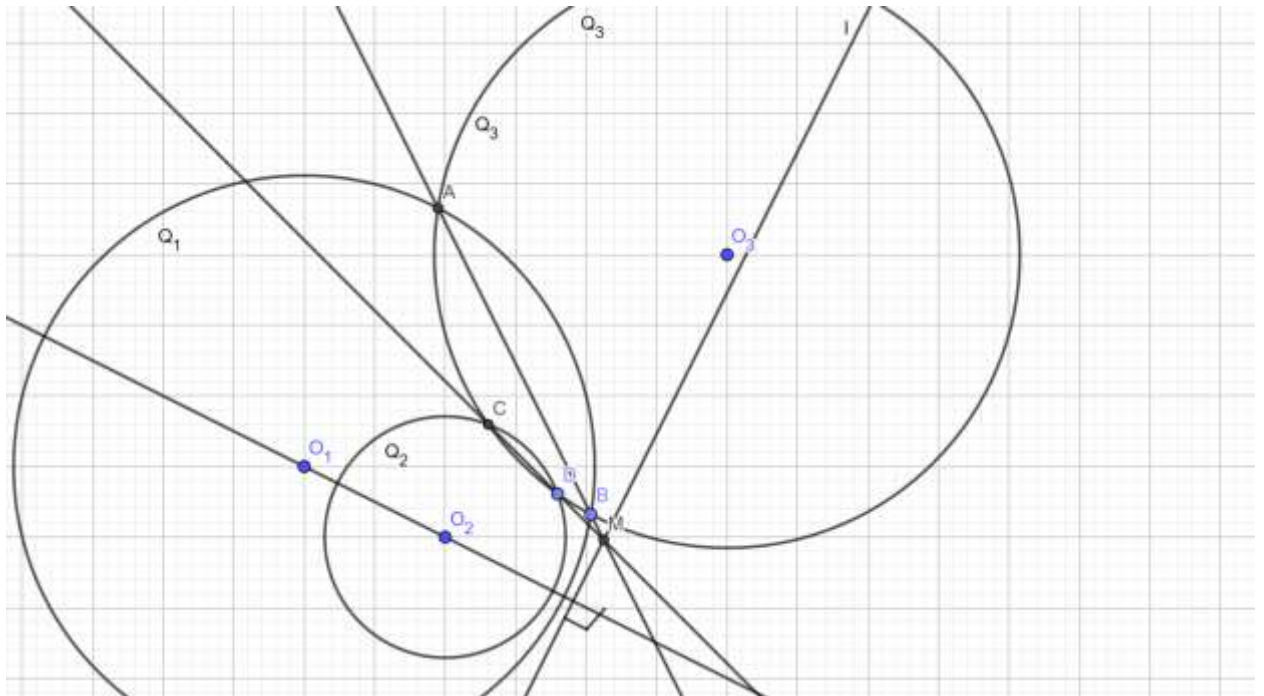


Рис. 5.23

Отже, треба провести пряму O_1O_2 і побудувати таке коло Q_3 , центр якого не знаходиться на прямій O_1O_2 , яке перетинає кожне задане коло Q_1 і Q_2 , відповідно, у двох точках. Нехай, наприклад, коло Q_3 з центром у точці O_3 перетинає коло Q_1 у точках A і B , коло Q_2 - у точках C і D . Пряма AB є радикальною віссю кіл Q_1 і Q_3 , пряма CD - радикальною віссю кіл Q_2 і Q_3 . Пряма AB не є паралельною до прямої CD , бо центри O_1, O_2, O_3

кіл Q_1 , Q_2 , Q_3 не належать одній прямій. Отже, існує точка M перетину прямих AB і CD . Точка M належить і радикальній осі кіл Q_1 і Q_2 . Для побудови радикальної осі достатньо через точку M провести пряму, перпендикулярну до прямої O_1O_2 .

У розглянутих випадках (1), (2), (4), (5) радикальна вісь заданих кіл Q_1 і Q_2 є геометричним місцем точок, відрізки дотичних з яких до заданих кіл Q_1 і Q_2 є рівними між собою. У випадку (3) геометричне місце точок, відрізки дотичних з яких до заданих кіл Q_1 і Q_2 є рівними між собою, утворює підмножина радикальної осі l , що складається з променю, доповняльного до променю AB , і променю, доповняльного до променю BA .

Сутність **методу геометричних місць точок** розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки полягає у наступному.

1. Під час реалізації етапу аналізу розв'язання задачі, як правило, зводять до побудови певної однієї точки. Визначають два геометричних місця точок, яким дана точка належить. Переконаються у тому, що за вихідними даними задачі геометричні фігури, що утворюють визначені геометричні місця точок, можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Констатують той факт, що шукану точку тоді можна побудувати як точку перетину даних фігур.

2. Міркування наступних етапів розв'язання задачі – побудови, доведення та дослідження – повинні відповідати тій послідовності побудов, яку було визначено під час реалізації етапу аналізу.

Наведемо приклади розв'язків певної кількості задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки за методом геометричних місць точок. Зауважимо, що, оскільки під час реалізації етапу аналізу, існування алгоритму побудови за допомогою циркуля і лінійки відповідного геометричного місця точок з'ясовується, під час описання процесу побудови,

як окремий крок побудов можна просто вказувати на те, що будується визначене геометричне місце точок.

Задача 5.1. Побудувати рівнобедрений трикутник за основою та проведеною до цієї основи висотою.

Дано: відрізки P_1T_1 і P_2T_2 (рис. 5.24).

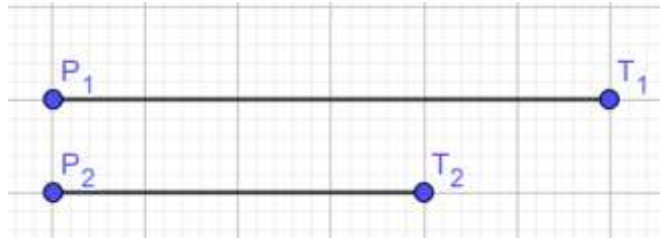


Рис. 5.24

Побудувати: трикутник ABC , $AB=BC$, $AC=P_1T_1$, $BH \perp AC$, $H \in AC$, $BH=P_2T_2$.

Розв'язання. І. Аналіз. Припустимо, побудовано трикутник ABC , для якого $AB=BC$, $AC=P_1T_1$, відрізок BH є висотою, проведеною до основи AC , $BH=P_2T_2$ (рис. 5.25).

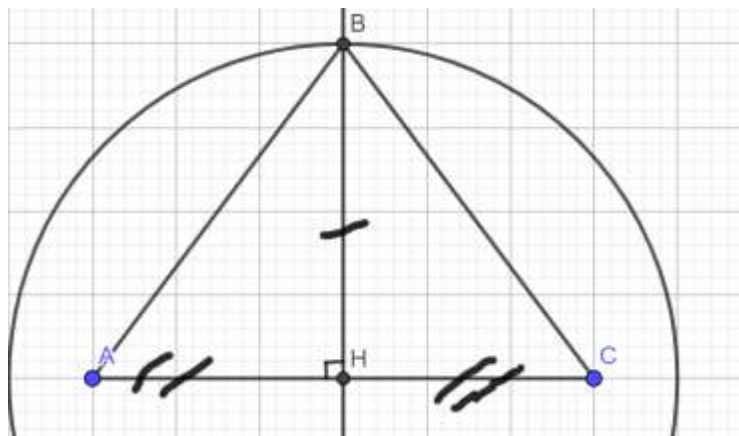


Рис. 5.25

Сторону AC шуканого трикутника ABC , фактично, задано за умови задачі. Залишається побудувати вершину B . Оскільки за умови задачі трикутник ABC є рівнобедреним – $AB=BC$ – шукана вершина B належить геометричному місцю точок, рівновіддалених від відомих точок A і C , тобто, лежить на серединному перпендикулярі до відрізка AC , точка H є серединою відрізка AC . В силу того, що, за умови задачі, $BH=P_2T_2$,

точка B належить геометричному місцю точок, які знаходяться на заданій відстані P_2T_2 від точки H , яку можна легко побудувати виходячи із вихідних даних задачі, - точка B лежить на колі з центром у точці H радіусу P_2T_2 . Отже, шукану вершину B трикутника ABC можна побудувати як точку перетину визначених геометричних місць точок. У підсумку, трикутник ABC буде побудовано.

II. Побудова. 1. Згідно аксіоми β_2 , задані умовою задачі відрізки P_1T_1 і P_2T_2 є побудованими.

2. Перейменуємо відрізок P_1T_1 на відрізок AC .

3. Побудуємо серединний перпендикуляр l до відрізка AC .

4. Визначимо середину H відрізка AC як точку перетину серединного перпендикуляру l з відрізком AC .

5. Побудуємо коло Q радіусу P_2T_2 з центром у точці H .

6. Визначимо точку B як одну з двох точок перетину прямої l і кола Q .

7. Побудуємо трикутник ABC (рис. 5.26).

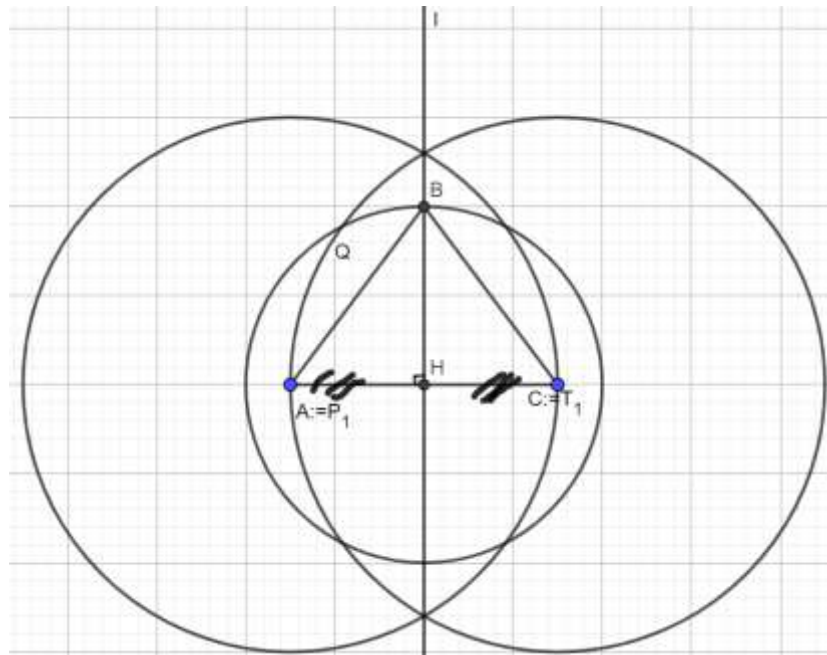


Рис. 5.26

III. Доведення. Відрізок AC дорівнює заданому відрізку P_1T_1 за другим кроком побудов. Точка H є серединою відрізка AC : $A-H-C$,

$АН = НС$, – згідно третього і четвертого кроків побудов. Точка $В$ належить серединному перпендикуляру l до відрізка $АС$ згідно шостого і третього кроків побудов. $ВН = P_2T_2$, згідно шостого і п'ятого кроків побудов. Отже, $ВН \perp АС$, точка $В$ не належить прямій $АС$, трикутник $АВС$ існує, відрізок $ВН$, одночасно, є медіаною і висотою трикутника $АВС$. Звідси випливає, що трикутник $АВС$ є рівнобедреним трикутником ($АВ = ВС$) з основою $АС$. $АС = P_1T_1$, відрізок $ВН$ є висотою, проведеною до його основи, $ВН = P_2T_2$. Отже, трикутник $АВС$ є шуканим.

IV. Дослідження. Аналіз проведеної побудови вказує на те, що за будь якого варіанта обрання вихідних даних задачу можна розв'язати тим способом, який ми обрали. (Точка $В$ як точка перетину прямої l і кола Q завжди існує тому, що пряма l проходить через центр $Н$ кола Q). Задача має єдиний розв'язок тому, що умова задачі не передбачає жодних спеціальних варіантів розташування шуканого трикутника відносно вихідних даних, а всі рівнобедрені трикутники за основою та висотою, проведеною до основи, є рівними між собою.

Обґрунтуємо справедливість останнього твердження.

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $AB = BC$, $A_1B_1 = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $BH \perp AC$, $H \in AC$, $B_1H_1 \perp A_1C_1$, $H_1 \in A_1C_1$, $BH = B_1H_1$ (рис. 5.27).

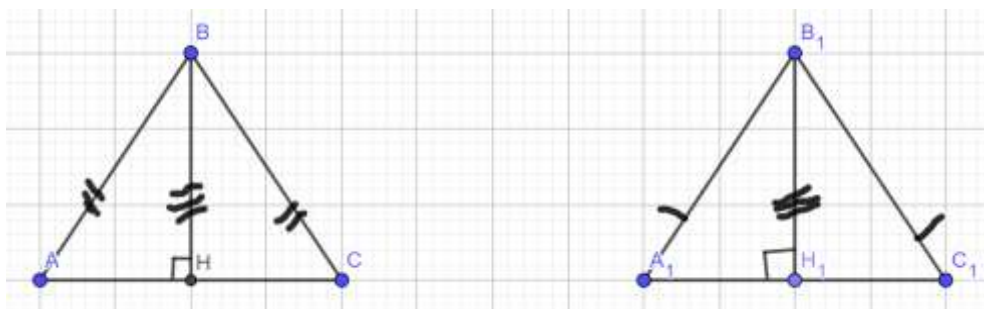


Рис. 5.27

Довести: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доведення. За умови задачі, обидва задані трикутники є рівнобедреними. За властивістю рівнобедреного трикутника, висота, проведена до його основи, одночасно, є і його медіаною. Але тоді

$AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AC_1 = AH_1$. Розглянемо прямокутні трикутники ABH і AB_1H_1 ($BH \perp AH$, $B_1H_1 \perp AH_1$ за умови). $BH = B_1H_1$ – за умови, $AH = AH_1$ – за доведеним. Отже, $\triangle ABH = \triangle AB_1H_1$ за двома катетами. Але тоді рівними є й гіпотенузи цих трикутників: $AB = AB_1$. Для $\triangle ABC$ і $\triangle AB_1C_1$ тоді маємо: $AC = AC_1$ – за умови, $AB = AB_1$ – за доведеним, $AB = BC$, $AB_1 = B_1C_1$ – за умови. Звідси випливає, що $BC = B_1C_1$, $\triangle ABC = \triangle AB_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників, за трьома сторонами.

Задача 5.2. Побудувати трикутник за стороною, протилежним гострим кутом та медіаною, проведеною із вершини цього кута.

Дано: відрізки PT_1 , P_2T_2 , $\angle DNK$, $0^\circ < \angle DNK < 90^\circ$ (рис. 5.28).

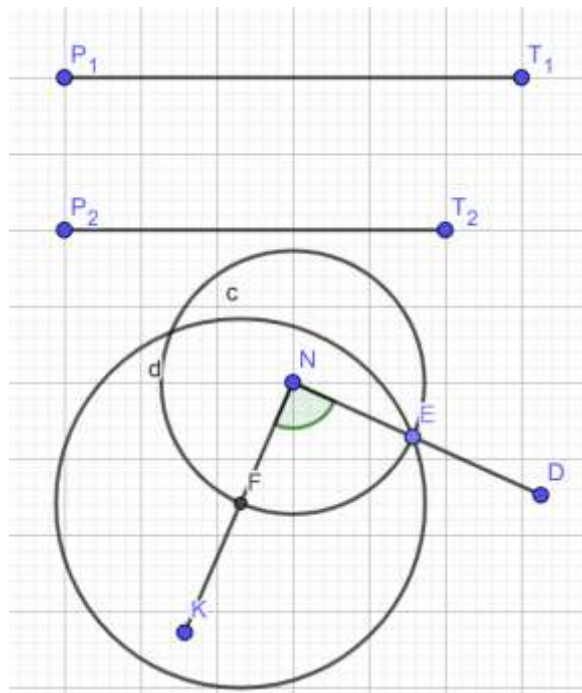


Рис. 5.28

Побудувати: $\triangle ABC$, $\angle ABC = \angle DNK$, $AC = PT_1$, $M \in AC$, $AM = MC$, $BM = P_2T_2$.

Розв'язання. І. Аналіз. Припустимо, побудовано $\triangle ABC$, у якого сторона AC дорівнює заданому відрізку PT_1 , $\angle ABC$ дорівнює заданому

куту $\angle DNK$, медіана BM ($A-M-C$, $AM=MC$) дорівнює заданому відрізку P_2T_2 (рис. 5.30).

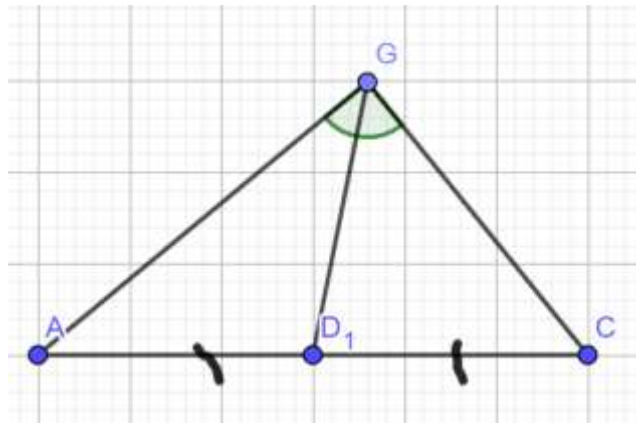


Рис. 5.29

Сторону AC шуканого трикутника ABC можна вважати побудованою за вихідними даними задачі. Вершина B шуканого трикутника ABC належить геометричному місцю точок, з яких відрізок AC «видно» під заданим кутом ($\angle ABC = \angle DNK$), а також геометричному місцю точок, які знаходяться на відстані P_2T_2 від середини M відрізка AC , яку, за відрізком AC легко побудувати. Обидва геометричних місця точок можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Отже, таким чином буде визначено точку B і увесь $\triangle ABC$.

II. Побудова. 1. Згідно аксіоми β_2 , геометричні фігури, задані умовою задачі на побудову, вважаються побудованими.

2. Перейменуємо точку P_1 на точку A , точку T_1 - на точку C .

3. Побудуємо фігуру F , яка є геометричним місцем точок, з яких відрізок AC «видно» під заданим кутом DNK . При цьому унаслідок побудови серединного перпендикуляра l до відрізка AC для даного відрізка буде визначено середину M .

4. Побудуємо коло Q радіусу P_2T_2 з центром у точці M . Воно є геометричним місцем точок, які знаходяться на відстані P_2T_2 від середини M відрізка AC .

5. Визначимо точку B як одну з точок перетину множин F і Q .

6. Побудуємо трикутник ABC , який визначимо як шуканий (рис 5.30).

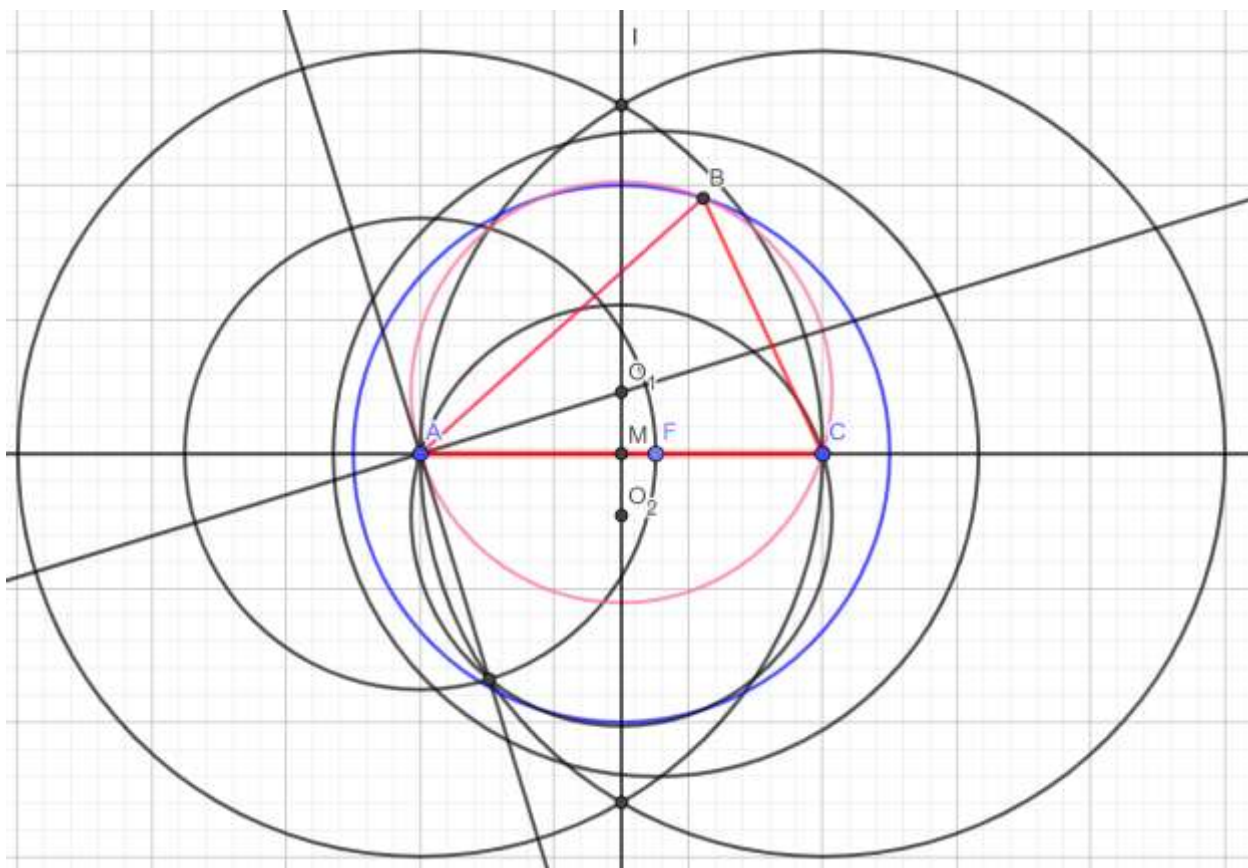


Рис. 5.30

III. Доведення. Розглянемо побудований трикутник ABC . За третім кроком побудов, $AC = PT_1$. Згідно третього і п'ятого кроків побудов, точка B належить такій фігурі F , що $\angle ABC = \angle DNK$, як це і повинно бути відповідно до умови даної задачі. Згідно третього кроку побудов, точка M є серединою відрізка AC , отже, відрізок BM є медіаною трикутника ABC . Згідно четвертого і п'ятого кроків побудов, $BM = PT_2$. У підсумку, трикутник ABC є шуканим.

IV. Дослідження. Дослідимо, спочатку, питання про те, чи при будь-якому варіанті обрання вихідних даних задачу можна розв'язати тим способом, який ми обрали. Зрозуміло, що кроки побудов (1) - (4) можна виконати завжди. Виникає питання щодо існування точок перетину фігури F і кола Q . Виходячи з геометричних міркувань зрозуміло, що необхідні точки перетину будуть існувати тоді та тільки тоді, коли буде мати місце

нерівність $MC < BM \leq ML$, де L – точка перетину серединного перпендикуляра l до відрізка AC з фігурою F . $BM = P_2T_2$,

$$MC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}PT_1, \quad ML = MO_1 + O_1L = MO_1 + O_1A, \text{ де точка } O_1 \text{ є центром}$$

одного з кіл, відповідна дуга якого входить до складу фігури F . Із побудови фігури F випливає, що $\angle AO_1M$ прямокутного трикутника AO_1M дорівнює заданому куту DNK . Отже, із прямокутного трикутника AO_1M ,

$$AO_1 = \frac{AM}{\sin(\angle DNK)} = \frac{PT_1}{2 \sin(\angle DNK)},$$

$$MO_1 = AM \operatorname{ctg}(\angle DNK) = \frac{1}{2}PT_1 \operatorname{ctg}(\angle DNK), \text{ необхідна й достатня умова}$$

наявності розв'язку даної задачі має вигляд

$$\frac{1}{2}PT_1 < P_2T_2 \leq \frac{1}{2}PT_1 \left(\operatorname{ctg}(\angle DNK) + \frac{1}{\sin(\angle DNK)} \right). \quad (5.5)$$

Далі, у випадку наявності розв'язків, виникає питання про їхню кількість. Під час розв'язання даної задачі, згідно обраних вихідних даних, було отримано чотири точки перетину фігури F з колом Q . У той же час, при реалізації етапу аналізу, було, фактично, визначено, що за умови фіксованого відрізка AC , $AC = PT_1$, фігури F і Q за вихідними даними задачі є визначеними однозначно, є симетричними як відносно прямої AC , так і відносно серединного перпендикуляра l до відрізка AC . Звідси випливає, що, у випадку наявності розв'язків - наявності точок перетину фігури F з колом Q - всі отримані трикутники є рівними між собою. Отже, згідно загальної домовленості, для даної задачі, у випадку наявності розв'язку, цей розв'язок вважається єдиним.

Задача 5.3. *На продовженні діаметра AB даного кола Q знайти таку точку, що відрізок дотичної, яка проходить через цю точку до даного кола, від цієї точки до точки дотику, дорівнює радіусу даного кола.*

Дано: коло Q діаметру AB з центром у точці O (рис. 5.31).

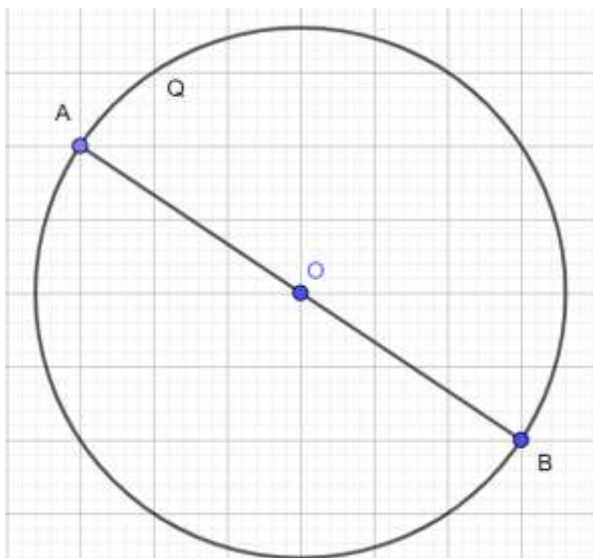


Рис. 5.31

Побудувати: таку точку M , $M \in AB$, що для прямої, яка проходить через точку M і дотикається кола Q у точці K , $MK = OA$.

Розв'язання. І. Аналіз. Припустимо, задачу розв'язано: на прямій AB побудовано таку точку M , що для дотичної прямої l , яка проходить через точку M і дотикається заданого кола Q у точці K , $MK = OA$ (рис. 5.32).

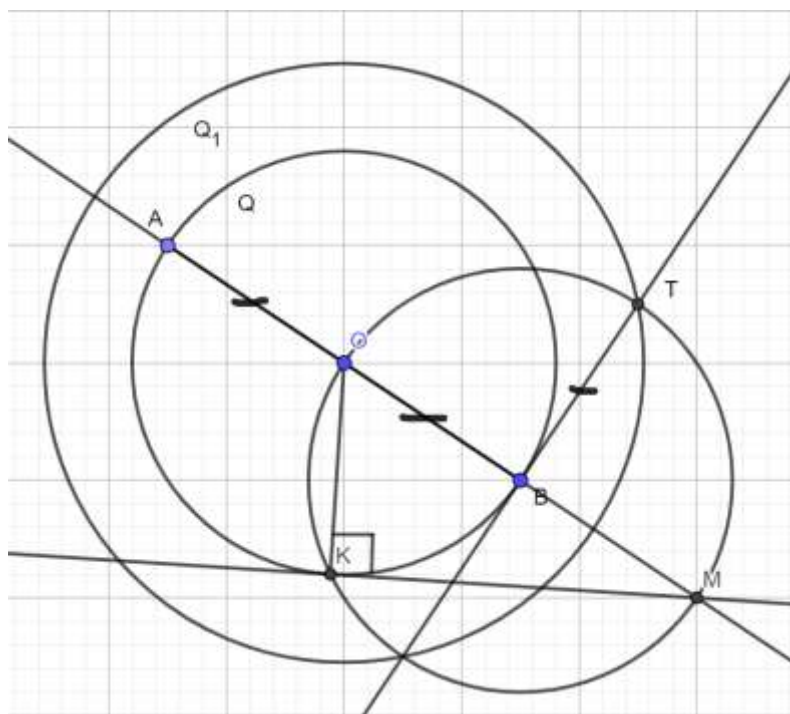


Рис. 5.32

Звернемо увагу на той факт, що, по-перше, точка M належить визначеній умовою задачі прямій AB ; по-друге, вона належить

геометричному місцю точок, відрізки дотичних з яких до заданого кола дорівнюють заданому відрізку, бо, радіус заданого кола є визначеним. Відомо, що таке геометричне місце точок представляє собою коло Q_1 , концентричне до заданого кола Q , яке проходить через одну із відповідних точок. Коло Q_1 не важко побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Для цього достатньо побудувати такий перпендикуляр BT до прямої AB у точці B , що $BT=OA$. Відрізок OT дорівнюватиме радіусу кола Q_1 , $M \in AB \cap Q_1$.

II. Побудова. 1. Згідно аксіоми β_2 теорії побудов за допомогою циркуля і лінійки, задане умовою задачі коло Q з центром у точці O і діаметром AB вважається побудованим.

2. Побудуємо пряму AB .

3. Побудуємо пряму a , яка проходить через точку B перпендикулярно до прямої AB .

4. Відкладемо на прямій a відрізок BT , $BT=OA$.

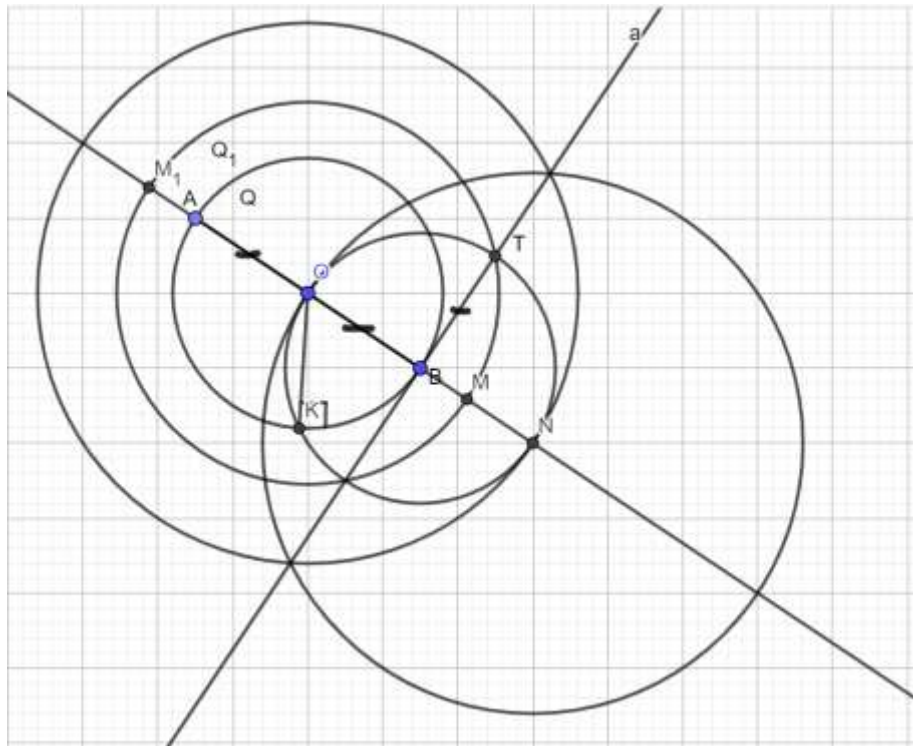


Рис. 5.33

5. Побудуємо коло Q_1 з центром у точці O радіусу OT .

6. Визначимо точки M і M' як точки перетину кола Q_1 з прямою AB (рис. 5.33).

III. Доведення. Згідно третього і четвертого кроків побудов, відрізок TB є перпендикуляром, проведеним з точки T до прямої AB , яка містить діаметр заданого кола Q . Отже, відрізок TB є відрізком дотичної, проведеної з точки T до кола Q . За четвертим кроком побудов, відрізок TB дорівнює відрізку OA , тобто, радіусу заданого кола. Звідси випливає, що коло Q_1 є множиною тих та тільки тих точок площини, відрізки дотичних з яких до даного кола Q дорівнюють його радіусу. Згідно шостого кроку побудов, точки M і M' одночасно належать прямій AB і колу Q_1 . Отже, ці обидві точки задовольняють умову поставленої задачі.

IV. Дослідження. Аналіз етапів побудови дозволяє зробити висновок про те, що дану задачу завжди можна розв'язати тим способом, який ми обрали. Отримано два розв'язки. Іншої кількості розв'язків бути не може, бо, як було обгрунтовано під час проведення аналізу, шукана точка обов'язково повинна належати колу Q_1 і прямій AB . Пряма AB проходить через центр кола Q_1 і тому перетинає його у двох точках. Отже, за будь-якого варіанта обрання вихідних даних, задача має два розв'язки, які можна побудувати обраним способом.

Питання та завдання для самоконтролю до §5

1. Наведіть означення геометричного місця точок евклідової площини, наділених визначеною властивістю.
2. Вкажіть, до якого поняття з теорії множин поняття про геометричне місце точок, наділених визначеною властивістю, є рівносильним.
3. За яких необхідних умов ті чи інші геометричні місця точок евклідової площини можуть бути використаними у теорії геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки?

4. Наведіть приклади геометричних місць точок евклідової площини, які можуть бути використаними у теорії геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки.

5. У чому полягає сутність методу геометричних місць точок розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки?

Задачі для самостійного розв'язування до §5

5.1. Побудувати точку, рівновіддалену від двох прямих, що перетинаються, відрізки дотичних з якої до заданого кола дорівнюють заданому відрізку.

5.2. Побудувати точку, рівновіддалену від двох паралельних прямих і розташовану на заданій відстані від заданого кола.

5.3. У внутрішній області заданого нерозгорнутого кута побудувати точку, рівновіддалену від сторін даного кута і розташовану на заданій відстані від заданої точки.

5.4. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і радіусом описаного кола.

5.5. Побудувати трикутник за двома сторонами та кутом, протилежним до однієї з них.

5.6. Побудувати трикутник за стороною, протилежним кутом та висотою, проведеною з вершини цього кута.

5.7. Побудувати трикутник за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, та радіусом описаного навколо даного трикутника кола.

5.8. Побудувати рівнобедрений трикутник за основою і радіусом вписаного кола.

5.9. Побудувати точку, рівновіддалену від двох заданих точок і розташовану на заданій відстані від заданої прямої.

5.10. Задані прямі a і b перетинаються. Побудувати точку, яка знаходиться на заданій відстані d від прямої a і на заданій відстані m від прямої b .

5.11. Побудувати коло, яке проходить через задану точку і дотикається заданої прямої у заданій точці.

5.12. Побудувати коло, яке проходить через задану точку і дотикається кожної з двох заданих паралельних прямих.

5.13. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою та сумою катетів.

5.14. Побудувати коло, яке проходить через задану точку і дотикається заданого кола у заданій на цьому колі точці.

5.15. Задано коло з центром у точці O і точка A у його зовнішній області. Побудувати до даного кола січну, яка проходить через точку A і перетинає дане коло у точках B і C так, що $A-B-C$, $AB=BC$.

5.16. Побудувати коло, яке проходить через задані точки A і B та дотикається заданої прямої, паралельної до прямої AB .

5.17. Задано прямокутний трикутник. Побудувати коло, яке проходить через вершину прямого кута та дотикається до гіпотенузи, центр якого належить одному з катетів.

5.18. Побудувати коло, дотичне до заданого кола і до заданої прямої у заданій на ній точці.

5.19. Побудувати коло, яке дотикається сторін даного нерозгорнутого кута, до того ж, однієї з цих сторін у заданій на ній точці.

5.20. На заданому колі побудувати точку, з якої інше задане коло «видно» під заданим кутом.

5.21. Вершини A , B , C заданого трикутника ABC розташовані у одній півплощині відносно заданої прямої a . Побудувати на заданій прямій a таку точку M , що площа трикутника AMB дорівнює половині площі трикутника ABC .

5.22. Задані відрізки AB і CD належать прямим, що перетинаються. На заданій прямій a побудувати таку точку P , що трикутники ABP і CDP мають однакові площі.

5.23. За допомогою циркуля і лінійки заданий трикутник ABC поділити на три рівновеликі частини відрізками прямих, проведених через задані точки D і E на стороні AC .

5.24. Побудувати точку, дотичні з якої до трьох заданих кіл є рівними між собою.

5.25. Задано два концентричних кола і точку. Побудувати коло, яке проходить через задану точку і дотикається заданих кіл.

5.26. Побудувати коло заданого радіусу, яке дотикається двох заданих кіл.

5.27. Побудувати коло, дотичне до трьох заданих кіл, два з яких є концентричними.

5.28. Побудувати трикутник за основою, протилежним кутом і точкою, що є основою бісектриси, проведеної з вершини даного кута.

5.29. Побудувати ромб так, щоб дві його протилежні вершини були розташовані у двох заданих точках, а третя – належала би заданому колу.

5.30. Побудувати паралелограм за його стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і кутом між діагоналями.

§6. Застосування теорії рухів евклідової площини

до розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки

Як відомо, *рухом евклідової площини називають перетворення цієї площини (взаємно однозначне відображення площини на себе), яке зберігає відстані між будь-якими двома її точками* ([4; 12; 23], наприклад).

Під планіметричною геометричною фігурою розуміють будь-яку непорожню підмножину точок евклідової площини. *Рухом планіметричної геометричної фігури називають зсування відповідного руху евклідової площини на сукупність точок даної фігури*. Якщо рух евклідової площини переводить фігуру F у фігуру F' , то при цьому між фігурами F і F' встановлюється взаємно однозначна відповідність, фігура F' дорівнює фігурі F ([20; 23], наприклад).

Відомо, що усі рухи евклідової площини зберігають відношення приналежності між множиною точок і множиною геометричних фігур, що містять більш ніж одну точку, утворюють групу відносно операції композиції перетворень. Кожний рух евклідової площини є або 1) тотожним перетворенням цієї площини, або 2) її паралельним перенесенням, або 3) симетрією відносно точки, або 4) симетрією відносно прямої, або обертанням навколо точки на певний орієнтований кут α ($0^\circ < \alpha \leq 180^\circ$), або 6) ковзною симетрією (композицією паралельного перенесення вздовж певної прямої даної площини та симетрії відносно цієї прямої) [4; 23]. Отже, будь-яке застосування теорії рухів евклідової площини зводиться до застосування теорії саме вищезазначених рухів (2) – (5).

Кожний із рухів (2) – (5) задається своїми апаратом та законом відображення, тобто, правилом, за яким для кожної точки при даному русі, за допомогою заданого апарату, визначають її образ.

Апарат кожного із рухів (2) – (5) можна задати за допомогою циркуля і лінійки навіть за умови порожньої множини вихідних даних. При заданому

апараті образ кожної точки при кожному із рухів (2) – (5) можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

Опишемо такі побудови.

1. Паралельне перенесення.

Як правило, вважають, що паралельне перенесення задається за допомогою певного вектору. При цьому мається на увазі вільний вектор, який, у свою чергу, задається своїм довільним представником – певним напрямленим відрізком. Ненульовим напрямленим відрізком називають відрізок, для якого вказано, яка з його граничних точок є початком, а яка – кінцем. Кінець, як правило, позначають стрілкою. Нульовий напрямлений відрізок з геометричної точки зору представляє собою точку. Відрізок на площині може бути заданим за допомогою лінійки. Стрілку, зрозуміло, за допомогою циркуля і лінійки задати неможливо, але, виходячи з означення, для того, щоб перетворити звичайний відрізок на напрямлений, достатньо вказати порядок його кінців. (Подібне задання ненульового напрямленого відрізка, зрозуміло, є рівносильним до задання променю і певної внутрішньої точки на ньому; паралельне перенесення на нульовий вектор, якому відповідає нульовий напрямлений відрізок, представляє собою тотожне перетворення площини, його, взагалі, не має сенсу застосовувати для розв'язання геометричних задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки).

Отже, нехай паралельне перенесення g евклідової площини задано за допомогою напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$, точка A не співпадає з точкою B . Розглянемо довільну точку M . $g(M) = M'$, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$. Якщо точка M не належить прямій AB , то побудувати точку M' можна, наприклад, наступним чином (рис. 6.1).

Побудова.

1. Виходячи з того, що відрізок AB і точка M вважаються побудованими, будемо відрізок AM .

2. Будуємо коло d з центром у точці B радіусу AM .

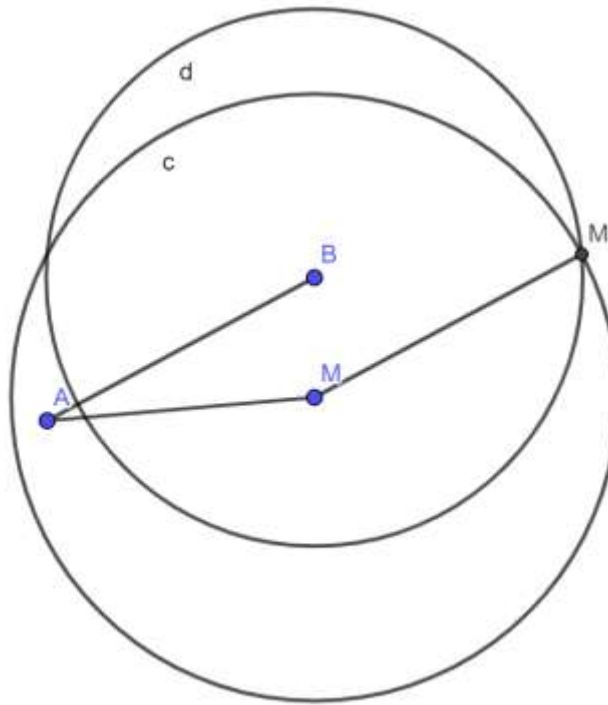


Рис. 6.1.

3. Будуємо коло c з центром у точці M радіусу AB .

4. Визначаємо точку M' як таку точку перетину кіл d і c , яка лежить у іншій півплощині відносно прямої BM ніж точка A . Точка M' є шуканою.

Доведення. Згідно четвертого кроку побудов, кола d і c перетинаються у двох точках - M' і M'' , які лежать по різні сторони відносно прямої BM - лінії центрів цих кіл. Згідно другого, третього і четвертого кроків побудов, $\triangle MM'B = \triangle MM''B = \triangle BMA$ за третьою ознакою рівності трикутників, за трьома сторонами: сторона BM є спільною, $MM' = MM'' = MB$, $BM' = BM'' = AM$. В силу існування трикутника MAB , точка A і одна з точок - M' або M'' - лежать по різні сторони відносно прямої BM . Згідно четвертого кроку побудов, ми саме таку точку визначили як точку M' . Розглянемо чотирикутник $ABM'M$. Його протилежні сторони є попарно рівними відрізками ($MA = BM'$, $AB = MM'$), які, зрозуміло, попарно не перетинаються і належать одній площині. Отже, $ABM'M$ є таким

паралелограмом, що $MA \parallel BM$, $AB \parallel MM'$. Звідси випливає, що $|\overrightarrow{MM'}| = |\overrightarrow{AB}|$, $\overrightarrow{MM'} \parallel \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MM'} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AB}$, бо відрізок BM' не перетинає пряму AM . Отже, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$, точка M' є шуканою.

Якщо точка M співпадає з точкою A , то точка M' співпадає з точкою B і будувати взагалі нічого не потрібно. Якщо точка M належить прямій AB і не співпадає з точкою A (рис. 6.2), то треба побудувати коло Q з центром у точці M радіусу AB . Пряма AB перетинає коло Q у двох точках, які належать взаємно доповняльним променям з початком у точці M . Один з цих променів є однаково напрямленим до променя AB , інший – протилежно напрямленим. За шукану точку M' приймаємо ту точку перетину кола Q з прямою AB , яка належить однаково напрямленому променю (рис. 6.2). Відповідне доведення є очевидним.

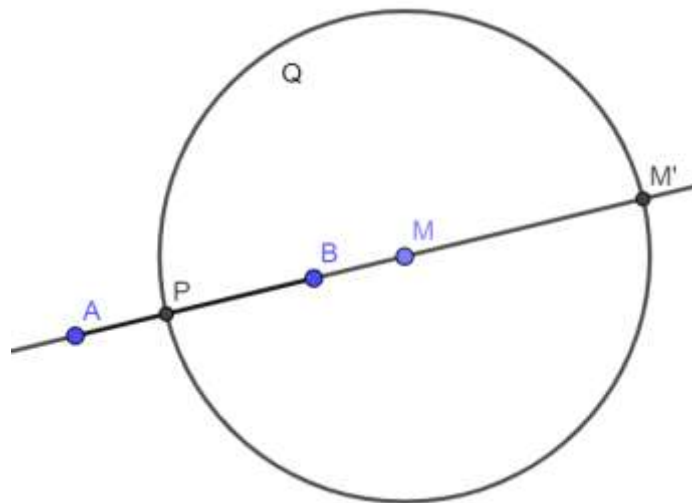


Рис. 6.2

2. Симетрія відносно точки.

Симетрія відносно точки задається точкою, яку при цьому називають точкою симетрії. Принаймні одна точка на площині вважається побудованою згідно першої аксіоми β_1 теорії побудов (навіть, дві), точку завжди можна побудувати як точку перетину двох прямих або одну з двох точок перетину прямої та кола. Отже, апарат даного перетворення можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

Нехай точку O визначено як центр симетрії (рис. 6.3). Якщо точка M не співпадає з точкою O , то для побудови точки M' , симетричної до точки M відносно точки O , треба побудувати промінь MO , відрізок MO і коло Q з центром у точці O радіусу MO . Промінь MO перетинає коло Q у шуканій точці M' . Доведення є очевидним. Зрозуміло, що при подібній симетрії точка O переходить сама у себе, у цьому випадку будувати нічого не потрібно.

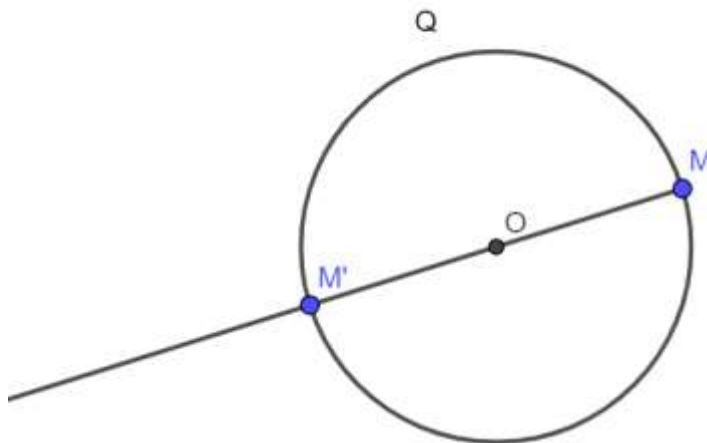


Рис. 6.3

3. Симетрія відносно прямої.

Апарат даного виду рухів складається з прямої, яка має назву осі симетрії. Зрозуміло, що пряма є тією геометричною фігурою, яку можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

Нехай осьову симетрію задано за допомогою прямої l . Якщо точка M належить прямій l , то, унаслідок симетрії відносно цієї прямої, вона переходить сама у себе. Якщо точка M не належить прямій l (рис. 6.4), то можна побудувати пряму MK , яка проходить через точку M перпендикулярно до прямої l , визначити точку P як точку перетину прямих l і MK , на промені, доповняльному до променю PM , відкласти відрізок PM' , який дорівнює відрізку PM . Відповідні побудови зображено на рис. 6.4. Зрозуміло, що їх можна виконати за допомогою циркуля і лінійки за будь-якого положення точки M відносно прямої l коли точка M не належить прямій l , результат виконання є визначеним однозначно.

обертання задано за допомогою точки O і кута B_1AB_2 , утвореного променями AB_1 і AB_2 , промінь AB_1 прийнято за перший, промінь AB_2 – за другий.

Якщо кут обертання α складає 180° , то ми маємо просто симетрію відносно точки O , тобто, вид руху, досліджений попередньо.

Отже, розглянемо той випадок, коли $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Якщо точка M співпадає з точкою O , то при даному обертанні вона переходить сама у себе. Якщо точка M не співпадає з точкою O , то побудуємо коло Q_1 з центром у точці O радіусу OM (рис. 6.6) і коло Q_2 того самого радіусу з центром у вершині A заданого кута α (рис. 6.5). Коло Q_2 перетне сторони AB_1 і AB_2 заданого кута, відповідно, в точках P і T . В силу того, що

$0^\circ < \alpha < 180^\circ$, відрізок PT є меншим за діаметр кола Q_2 , так само, як і кола Q_1 . Побудуємо коло Q_3 з центром у точці M радіусу PT . В силу того, що

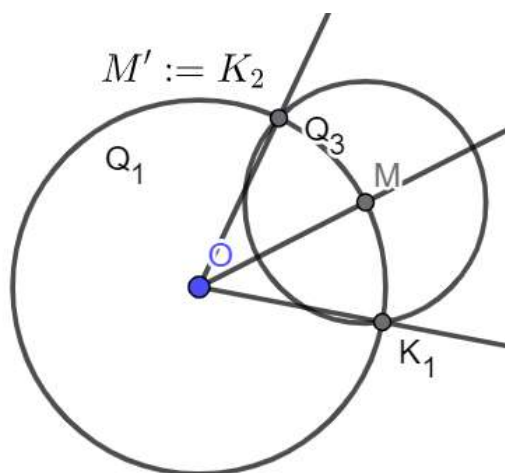


Рис. 6.6

точка M належить колу Q_1 , а радіус кола Q_3 є меншим за діаметр кола Q_1 , коло Q_3 перетне коло Q_1 у двох точках K_1 і K_2 . В силу того, що $\triangle OK_1B = \triangle OK_2M = \triangle PAT$ за трьома сторонами, правильними є рівності $\angle K_1OM = \angle MOK_2 = \angle PAT = \alpha$. Кути $\angle MOK_1$ і $\angle MOK_2$ є кутами, відкладеними від променю OM у різні півплощини. Один з цих кутів має ту

ж саму орієнтацію, що й заданий кут B_1AB_2 . У випадку, зображеному на рис.6.5, заданий кут B_1AB_2 має праву орієнтацію. Із двох отриманих кутів $\angle MOK_1$ має ліву орієнтацію, а $\angle MOK_2$ – праву. Отже, у якості точки M' треба обрати саме точку K_2 .

У підсумку, обґрунтовано, що при будь-якому заданому апараті обертання навколо заданої точки на заданий орієнтований кут образ довільної точки площини можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Зрозуміло, що у будь-якому випадку результат побудови є визначеним однозначно вже тому, що у евклідовій геометрії сам результат такого обертання є визначеним однозначно.

Будь-який промінь евклідової площини є однозначно визначеним своїм початком і довільною внутрішньою точкою. Будь-яке коло евклідової площини є однозначно визначеним своїм центром і своєю довільною точкою, або, що, фактично, є те ж самим, своїм центром і відрізком, який дорівнює його радіусу. При будь-якому русі евклідової площини образом променя є промінь, образом кола – рівне до нього коло, тобто, коло того ж самого радіусу. Отже, якщо апарат певного конкретного руху задано, то образ кожного променя і кожного кола можна побудувати однозначно за допомогою циркуля і лінійки. Звідси випливає, що, якщо певну геометричну фігуру, виходячи з певних вихідних даних можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки, то образ цієї фігури при будь-якому із вищевказаних видів рухів (отже, при будь-якому русі площини взагалі) також можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

Наведені характеристики рухів евклідової площини створюють передумови для застосування теорії рухів до розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки. Сутність такого застосування полягає у наступному.

Під час реалізації етапу аналізу розв'язання відповідної задачі, виходячи із заданих геометричних фігур і геометричної фігури, визначеної як результат

розв'язання, виконують додаткову побудову, яка полягає у застосуванні певного руху до шуканої геометричної фігури або певних її складових. Як наслідок, утворюється нова геометрична фігура, яку, за вихідними даними задачі, можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Після цього, шукану геометричну фігуру або, фактично, вже буде побудовано, або можна буде побудувати як результат використання перетворення, оберненого до застосованого руху, яке, у свою чергу, є рухом того ж самого виду. Зрозуміло, що реалізація наступного етапу розв'язування поставленої задачі – етапу побудови – повинна відповідати плану побудови, визначеному унаслідок проведеного аналізу.

В силу того, що під час розв'язування кожної окремої задачі на побудову методом рухів найчастіше використовують лише один із вищевказаних видів рухів, як правило, окремо ведуть мову про метод паралельного перенесення розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки, метод симетрії, метод обертання. Як спеціальний випадок методу симетрії відносно прямої часто виокремлюють так званий метод спрямлення.

Подалі, наведемо відповідні приклади.

Задача 6.1. Побудувати трапецію за основами та діагоналями.

Дано: відрізки P_1T_1 , P_2T_2 , P_3T_3 , P_4T_4 (рис. 6.7).

Побудувати: Трапецію $ABCD$ з основами BC і AD та бічними сторонами AB і CD , для якої $BC = P_1T_1$, $AD = P_2T_2$, $AC = P_3T_3$, $BD = P_4T_4$.

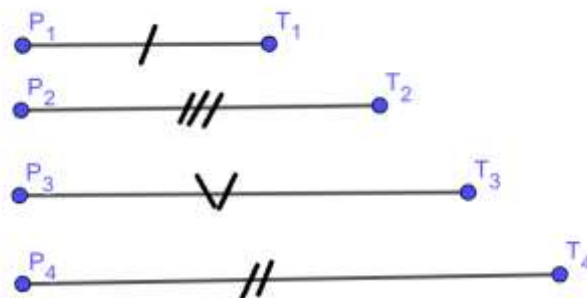


Рис. 6.7.

Розв’язання. I. Аналіз. Припустимо, шукану трапецію $ABCD$ побудовано (рис. 6.8).

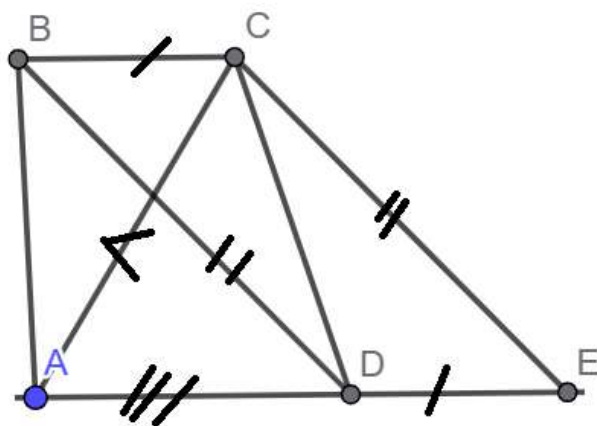


Рис. 6.8.

Розглянемо паралельне перенесення її діагоналі BD на вектор $\overrightarrow{BC}$. Згідно властивостей паралельного перенесення, відрізок BD при цьому переміститься у такий відрізок CE , що чотирикутник $BCED$ буде паралелограмом, тобто, точка E лежатиме на прямій AD ($AD \parallel BC$), $DE = BC$, $CE \parallel BD$, $CE = BD$. Тоді у трикутнику ACE , за вихідними даними задачі, відомими будуть усі три сторони: сторона AC – безпосередньо за умови задачі, $CE = BD$, $AE = AD + DE = AD + DC$. Отже, цей трикутник можна буде побудувати за допомогою циркуля і лінійки, при цьому, одночасно, буде побудовано і точку D . Невідому вершину B трапеції $ABCD$ тоді можна буде побудувати як результат паралельного перенесення точки C на вектор $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{BC}$.

II. Побудова. 1. Відрізки, задані умовою задачі, вважаються побудованими.

2. На довільній прямій, послідовно, побудуємо відрізки AD і DE , $AD = P_2 T_2$, $DE = P_1 T_1$.

3. Побудуємо трикутник ACE за сторонами AE , AC і CE , $AC = P_3 T_3$, $CE = P_4 T_4$.

4. Точку B побудуємо як одну з двох точок перетину кола Q_1 з центром у точці D радіусу P_4T_4 і кола Q_2 з центром у точці C радіусу P_1T_1 . Оберемо саме ту з двох точок перетину цих кіл, яка лежить по ту ж саму сторону відносно прямої CE , що й точка D .

5. Побудуємо чотирикутник $ABCD$ (рис. 6.9).

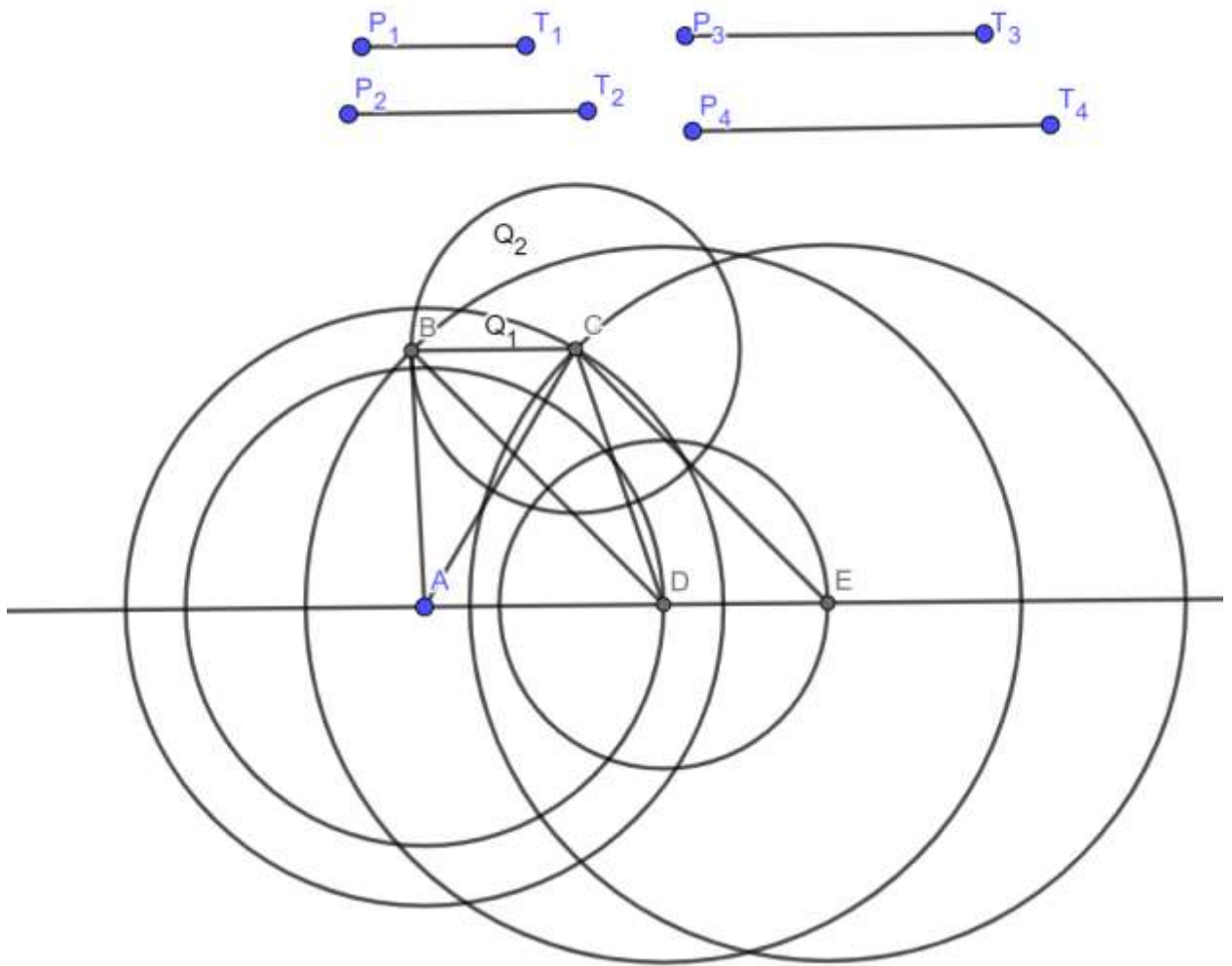


Рис. 6.9.

III. Доведення. Розглянемо побудований чотирикутник $ABCD$. $AD = P_2T_2$ – згідно другого кроку побудов. $BC = P_1T_1$ – згідно четвертого кроку побудов. Згідно четвертого кроку побудов, точки B і D лежать по одну сторону відносно прямої CE – відрізок BD пряму CE не перетинає, відрізки DB , BC , CE і ED є сторонами чотирикутника $DBCE$. З іншого боку, згідно другого і четвертого кроків побудов, $DE = BC$. Згідно третього і четвертого кроків побудов, $DB = CE$. Звідси випливає, що чотирикутник

$DBCE$ є паралелограмом, $BC \parallel DE$. Згідно другого кроку побудов, відрізок DE лежить на прямій AD , отже, для чотирикутника $ABCD$, $AD \parallel BC$. За умови задачі, $P_1T_1 \neq P_2T_2$. Згідно другого і четвертого кроків побудов, звідси випливає, що $AD \neq BC$, чотирикутник $ABCD$ є трапецією з основами BC і AD та бічними сторонами AB і CD (відрізки AB і CD не можуть бути діагоналями трапеції $ABCD$ бо вони не перетинаються: точки B і E лежать по різні сторони відносно прямої CD тому, що є протилежними вершинами паралелограма $DBCE$, точки A і E лежать по різні сторони відносно прямої CD тому, що, згідно другого кроку побудов, точка D є внутрішньою точкою відрізка AE , отже, точки A і B лежать по одну сторону відносно прямої CD). Відрізки BD і AC є діагоналями трапеції $ABCD$. $AC = P_3T_3$ згідно третього кроку побудов, $BD = P_4T_4$ згідно четвертого кроку побудов. У підсумку, трапеція $ABCD$ є шуканою.

IV. Дослідження. З'ясуємо, по-перше, чи при будь-якому варіанті обрання вихідних даних задачу можна розв'язати тим способом, який ми обрали. Зрозуміло, що перший та другий кроки побудов є виконаними завжди. Третій крок побудов є виконаним тоді та тільки тоді, коли справджується умова існування трикутника ACE . «У термінах» вихідних даних це означає, що повинна бути вірною подвійна нерівність

$$\left| P_3T_3 - P_4T_4 \right| < P_1T_1 + P_2T_2 < P_3T_3 + P_4T_4 \quad (6.1)$$

З іншого боку, якщо трапеція $ABCD$ існує, то існує і трикутник ACE , умову (6.1) виконано. Отже, для існування розв'язку поставленої задачі, умова (6.1) є необхідним обмеженням на вихідні дані. За умови побудови трикутника ACE , трикутник DBC можна побудувати завжди, бо він дорівнює трикутнику CED , який є побудованим одночасно з трикутником ACE . При цьому, автоматично, буде побудовано чотирикутник $ABCD$ з попарно протилежними сторонами AB і CD та BC і AD , при цьому буде виконано умову $AD \parallel BC$. Отже, чотирикутник $ABCD$ буде або

паралелограмом, або трапецією. За умови задачі треба, щоби це була саме трапеція. Необхідним й достатнім для цього є виконання умови $AD \neq BC$, або, «у термінах вихідних даних», $P_1T_1 \neq P_2T_2$.

Отже, задача має розв'язок, який можна знайти тим способом, який ми обрали, тоді та тільки тоді, коли виконано умову (6.1) і $P_1T_1 \neq P_2T_2$.

Далі постає питання про кількість розв'язків. Можна довести, що, за умови існування розв'язку, він є єдиним, бо трапеції, що мають, відповідно, однакові основи і діагоналі, є рівними між собою. Цей факт важко довести у межах курсів планіметрії закладів загальної середньої освіти, бо для цього треба довести існування руху, який переводить одну трапецію у іншу. (У курсах геометрії закладів загальної середньої освіти дві фігури називають рівними, якщо вони суміщаються накладанням, аксіоми накладання у явному виді не вказано, ознаки рівності сформульовано і у тій чи іншій мірі обґрунтовано лише для трикутників довільної форми та для прямокутних трикутників, у курсі планіметрії дев'ятого класу мова йде про те, що поняття «накладання» і «рух» є тотожними, певні властивості рухів площини перелічено, далеко не всі з них обґрунтовано).

Отже, проведемо доведення «на мові рухів». Нехай задано трапеції $A_1B_1C_1D_1$ і $A_2B_2C_2D_2$, відповідно з основами B_1C_1 і A_1D_1 та B_2C_2 і A_2D_2 , бічними сторонами A_1B_1 і C_1D_1 , та A_2B_2 і C_2D_2 , нехай $B_1C_1 = B_2C_2$, $A_1D_1 = A_2D_2$, $A_1C_1 = A_2C_2$, $B_1D_1 = B_2D_2$ (рис. 6.10).

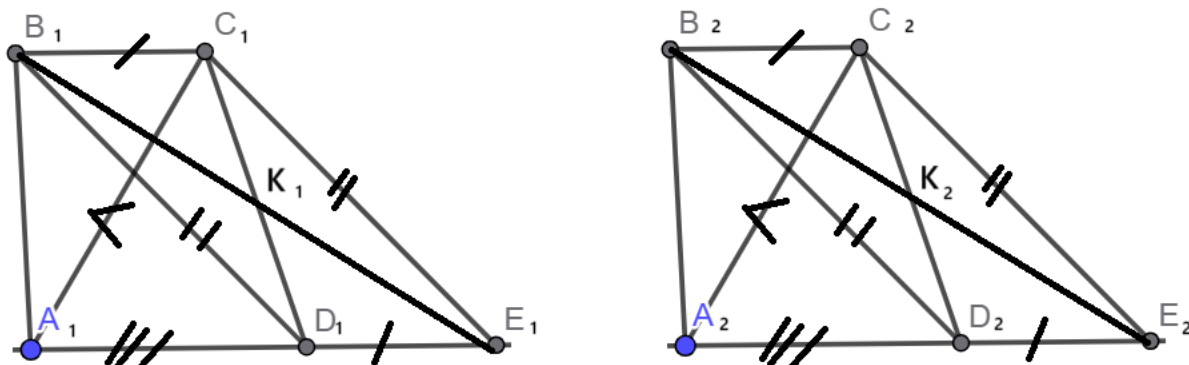


Рис. 6.10

Паралельно до прямої B_1D_1 проведемо пряму C_1E_1 до перетину з прямою A_1D_1 у точці E_1 , паралельно до прямої B_2D_2 проведемо пряму C_2E_2 до перетину з прямою A_2D_2 у точці E_2 . Протилежні сторони чотирикутників $B_1C_1E_1D_1$ і $B_2C_2E_2D_2$ є попарно паралельними, тому ці чотирикутники є паралелограмами і $D_1E_1 = B_1C_1$, $C_1E_1 = B_1D_1$, $D_2E_2 = B_2C_2$, $C_2E_2 = B_2D_2$. Розглянемо трикутники $A_1C_1E_1$ і $A_2C_2E_2$. $A_1C_1 = A_2C_2$ – за умови, $C_1E_1 = B_1D_1$ – за доведеним, $B_1D_1 = B_2D_2$ – за умови, $C_2E_2 = B_2D_2$ – за доведеним. Отже, $C_1E_1 = C_2E_2$, $A_1D_1 = A_2D_2$ – за умови, $D_1E_1 = B_1C_1$ – за доведеним, $B_1C_1 = B_2C_2$ – за умови, $D_2E_2 = B_2C_2$ – за доведеним, $A_1E_1 = A_1D_1 + D_1E_1$, $A_2E_2 = A_2D_2 + D_2E_2$ згідно побудови. У підсумку,

$$A_1E_1 = A_1D_1 + D_1E_1 = A_1D_1 + B_1C_1 = A_2D_2 + B_2C_2 = A_2D_2 + D_2E_2 = A_2E_2,$$

Трикутники $A_1C_1E_1$ і $A_2C_2E_2$ є рівними за третьою ознакою рівності трикутників, за трьома сторонами. Останнє означає, що існує рух g , який переводить трикутник $A_1C_1E_1$ у трикутник $A_2C_2E_2$ так, що $g(A_1) = A_2$, $g(C_1) = C_2$, $g(E_1) = E_2$, відрізок A_1E_1 переходить у відрізок A_2E_2 . Точка D_1 належить відрізку A_1E_1 , точка D_2 належить відрізку A_2E_2 , $A_1D_1 = A_2D_2$. В силу того, що під час кожного руху відрізок переходить у відрізок і довжини відрізків зберігаються, $g(D_1) = D_2$. Звідси випливає, що при русі g трикутник $D_1C_1E_1$ переходить у трикутник $D_2C_2E_2$ так, що при цьому його сторона D_1C_1 переходить у сторону D_2C_2 . Розглянемо діагоналі B_1E_1 і B_2E_2 паралелограмів $B_1C_1E_1D_1$ і $B_2C_2E_2D_2$. Як відомо, діагоналі кожного паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Отже, якщо $B_1E_1 \cap C_1D_1 = K_1$, $B_2E_2 \cap C_2D_2 = K_2$, то $B_1K_1 = K_1E_1$, $C_1K_1 = K_1D_1$, $B_2K_2 = K_2E_2$, $C_2K_2 = K_2D_2$. Але при кожному русі середина відрізка

переходить у середину відрізка-образа, пряма – у пряму, зберігається порядок точок на прямій. Тому $g(K_1)=K_2$, $g(K_1E_1)=K_2E_2$, в силу того, що $B_1-K_1-E_1$, $B_1K_1=K_1E_1$, $g(B_1)-K_2-E_2$, $g(B_1)K_2=K_2E_2$. Але $B_2-K_2-E_2$, $B_2K_2=K_2E_2$ на промені, доповняльному до променю K_2E_2 , є однозначно визначеною така точка B_2 , що $B_2K_2=K_2E_2$. Отже, $g(B_1)=B_2$. Але тоді $g(A_1B_1C_1D_1)=A_2B_2C_2D_2$, трапеція $A_1B_1C_1D_1$ дорівнює трапеції $A_2B_2C_2D_2$, що й треба було довести.

Задача 6.2. *Задані коло Q_1 з центром у точці O_1 , коло Q_2 з центром у точці O_2 і пряму a . Для заданих кіл побудувати січну, яка є паралельною до заданої прямої a і утворює в даних колах хорди, сума яких дорівнює заданому відрізку.*

Дано: коло Q_1 з центром у точці O_1 , коло Q_2 з центром у точці O_2 , пряму a , відрізок PT (рис. 6.11).

Побудувати: пряму b , $b \parallel a$, пряма b перетинає коло Q_1 і утворює при цьому хорду A_1B_1 , пряма b перетинає коло Q_2 і утворює при цьому хорду A_2B_2 , $A_1B_1 + A_2B_2 = PT$.

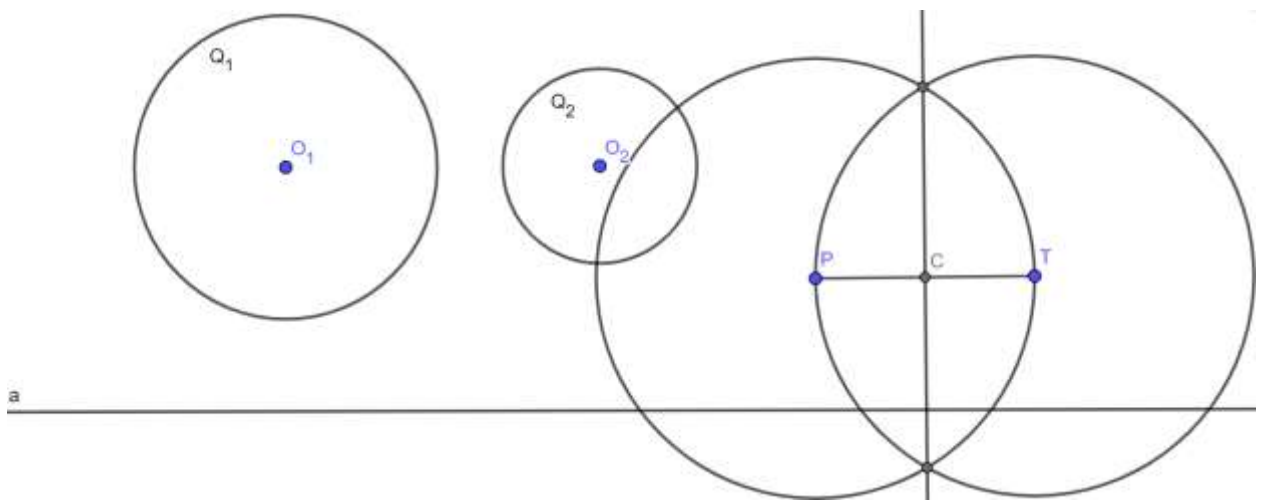


Рис. 6.11

Розв'язання. І. Аналіз. Припустимо, задачу розв'язано, побудовано таку пряму b , яка є паралельною до прямої a , при перетині кола Q_1 утворює хорду A_1B_1 , при перетині кола Q_2 утворює хорду A_2B_2 , $A_1B_1 + A_2B_2 = PT$, напрямлені відрізки $\overrightarrow{A_1B_1}$ і $\overrightarrow{A_2B_2}$ є однаково спрямованими (рис. 6.12).

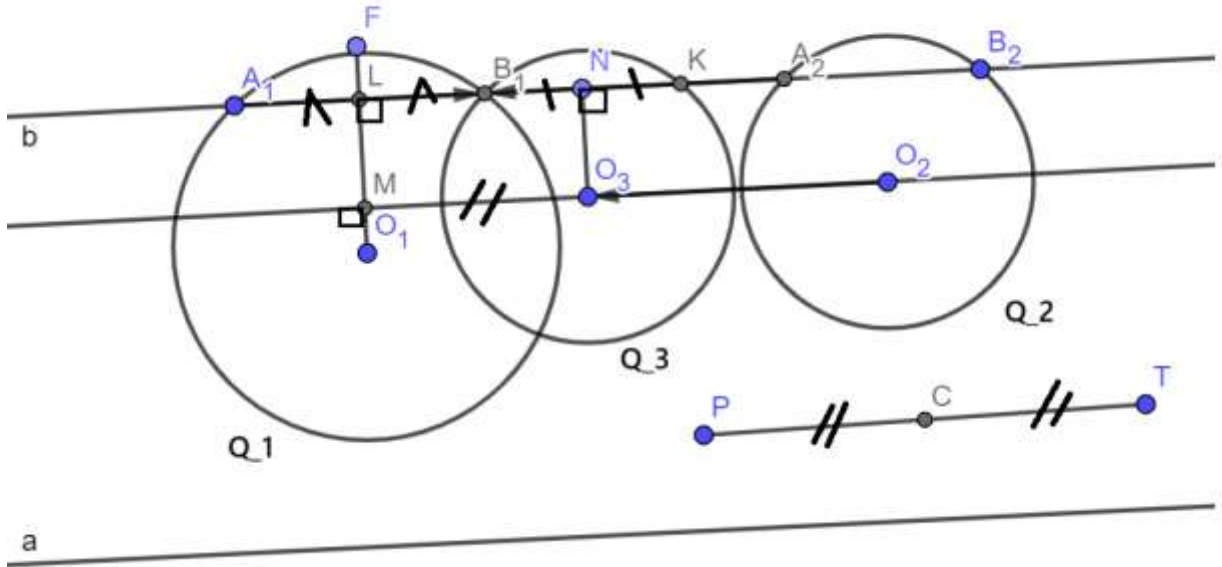


Рис.6.12

Розглянемо паралельне перенесення кола Q_2 на вектор $\overrightarrow{A_2B_1}$. Унаслідок такого перенесення коло Q_2 перейде у коло Q_3 такого самого радіусу з центром у точці O_3 , $\overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{A_2B_1}$. Хорда A_2B_2 кола Q_2 перейде при цьому в хорду B_1K кола Q_3 , $B_1K = A_2B_2$, $A_1 - B_1 - K$, $A_1B_1 + B_1K = PT$ (рис. 6.12). Проведемо $O_1L \perp A_1B_1$, $O_3N \perp B_1K$. В силу того, що перпендикуляр, проведений з центру кола до хорди, ділить цю хорду навпіл,

$$A_1L = LB_1 = \frac{1}{2}A_1B_1, \quad B_1N = NK = \frac{1}{2}B_1K,$$

$$LN = LB_1 + B_1N = \frac{1}{2}A_1B_1 + \frac{1}{2}B_1K = \frac{1}{2}(A_1B_1 + A_2B_2) = \frac{1}{2}PT.$$

Продовжимо пряму O_2O_3 до перетину з прямою O_1L у точці M . В силу того, що $O_2O_3 \parallel A_2B_1$, $O_1L \parallel O_3N$ як два перпендикуляра до однієї прямої, чотирикутник $MLNO_3$ є паралелограмом з прямим кутом, тобто, прямокутником, з протилежними сторонами ML і NO_3 та LN і MO_3 , $LN \parallel MO_3$ ($MO_3 \parallel b$, $MO_3 \parallel a$), $MO_3 = LN = \frac{1}{2}PT$, $\overrightarrow{MO_3} = \overrightarrow{LN}$.

За вихідними даними задачі можна побудувати пряму O_1L , $O_1L \perp a$, пряму O_2M , $O_2M \perp O_1L$. Далі, на промені MO_2 можна відкласти відрізок MO_3 , $MO_3 = \frac{1}{2}PT$. У підсумку, буде визначено положення точки O_3 . Далі, можна буде побудувати коло Q_3 , визначити його точку перетину B_1 з колом Q_1 , провести через точку B_1 шукану пряму b , паралельну до прямої a .

II. Побудова. 1. Фігури, задані умовою задачі, вважаються побудованими.

2. Будуємо пряму l , яка проходить через центр O_1 кола Q_1 перпендикулярно до заданої прямої a .

3. Через центр O_2 заданого кола Q_2 , паралельно до прямої a , проводимо пряму m .

4. Позначаємо через M точку перетину прямих m і l .

5. Ділимо навпіл заданий відрізок PT .

6. На промені MO_2 відкладаємо відрізок MO_3 , який дорівнює половині заданого відрізка PT .

7. Будуємо коло Q_3 з центром у точці O_3 , радіус якого дорівнює радіусу заданого кола Q_2 .

8. Визначаємо точку B_1 як точку перетину кіл Q_1 і Q_3 .

а, згідно другого кроку побудов, $l \perp a$. Проведемо $O_3N \perp B_1K$. Чотирикутник $MLNO_3$ є паралелограмом ($LN \parallel MO_3$ як відрізки паралельних прямих b і m , $ML \parallel O_3N$ як відрізки прямих, кожна з яких є перпендикулярною до прямої b), що має прямий кут. Отже, це прямокутник, $LN = MO_3$. Згідно шостого кроку побудов, MO_3 дорівнює половині заданого відрізка PT . Тому і $LN = \frac{1}{2}PT$. З іншого боку, $O_1L \perp A_1B_1$ як відрізки взаємно перпендикулярних прямих l і b , $O_3N \perp B_1K$ за побудовою. Перпендикуляр, проведений з центра кола до хорди, ділить цю хорду навпіл. Звідси випливає, що $LB_1 = \frac{1}{2}A_1B_1$, $B_1N = \frac{1}{2}B_1K$. Але $A_1 - B_1 - K$ і тому

$$A_1K = A_1B_1 + B_1K = 2LB_1 + 2B_1N = 2(LB_1 + B_1N) = 2LN = PT.$$

З іншого боку, $B_1K = A_2B_2$ і тому $A_1K = A_1B_1 + A_2B_2$, $A_1B_1 + A_2B_2 = PT$, пряма b є шуканою.

IV. Дослідження. Під час реалізації етапу аналізу було обґрунтовано, що, якщо задача має розв'язок, то її можна розв'язати тим способом, який ми обрали. Розв'язання задачі було зведено до побудови точки перетину двох кіл. Два кола можуть перетинатися не більш ніж у двох точках. Отже, задача може мати не більш ніж два розв'язки.

Під час розв'язання поставленої задачі за обраних вихідних даних, ми, фактично, отримали два розв'язки – побудоване коло Q_3 перетнуло задане коло Q_1 не лише у точці B_1 , а й у точці B'_1 , пряма b' , яка проходить через точку B'_1 паралельно до заданої прямої a , перетинає коло Q_1 у точці A'_1 і коло Q_3 у точці K' так, що $A'_1 - B'_1 - K'$, отже, пряма b' також є шуканою (рис. 6.12). Зрозуміло, що, у залежності від радіусів заданих кіл Q_1 і Q_2 , характеру їхнього взаємного розташування відносно заданої прямої (кола,

взагалі, можуть не мати спільних січних, паралельних до заданої прямої A , це буде тоді, коли одне із заданих кіл розташовано поза смугою, утвореною дотичними до іншого кола, паралельними до прямої A (див., наприклад, рис. 6.14))

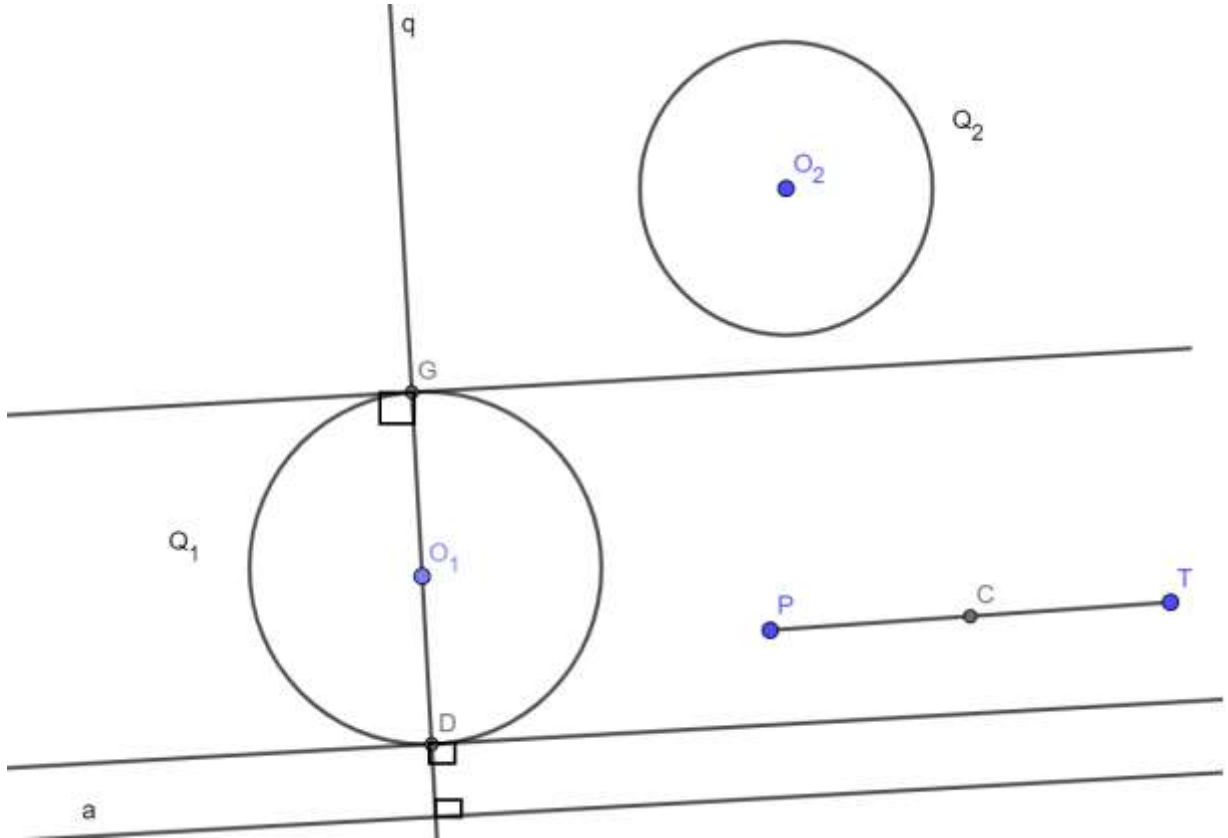


Рис. 6.14

та довжини заданого відрізка PT . (Наприклад, якщо відрізок PT є більшим за суму діаметрів заданих кіл, то розв'язку у даній задачі не буде). Варіант існування одного розв'язку також, очевидно, є можливим.

Задача 6.3. Побудувати відрізок, середина якого знаходиться у заданій точці, а кінці, відповідно, належать двом заданим колам.

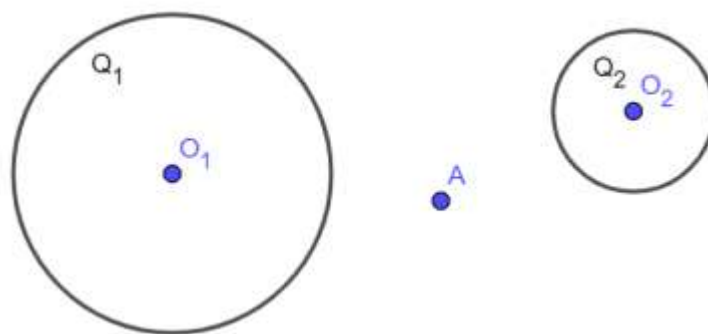


Рис. 6.15

Дано: коло Q_1 з центром у точці O_1 , коло Q_2 з центром у точці O_2 , точку A (рис. 6.15).

Побудувати: відрізок MN , $M \in Q_1$, $N \in Q_2$, $M - A - N$, $MA = AN$.

Розв'язання. І. Аналіз. Припустимо, задачу розв'язано – побудовано такий відрізок MN , що точка $M \in Q_1$, точка $N \in Q_2$, задана точка A є серединою відрізка MN (рис. 6.15). Все це означає, що точки M і N є симетричними одна до одної відносно центру симетрії A , якщо коло Q_3 з центром у точці O_3 є симетричним відносно точки A до кола Q_2 з центром у точці O_2 , то точка M належить перетину кола Q_3 з колом Q_1 . Коло Q_3 можна побудувати за вихідними даними задачі. Отже, тоді можна визначити і точку M . Точка N при цьому буде прообразом точки M при даній центральній симетрії, відповідною точкою перетину прямої MA з колом Q_2 (рис. 6.16).

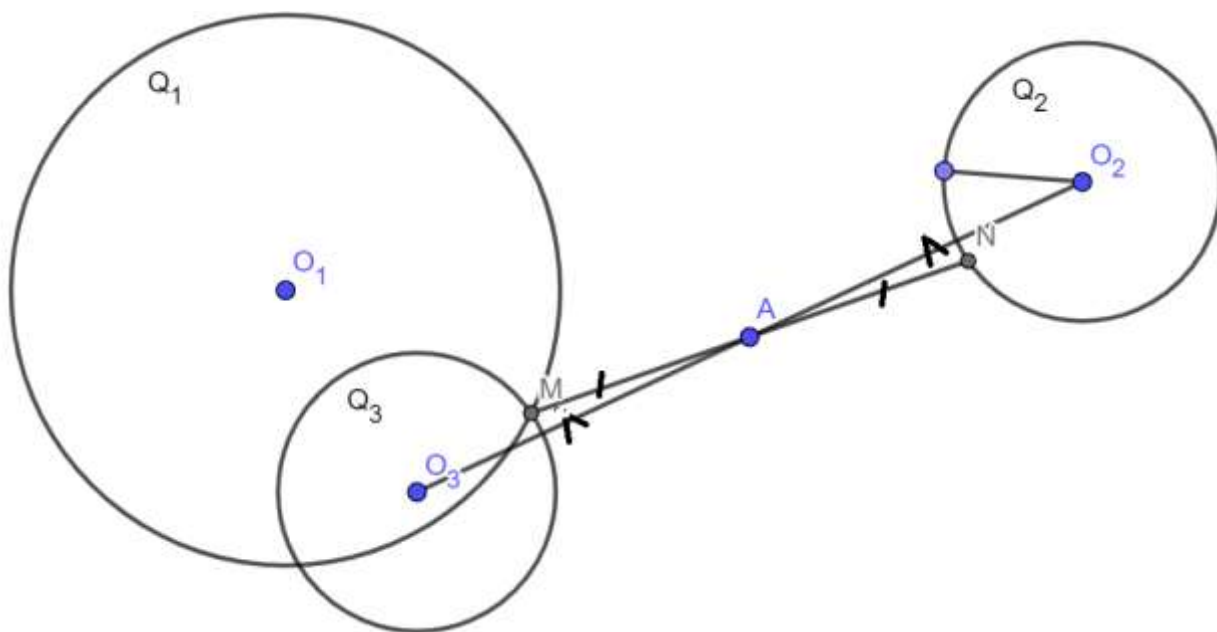


Рис. 6.16

II. Побудова.

1. Фігури, задані умовою задачі, вважаються побудованими.
2. Побудуємо коло Q_3 з центром у точці O_3 , симетричне відносно точки A до кола Q_2 з центром у точці O_2 .

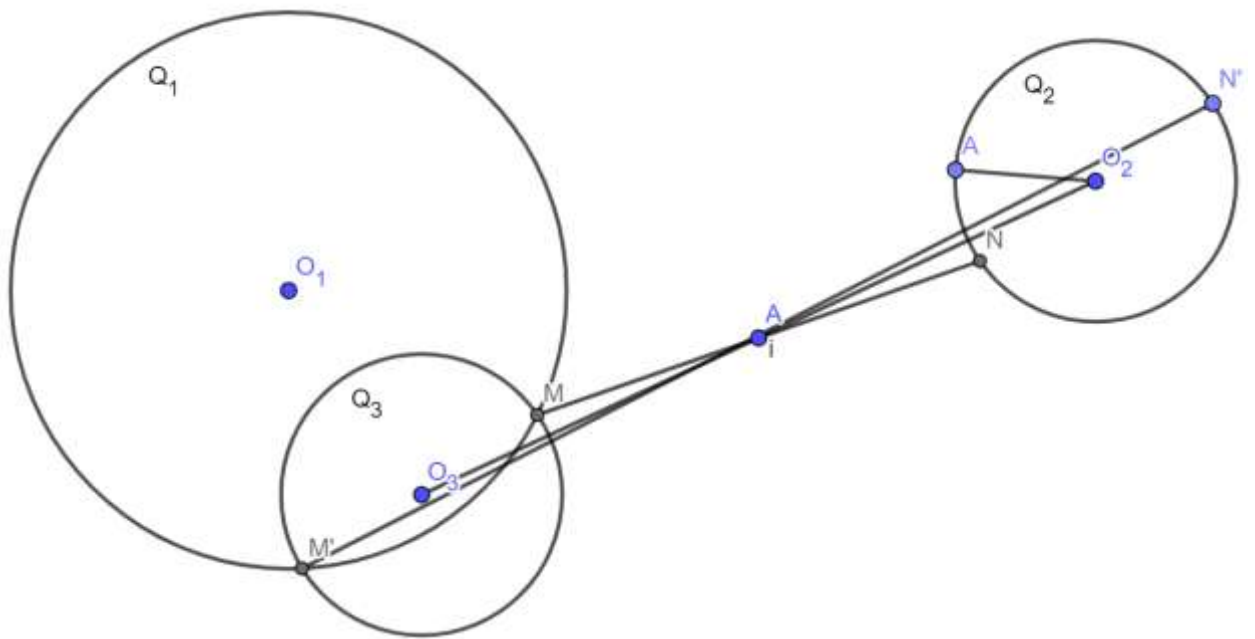


Рис. 6.17

3. Визначимо точку M як точку, яка належить перетину кіл Q_1 і Q_3 .
4. Проведемо промінь MA , визначимо точку N як точку, що належить колу Q_2 і є прообразом точки M при розглянутій симетрії.
5. Побудуємо відрізок MN (рис. 6.17).

III. Доведення. Згідно третього кроку побудов, точка M належить колу Q_1 , згідно четвертого кроку побудов, точка N належить колу Q_2 , точка N є симетричною до точки M відносно точки A . Останнє означає, що $MA = AN$. Отже, відрізок MN є шуканим.

IV. Дослідження. Із проведеного аналізу випливає, що, якщо задача має розв'язок, то її завжди можна розв'язати тим способом, який ми обрали. Існування розв'язків та їх кількість залежить від кількості точок перетину кіл Q_1 і Q_3 . Отже, задача може взагалі не мати розв'язків, мати один чи два розв'язки. За обраних вихідних даних, побудоване коло Q_3 перетинає коло Q_1 у двох точках (M і M'), задача має два розв'язки – це відрізки MN і $M'N'$.

Задача 6.4. *Задані точки M і N розташовані у одній півплощині відносно заданої прямої a , пряма MN не є перпендикулярною до прямої a .*

На прямій a побудувати таку точку A , щоб сума відстаней $MA + AN$ була би найменшою з можливих.

Дано: пряма a та точки M і N , які розташовані по одну сторону відносно прямої a , пряма MN не є перпендикулярною до прямої a (рис 6.18).

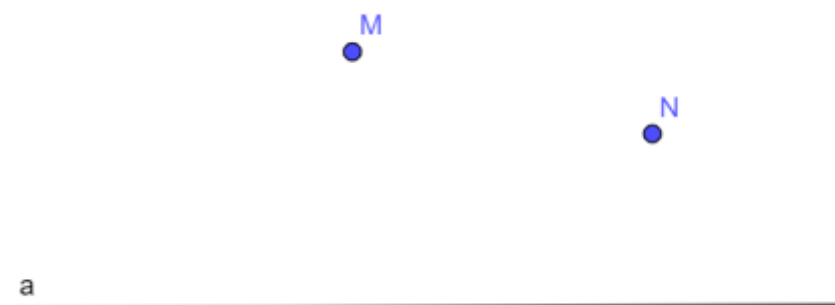


Рис. 6.18

Побудувати: таку точку A на прямій a , що сума відстаней $MA + AN$ є найменшою можливою.

Розв'язання. І. Аналіз. Розглянемо довільну точку B прямої a і точку N_1 , симетричну до точки N відносно прямої a . ($NN_1 \perp a$, $NN_1 \cap a = P$, $NP = PN_1$). Якщо точка B не співпадає з точкою P , то існує трикутник NBN_1 , висота BP якого, одночасно, є і його медіаною (рис. 6.19).

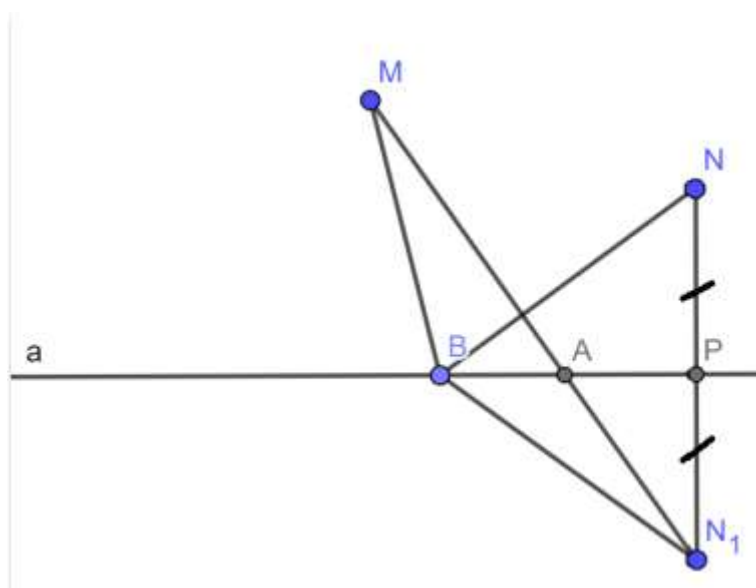


Рис. 6.19

Звідси випливає, що $\triangle NBN_1$ є рівнобедреним трикутником з основою NN_1 : $BN = BN_1$. Якщо точка B співпадає з точкою P , то, безпосередньо згідно побудови точки N , $BN = BN_1$.

Отже, у будь-якому випадку, $MB + BN = MB + BN_1$. Зрозуміло, що така сума відстаней буде найменшою можливою, коли точка B належатиме відрізку MN_1 . Дійсно, точки M і N_1 лежать по різні сторони відносно прямої a . Це означає, що відрізок MN_1 перетинає пряму a у певній своїй внутрішній точці. Позначимо цю точку через A . Якщо точка B не співпадає з точкою A , то існує трикутник MBN_1 . Згідно нерівності трикутника, $MN_1 < MB + BN_1$. Але $MN_1 = MA + AN_1$ і тому праильною є нерівність $MA + AN_1 < MB + BN_1$, точка A є шуканою точкою прямої a , за вихідними даними задачі, як точку перетину прямих MN_1 і a , її можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

II. Побудова. 1. Геометричні фігури, задані умовою задачі на побудову, вважаються побудованими.

2. Будуємо точку N_1 , симетричну до точки N відносно прямої a .

3. Проводимо промінь MN_1 .

4. Будуємо точку A як точку перетину променя MN_1 з прямою a (рис. 6.20).

III. Доведення. Згідно другого кроку побудов, $NN_1 \perp a$, пряма NN_1 перетинає пряму a у такій точці P , що $N - P - N_1$, $NP = PN_1$. В силу того, що, за умови задачі, пряма MN не є перпендикулярною до прямої a , точка M не належить прямій NN_1 , точка A , побудована за четвертим кроком побудов, не співпадає з точкою P , існує трикутник NAN_1 . Але тоді відрізок AP , одночасно, є медіаною і висотою цього трикутника, проведеною до сторони NN_1 . Це означає, що трикутник NAN_1 є рівнобедреним, $AN = AN_1$.

Дано: коло Q з центром у точці O , пряму l , точку A (рис. 6.21).

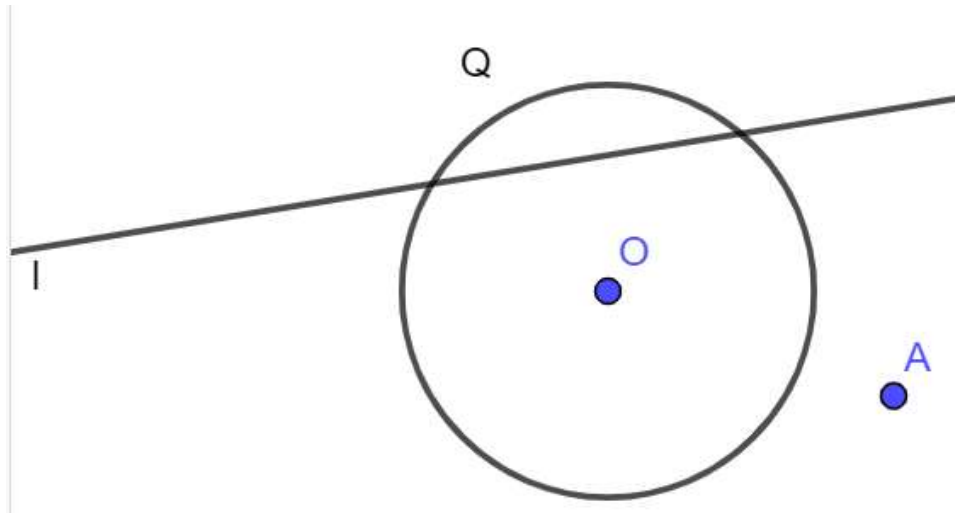


Рис. 6.21

Побудувати: трикутник ABC , $AB=BC=AC$, $B \in Q$, $C \in l$.

Розв’язання. І. Аналіз. Припустимо, задачу розв’язано: побудовано такий рівносторонній трикутник ABC , що $B \in Q$, $C \in l$ (рис. 6.22).

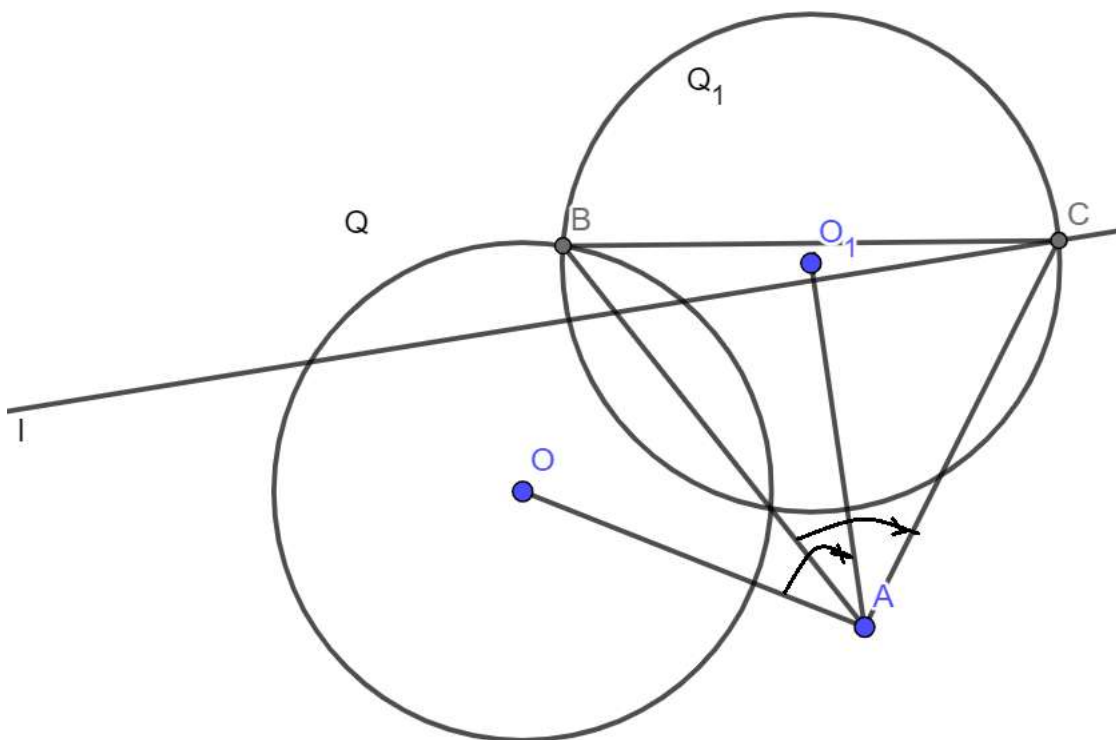


Рис. 6.22

В силу того, що $AB=AC$, $\angle BAC=60^\circ$, точку C можна розглядати як результат обертання точки B навколо точки A на кут обертання у 60° . Але точка B належить колу Q . Отже, унаслідок обертання навколо точки A на

кут у 60° , орієнтований таким саме чином, як $\angle BAC$, коло Q з центром у точці O перейде у коло Q_1 з центром у точці O_1 , однією з точок перетину якого з прямою l є точка C . На підставі вихідних даних задачі, коло Q_1 можна побудувати. Отже, можна визначити і точку C як точку перетину кола Q_1 з прямою l . Точку B тоді можна буде знайти як прообраз точки C при виконаному обертанні, як точку кола Q , що знаходиться на відстані AC від точки C і на такій самій відстані від точки A . У підсумку, задачу буде розв'язано.

II. Побудова. 1. Фігури, задані умовою задачі, вважаються побудованими.

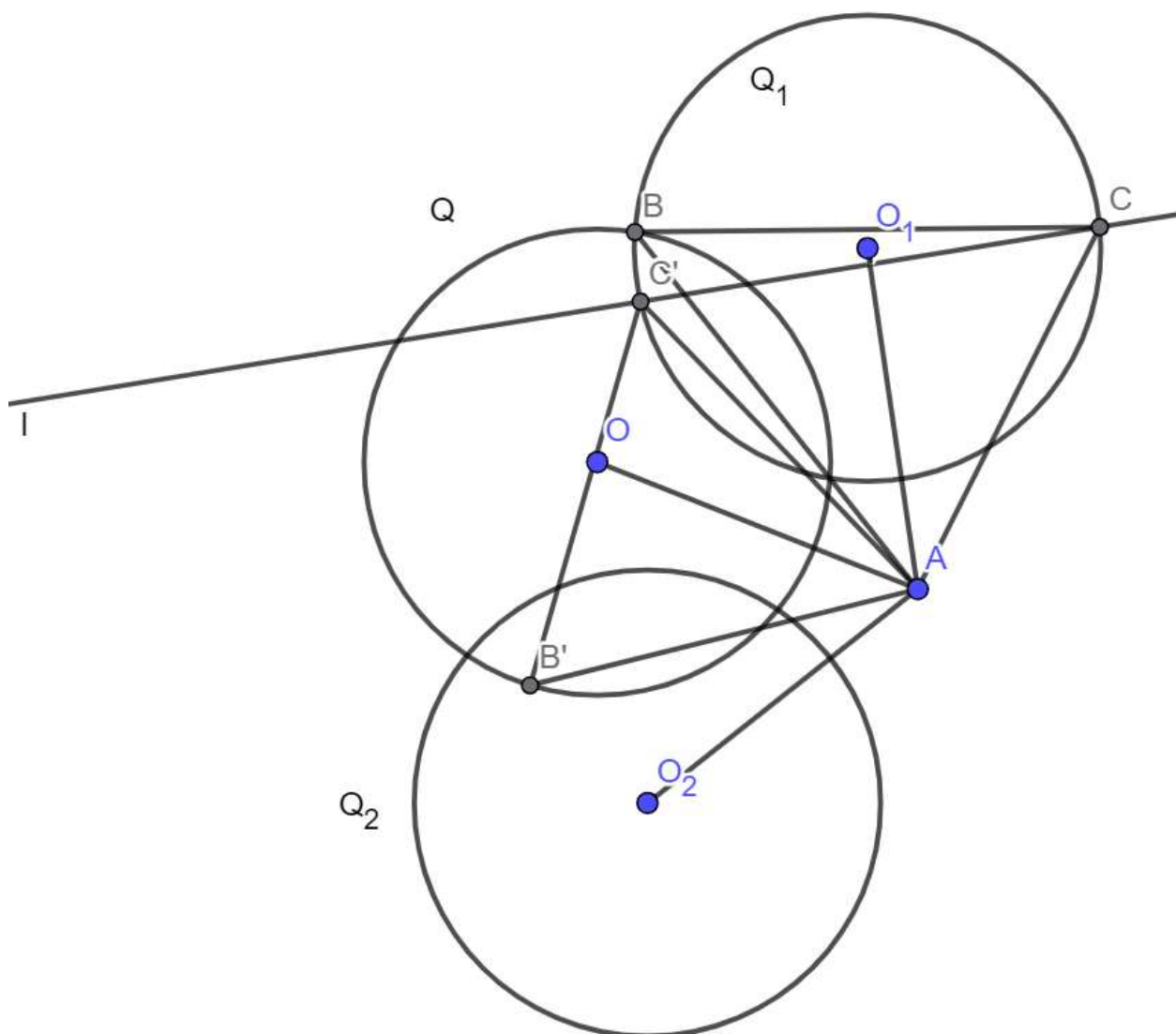


Рис. 6.23

2. Побудуємо коло Q_1 як результат обертання кола Q навколо точки A на кут у 60° у певному напрямку і коло Q_2 як результат обертання кола Q навколо точки A на кут у 60° у протилежному напрямку.

3. Визначимо точку C як точку перетину кола Q_1 з прямою l .

4. Будуємо точку B як прообраз точки C при виконаному обертанні (як точку заданого кола Q , що знаходиться на однаковій відстані AC від точок A і C).

5. Будуємо трикутник ABC (рис.6.23).

III. Доведення. Згідно четвертого кроку побудов, точка B належить заданому колу Q , $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = AC$. Згідно третього кроку побудов, точка C належить заданій прямій l . Отже, вершини трикутника ABC розташовані саме згідно тих вимог, які визначено умовою задачі. Згідно другого і четвертого кроків побудов, для трикутника ABC мають місце рівності $AB = AC$, $\angle BAC = 60^\circ$. Звідси випливає, що трикутник ABC є рівностороннім, правильним, саме таким, який й треба було побудувати.

IV. Дослідження. Проведений аналіз процесу побудови свідчить про те, що, якщо дана задача має розв'язок, то його завжди можна знайти тим способом, який ми обрали. Зрозуміло, що існування розв'язків та їх кількість залежить від існування і кількості точок перетину кіл Q_1 і Q_2 , отриманих унаслідок обертання заданого кола Q навколо точки A на кут у 60° у одному та у іншому напрямках, із заданою прямою l . У підсумку, відповідних точок перетину може не бути взагалі – тоді задача не матиме розв'язків. Може бути одна, дві, три або чотири точки перетину – тоді задача матиме, відповідно, один, два, три або чотири розв'язки. Це пояснюється тим, що кожне коло може мати з прямою не більш ніж дві спільні точки. За обраних вихідних даних виявилось, що задача має два розв'язки: побудоване коло Q_2 із заданою прямою l спільних точок не має, а побудоване коло Q_1 має дві точки

перетину: C і C' . Відповідно, розв'язок задачі утворює як трикутник ABC , так і трикутник $AB'C'$.

Питання та завдання для самоконтролю до §6

1. Що називають рухом евклідової площини?
2. Що у стандартних курсах евклідової геометрії розуміють під геометричною фігурою евклідової площини?
3. Що на евклідовій площині називають рухом геометричної фігури?
4. Які дві фігури евклідової площини у стандартних курсах планіметрії закладів загальної середньої освіти називають рівними? Як співвідносяться між собою поняття руху і накладання?
5. Перелічіть відомі Вам види рухів евклідової площини.
6. Вкажіть апарат паралельного перенесення. Чому ми вважаємо, що апарат паралельного перенесення, виходячи з наведеної системи аксіом теорії побудов, можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки?
7. Апарат паралельного перенесення задано. Як за допомогою циркуля і лінійки побудувати образ довільної заданої точки?
8. Апарат паралельного перенесення задано. Як за допомогою циркуля і лінійки побудувати образ довільного заданого променя?
9. Апарат паралельного перенесення задано. Як за допомогою циркуля і лінійки побудувати образ довільної заданої прямої?
10. Апарат паралельного перенесення задано. Як за допомогою циркуля і лінійки побудувати образ довільного заданого кола?
11. Охарактеризуйте апарат симетрії відносно точки. Центр симетрії задано. Як за допомогою циркуля і лінійки побудувати образ довільної заданої точки?
12. Центр симетрії задано. Як за допомогою циркуля і лінійки побудувати образ довільного заданого променя?
13. Центр симетрії задано. Як за допомогою циркуля і лінійки побудувати образ довільної заданої прямої?

14. Центр симетрії задано. Як за допомогою циркуля і лінійки побудувати образ довільного заданого кола?
15. Охарактеризуйте апарат симетрії відносно прямої. Чи можна цей апарат, виходячи з наведеної системи аксіом теорії побудов, побудувати за допомогою циркуля і лінійки?
16. Вісь симетрії задано. Як за допомогою циркуля і лінійки побудувати образ довільної заданої точки?
17. Вісь симетрії задано. Як за допомогою циркуля і лінійки побудувати образ довільного заданого променя?
18. Вісь симетрії задано. Як за допомогою циркуля і лінійки побудувати образ довільної заданої прямої?
19. Вісь симетрії задано. Як за допомогою циркуля і лінійки побудувати образ довільного заданого кола?
20. Охарактеризуйте апарат обертання навколо точки на заданий орієнтований кут. Чи можна цей апарат, виходячи з наведеної системи аксіом теорії побудов, побудувати за допомогою циркуля і лінійки?
21. Апарат обертання навколо точки на орієнтований кут у α° , $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, задано. Як побудувати образ довільної заданої точки?
22. Апарат обертання навколо точки на орієнтований кут у α° , $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, задано. Як побудувати образ довільного заданого променя?
23. Апарат обертання навколо точки на орієнтований кут у α° , $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, задано. Як побудувати образ довільної заданої прямої?
24. Апарат обертання навколо точки на орієнтований кут у α° , $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, задано. Як побудувати образ довільного заданого кола?
25. У чому полягає сутність застосування теорії рухів евклідової площини до розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки?

Задачі для самостійного розв'язання до §6

- 6.1. Побудувати трапецію за різницею її основ, двома бічними сторонами та однією діагоналлю.
- 6.2. Побудувати трапецію за всіма її сторонами.
- 6.3. Побудувати трикутник за його медіанами.
- 6.4. Побудувати трапецію за її діагоналями, кутом між ними та однією з основ.
- 6.5. Задано коло Q_1 з центром у точці O_1 , коло Q_2 з центром у точці O_2 , пряму a і відрізок PT . Побудувати відрізок, один кінець якого належить колу Q_1 , а інший – колу Q_2 , який є паралельним до прямої a і дорівнює відрізку PT .
- 6.6. Задано коло Q з центром у точці O , прямі a і b та відрізок PT . Побудувати відрізок, один кінець якого належить колу Q , а інший – прямій b , який є паралельним до прямої a і дорівнює відрізку PT .
- 6.7. Побудувати трапецію за бічною стороною, висотою, середньою лінією та кутом між діагоналями.
- 6.8. Задано прямі a , b і c , $a \nparallel b$, пряма a не є паралельною до прямої c , та точки A і B , розташовані по різні сторони від смуги між прямими a і b . На прямих a і b побудувати такі точки C і D , щоб пряма CD була паралельною до прямої c і сума відстаней $AC + CD + DB$ була би найменшою з можливих.
- 6.9. Побудувати трикутник ABC за кутом ABC і медіанами, проведеними до сторін AB і BC .
- 6.10. Побудувати трапецію за діагоналями, кутом між ними і однією з бічних сторін.
- 6.11. Побудувати відрізок, середина якого знаходиться у заданій точці, а кінці, відповідно, належать двом заданим прямим.
- 6.12. Побудувати відрізок, середина якого знаходиться у заданій точці, один кінець якого належить заданому колу, а інший – заданій прямій.

- 6.13. Побудувати трикутник за медіанами, проведеними до двох його сторін, і висотою, проведеною до третьої сторони.
- 6.14. Дано дві пари паралельних прямих і точку D . Побудувати таку пряму, яка проходить через точку D і перетинає обидві пари паралельних прямих так, що дані пари паралельних прямих відтинають на цій прямій рівні відрізки.
- 6.15. Побудувати квадрат, якщо задано його центр і дві точки, про які відомо, що вони, відповідно, належать прямим, які містять дві паралельні сторони даного квадрата.
- 6.16. Задані точки M і N розташовані у одній півплощині відносно заданої прямої AB . Побудувати на прямій AB таку точку P , що кут MPA є вдвічі більшим за кут NPB .
- 6.17. Задано пряму і два кола. На заданій прямій побудувати таку точку, що дотичні, проведені з цієї точки до заданих кіл, утворюють із заданою прямою однакові кути.
- 6.18. Точки A і B розташовано по різні сторони відносно заданої прямої a . Побудувати дві прямі, які, відповідно, проходять через точки A і B так, що пряма a ділить кут між цими прямими навпіл.
- 6.19. Точки A і B розташовано по одну сторону відносно заданої прямої a . Побудувати дві прямі, які, відповідно, проходять через точки A і B так, що пряма a ділить кут між цими прямими навпіл.
- 6.20. Центри двох заданих кіл знаходяться по різні сторони відносно заданої прямої. Побудувати правильний трикутник так, щоб дві його вершини належали заданим колам, а одна з висот лежала би на заданій прямій.
- 6.21. Задані точки M і N розташовані по різні сторони відносно заданої прямої. Побудувати на заданій прямій таку точку D , різниця відстаней від якої до заданих точок M і N була би найбільшою з можливих.
- 6.22. Побудувати ромб із заданою діагоналлю, яка належить заданій прямій, дві інші вершини якого належать заданим колам.
- 6.23. Задано пряму l , точки A і B , розташовані по одну сторону відносно прямої l і відрізок PT . Побудувати на прямій l точки X і Y так, щоб відрізок

XU дорівнював відрізку PT , а довжина ламаної $AXYB$ була би найменшою з можливих.

6.24. Задано кола Q_1 і Q_2 та точку A . Побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник з вершиною у точці A , вершини основи якого розташовані, відповідно, на колах Q_1 і Q_2 .

6.25. Задано коло Q і точку A . Побудувати правильний трикутник так, щоб одна з його вершин співпадала би з точкою A , а дві інші – належали би заданому колу Q .

6.26. Задано квадрат і точку A на одній з його сторін. Побудувати вписаний у заданий квадрат правильний трикутник ABC .

6. 27. Побудувати рівнобедрений трикутник з кутом у 120° так, щоб вершини його гострих кутів, відповідно, належали би заданому колу і заданій прямій, а вершина тупого кута співпадала би із заданою точкою.

6.28. Побудувати правильний трикутник, центр якого знаходиться у заданій точці, а дві вершини належать двом заданим прямим.

6.29. Задано дві точки і пряму, якій ці точки не належать. Побудувати рівнобічну трапецію, дві вершини якої знаходяться у заданих точках, а відрізок, що сполучає середини основ, належить заданій прямій.

6.30. Побудувати квадрат, центр якого знаходиться у заданій точці, а дві суміжні вершини, відповідно, лежать на двох заданих прямих.

§7. Застосування теорії перетворень подібності евклідової площини до розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки

Перетворенням подібності евклідової площини називають таке перетворення цієї площини, при якому відстані між будь-якими двома точками змінюються у певну, однакову для даного перетворення, кількість разів.

Отже, кожне перетворення подібності f характеризується наявністю такого додатного числа k , що, якщо для точок A і B , $f(A) = A'$,

$f(B) = B'$, то

$$A'B' = k \cdot AB \quad (7.1)$$

(довжина відрізка $A'B'$ дорівнює добутку числа k на довжину відрізка AB). Число k називають *коефіцієнтом подібності перетворення подібності f* . Відповідно до наведеного означення, кожний рух евклідової площини є її перетворенням подібності з коефіцієнтом $k = 1$.

Зрозуміло, що у рівності (7.1) довжини відрізків AB і $A'B'$ є визначеними відносно однієї й тієї ж одиниці вимірювання довжин відрізків, справедливність рівності (7.1) не залежить від обраної одиниці вимірювання довжин відрізків.

Відомо, що всі перетворення подібності евклідової площини, так само, як і всі рухи евклідової площини, зберігають відношення приналежності між множиною всіх точок евклідової площини і множиною всіх фігур евклідової площини, що містять більш ніж одну точку, утворюють групу відносно операції композиції перетворень, композиція $f_2 \circ f_1$ перетворення подібності f_1 з коефіцієнтом k_1 і перетворення подібності f_2 з коефіцієнтом k_2 є перетворенням подібності з коефіцієнтом $k_1 \cdot k_2$. Перетворення f^{-1} , обернене

до перетворення подібності f з коефіцієнтом k є перетворенням подібності з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$.

Перетворенням подібності планіметричної геометричної фігури називають звуження певного перетворення подібності евклідової площини на множину точок даної фігури. Перетворення подібності геометричної фігури, так само, як і рух, встановлює взаємно однозначну відповідність між цією фігурою та її образом унаслідок даного перетворення. Дві геометричні фігури називають подібними, якщо існує перетворення подібності, що переводить одну з них у іншу. Говорять, що подібні геометричні фігури мають однакову форму.

Окремим випадком перетворення подібності евклідової площини є гомотетія. *Гомотетію задають певною точкою, наприклад, O , яку називають центром гомотетії, і певним дійсним числом k , $k \neq 0$, яке називають коефіцієнтом гомотетії.* Унаслідок гомотетії з центром у точці O і коефіцієнтом k довільна точка M евклідової площини переходить у таку точку M' , що $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$. Гомотетія з коефіцієнтом k є перетворенням подібності з коефіцієнтом $|k|$.

Отже, точка O і число k ($k \neq 0$) для кожної гомотетії однозначно визначають образ довільної точки евклідової площини і, в силу цього, утворюють її апарат. Такий апарат лише наполовину носить геометричний характер. У той же час, гомотетію можна задати і повністю геометрично – за допомогою центра і пари відповідних точок. Так, на рис. 7.1 зображено точку O і пару точок M і M' . Усі три точки є попарно різними, пряма MM' проходить через точку O . мається на увазі, що таким чином задано гомотетію f з центром у точці O , для якої $f(M) = M'$. Зрозуміло, що $f(O) = O$.

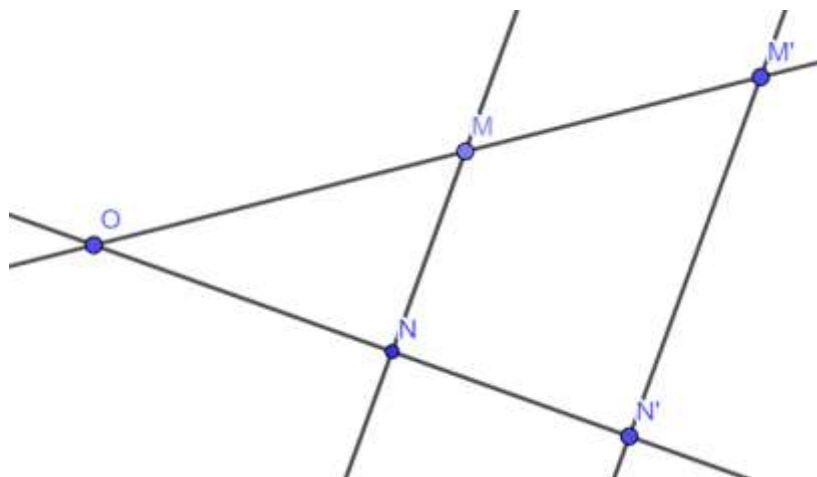


Рис. 7.1.

Якщо точка N не належить прямій OM (рис. 7.1), то треба провести пряму l , $l \parallel MN$, і визначити точку N' як точку перетину прямих l і ON . Згідно теореми Фалеса, $\frac{ON'}{ON} = \frac{OM'}{OM}$, тобто, якщо $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, то $\overrightarrow{ON'} = k \cdot \overrightarrow{ON}$.

(Згідно тієї ж теореми Фалеса, якщо $k > 0$, $O-M-M'$ або $O-M'-M$, то $O-N-N'$ або, відповідно, $O-N'-N$, якщо $k < 0$, $M-O-M'$, то, аналогічно, $N-O-N'$). Отже, $N' = f(N)$. Якщо точка N належить прямій OM , то спочатку обирають довільну точку P , яка цій прямій не належить, за зазначеним вище методом будують точку $P' = f(P)$. Точка N не належить прямій OP . Отже, за зазначеним вище методом можна побудувати точку $P' = f(P)$. Зрозуміло, що подібний геометричний апарат гомотетії можна задати за допомогою циркуля і лінійки, при заданому апараті побудову образу довільної точки також можна виконати за допомогою циркуля і лінійки. Цей факт забезпечує можливість застосування гомотетії до розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.

Одночасно, у теорії перетворень подібності обґрунтовано, що кожне перетворення подібності з коефіцієнтом k евклідової площини можна представити як композицію довільної гомотетії з коефіцієнтом k і певного руху. Звідси випливає, що апарат довільного перетворення подібності

евклідової площини можна задати за допомогою циркуля і лінійки, при заданому апараті образ довільної точки можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

Відомою також є основна теорема теорії перетворень подібності евклідової площини, яка стверджує, що для будь-якої пари таких трикутників ABC і $A'B'C'$, що $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, існує єдине перетворення подібності f евклідової площини, для якого $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$; образ $M' = f(M)$ кожної точки M евклідової площини при цьому перетворенні можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

Спираючись на дану теорему, у якості апарату довільного перетворення подібності евклідової площини можна обрати пару відповідних трикутників (тобто, пару подібних трикутників, мабуть, простіше за все, сказати, що трикутників, які задовольняють ознаку подібності за двома кутами). Такі трикутники можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки у тому числі на підставі порожньої множини вихідних даних. За умови задання трикутників, образ довільної точки площини при відповідному перетворенні подібності за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати згідно теореми Фалеса.

Точніше, нехай задано такі трикутники ABC і $A'B'C'$, що $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$ (трикутник ABC є подібним до трикутника $A'B'C'$ згідно ознаки подібності трикутників за двома кутами), перетворення f евклідової площини є таким перетворенням подібності, що $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ (рис. 7.2). Якщо точка M площини співпадає з однією з вершин трикутника ABC , то її образ при даному перетворенні подібності є відомим.

Розглянемо далі, спочатку, той випадок, коли точка M належить одній з прямих, що містять сторони трикутника ABC . Нехай, для визначеності,

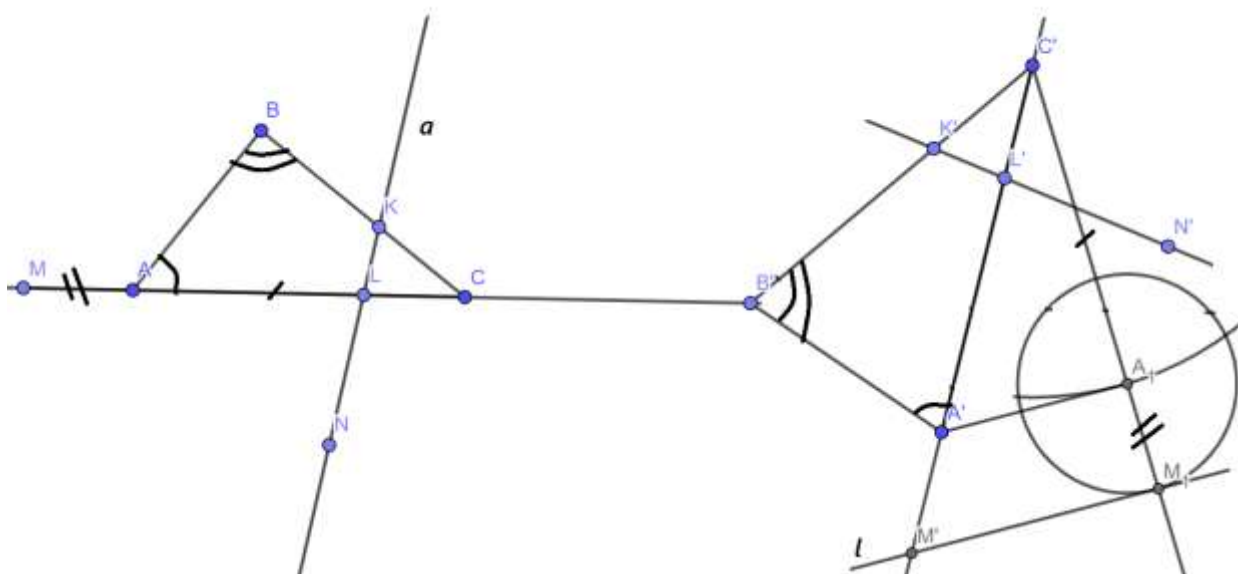


Рис. 7.2.

$M \in AC$ і для точок M, A, C має місце розташування $M-A-C$. Побудуємо довільний промінь $C'P$, який не є підмножиною прямої $A'C'$. (У якості такого променя можна, навіть, узяти промінь $C'B'$). Послідовно відкладемо на цьому промені відрізок $C'A_1$, $C'A_1 = CA$, і відрізок A_1M_1 , $A_1M_1 = AM$. Через точку M_1 , паралельно до прямої A_1A' проведемо пряму l до перетину з прямою $A'C'$ у точці M' . $M' = f(M)$, точка M' буде

шуканою, відповідне обґрунтування базується на відомих властивостях перетворень подібності евклідової площини: при будь-якому перетворенні подібності пряма, що проходить через дві задані точки, переходить у пряму, яка проходить через образи цих точок, зберігається порядок точок і відношення довжин відрізків, що належать одній прямій. (Згідно проведених побудов, $M' \in A'C'$, $M'-A'-C'$, відповідно до теореми Фалеса,

$$\frac{M'A'}{A'C'} = \frac{M_1A_1}{A_1C_1}, \text{ отже, } \frac{M'A'}{A'C'} = \frac{MA}{AC}.$$

Нехай тепер точка N не належить жодній з прямих AB, AC чи BC . Побудуємо пряму a , яка проходить через точку N , не проходить через точку C , перетинає пряму BC у певній точці K , а пряму AC - у певній точці L (рис. 7.2). (Можливість побудови такої прямої легко обґрунтувати). Образи

$K' = f(K)$ і $L' = f(L)$ точок K і L можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки так само, як було побудовано образ M' точки M . Потім можна побудувати пряму $K'L'$, $K'L' = f(KL)$. Точку N' , $N' = f(N)$ після цього можна побудувати як точку прямої KL , образи двох точок якої вже побудовано.

Як вже було підкреслено раніше, будь-який промінь евклідової площини є однозначно визначеним своїм початком і своєю довільною внутрішньою точкою. Будь-яке коло евклідової площини є однозначно визначеним своїм центром і своєю довільною точкою, або, що, фактично, є те ж самим, своїм центром і відрізком, який дорівнює його радіусу. При будь-якому перетворенні подібності евклідової площини образом променя є промінь, образом кола — коло, якщо радіус заданого кола дорівнює r , коефіцієнт подібності перетворення подібності дорівнює k , то радіус кола-образа складає $k \cdot r$. Якщо апарат певного конкретного перетворення подібності задано геометрично, то образ кожного заданого променя, кожного заданого відрізка, кожного заданого кола, очевидно, можна побудувати однозначно за допомогою циркуля і лінійки. Звідси випливає, що, якщо певну геометричну фігуру, виходячи з певних вихідних даних можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки, то образ цієї фігури при будь-якому заданому геометрично перетворенні подібності евклідової площини також можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

У підсумку, і довільні перетворення подібності евклідової площини, і гомотетія, як окремий випадок таких перетворень, можуть бути застосованими до розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки. На практиці, найчастіше, використовують саме гомотетію, окремо ведуть мову про метод гомотетії розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.

Одночасно зауважимо, що для рухів евклідової площини справджується основна теорема, аналогічна до основної теореми теорії перетворень

подібності. (У цій теоремі мова йде про рівні трикутники ABC і $A'B'C'$, такі трикутники ABC і $A'B'C'$, що $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$). Ця теорема, теоретично, створює передумови для застосування довільних рухів евклідової площини до розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки. Але, в силу наведеної у §6 класифікації рухів евклідової площини, практичного сенсу у цьому, здається, немає. Доцільніше у кожному окремому випадку вести мову про застосування того чи іншого конкретного виду рухів.

Сутність застосування **теорії перетворень подібності** евклідової площини до розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки полягає у наступному.

Під час реалізації етапу аналізу розв'язування відповідної задачі, виходячи із заданих геометричних фігур і геометричної фігури, побудову якої визначено як результат розв'язання, виконують додаткову побудову, яка полягає у застосуванні перетворення подібності (або, безпосередньо, гомотетії) до шуканої геометричної фігури або певних її складових. Як наслідок, утворюється нова геометрична фігура, яку, за вихідними даними задачі можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Після цього шукану геометричну фігуру можна побудувати як результат перетворення, оберненого до застосованого.

Одночасно, достатньо поширеним, насамперед у випадку застосування гомотетії, є й дещо інший підхід. Він полягає у наступному. Унаслідок аналізу вихідних даних задачі встановлюють, що певна їх сукупність дозволяє побудувати за допомогою циркуля і лінійки геометричну фігуру F' , подібну до певної фігури F , шуканої фігури, або такої частини шуканої фігури, за якою, за допомогою циркуля і лінійки шукану фігуру можна відновити однозначно. Далі визначають відрізок a , який є складовою фігури F або може бути побудованим за допомогою циркуля і лінійки, виходячи зі складових фігури F , рівний до якого є відомим або може бути побудованим за вихідними даними задачі. Припускають фігуру F' побудованою. За

допомогою складових фігури F' знаходять відрізок a' , який є образом визначеного відрізка a при тому перетворенні подібності, яке переводить фігуру F у фігуру F' . Розглядають гомотетію, теоретично, з центром у довільній точці, практично – з центром у найбільш зручній для подальших побудов точці, яка переводить відрізок a' у відрізок, що дорівнює визначеному відрізку a . У результаті утворюється фігура, яка дорівнює фігурі F , за якою шукану фігуру, нехтуючи її положенням на евклідовій площині, можна відновити однозначно. Реалізація наступного етапу розв'язування поставленої задачі – етапу побудови – повинна відповідати плану побудов, визначеному унаслідок проведеного аналізу.

Наведемо подалі відповідні приклади.

Задача 7.1. *На прямих AB і BC , що містять сторони AB і BC заданого трикутника ABC , побудувати, відповідно, такі точки D і E , щоб відрізки AD , DE і EC були рівними між собою.*

Дана: трикутник ABC (рис. 7.3).

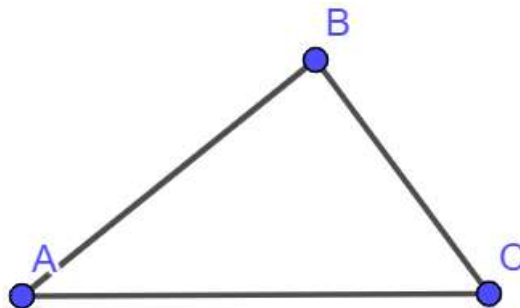


Рис. 7.3.

Побудувати: точку D , $D \in AB$, точку E , $E \in BC$, $AD = DE = EC$.

Розв'язання. I. Аналіз. Припустимо, на прямих AB і BC , що містять сторони AB і BC заданого трикутника ABC , відповідно, побудовано такі точки D і E , що $AD = DE = EC$. Побудуємо коло Q з центром у точці B радіусу AB , визначимо точку K як точку перетину даного кола з променем AE (рис. 7.4). $AD = DE$, $AB = BK$, отже, трикутники ADE і ABK є такими рівнобедреними трикутниками, що мають спільний кут при основі ($\angle DAE \equiv \angle BAK$). Але тоді й інші кути при основах цих рівнобедрених

трикутників є рівними: $\angle DEA = \angle BKA$. Звідси випливає, що $BK \parallel DE$, трикутники ADE і ABK є подібними, більш за це, гомотетичними, центром гомотетії є точка A , коефіцієнт гомотетії k дорівнює відношенню довжин відрізків $\frac{AB}{AD}$; $\frac{AB}{AD} = \frac{AK}{AE} = \frac{BK}{DE}$.

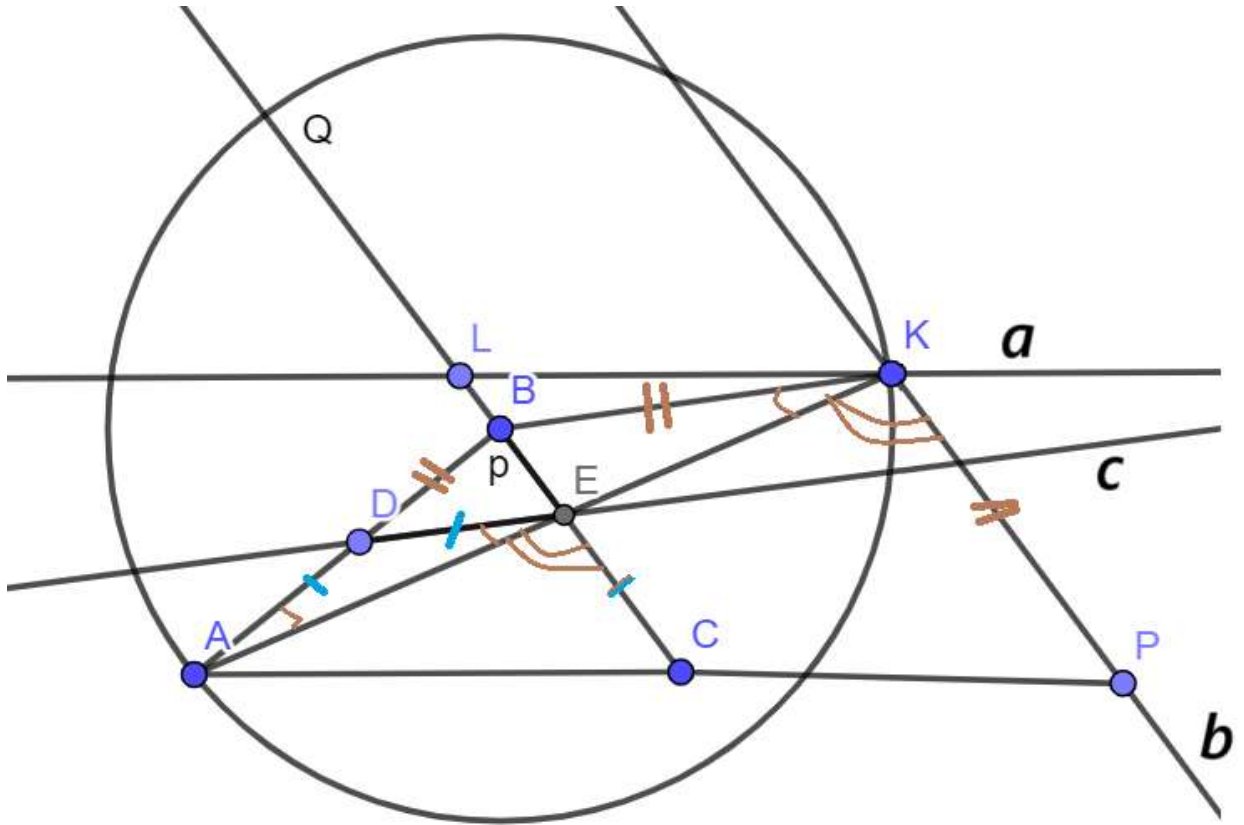


Рис. 7.4.

Через точку K , паралельно до прямої BC проведемо пряму b до перетину з прямою AC у точці P . Трикутник AKP є подібним до трикутника AEC за двома кутами ($\angle KAP$ є спільним, $\angle AEC = \angle AKP$ як відповідні кути при паралельних прямих KP і EC та січній AK), ці трикутники є гомотетичними відносно тієї ж самої гомотетії, $\frac{AP}{AC} = \frac{AK}{AE} = k$, $\frac{KP}{CE} = k$. Але

тоді $\frac{KP}{CE} = \frac{BK}{DE}$, $\frac{KP}{BK} = \frac{CE}{DE}$, $KP = BK$ в силу того, що $CE = DE$. Отже,

чотирикутник $ABKP$ є гомотетичним до фактично шуканого чотирикутника $ADEC$ відносно гомотетії з центром у точці A . З іншого боку, чотирикутник

$ABKP$ можна побудувати за вихідними даними задачі. Дійсно, якщо через точку K паралельно до прямої AC провести пряму KL до перетину з прямою BC у точці L , то утвориться паралелограм $CLKP$, для якого, зрозуміло, $CL = KP$ і, в силу цього, $CL = AB$. Це означає, що, за вихідними даними задачі, точку K можна визначити як точку перетину кола Q з центром у точці B радіусу AB з прямою a . Що проходить паралельно до прямої AC через таку точку L променю CB , що $CL = AB$. Точку P після цього можна побудувати як точку перетину прямої b , яка проходить через точку K паралельно до прямої BC , з прямою AC . Але для побудови шуканих точок D і E у визначенні точки P немає потреби. Точку E буде побудовано як точку перетину променю AK з прямою BC , точку D - як точку перетину прямої c , що проходить через точку E паралельно до прямої BK , з прямою AB .

II. Побудова. 1. Трикутник ABC , заданий умовою задачі, вважається побудованим.

2. На промені CB відкладаємо відрізок CL , $CL = AB$.

3. Будуємо пряму a , яка проходить через точку L паралельно до прямої AC .

4. Будуємо коло Q з центром у точці B радіусу AB .

5. Визначаємо точку K як точку перетину кола Q з прямою a .

6. Будуємо промінь AK .

7. Визначаємо точку E як точку перетину променю AK з прямою BC ,

8. Проводимо через точку E , паралельно до прямої BK , пряму c до перетину з прямою AB у точці D (рис. 7.5).

III. Доведення. Згідно восьмого кроку побудов, пряма DE є паралельною до прямої BK . Отже, трикутник ADE є подібним до трикутника ABK ,

$\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BK}$. Згідно четвертого і п'ятого кроків побудов, $BK = AB$. Отже,

$AD = DE$. Одночасно, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AK}$. Паралельно до прямої BC через точку K

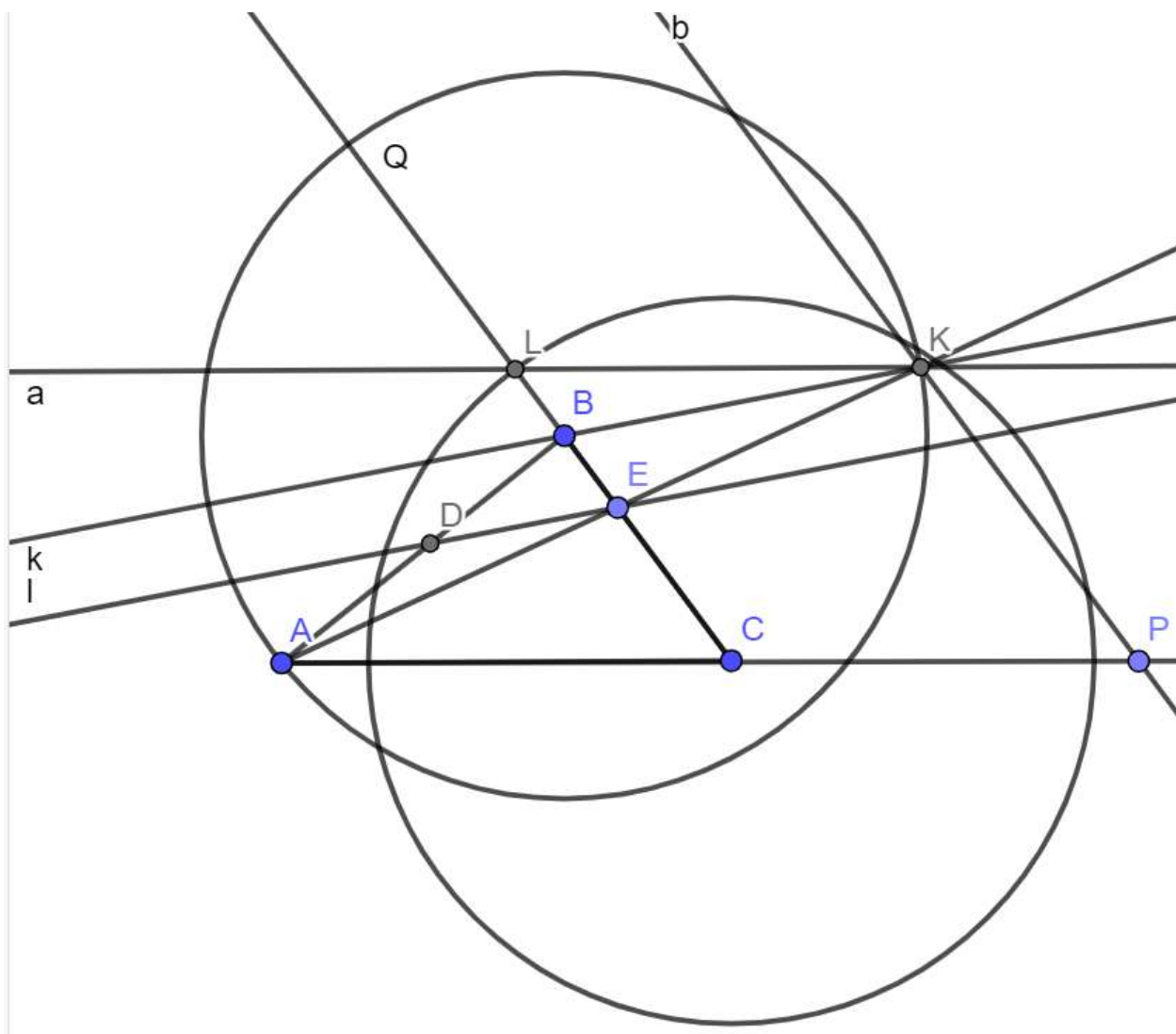


Рис. 7.5.

проведемо пряму b до перетину з прямою AC у точці P . Чотирикутник $LKPC$ є паралелограмом в силу того, що його протилежні сторони є попарно паралельними. Отже, $KP = LC$ як протилежні сторони паралелограма. Але, згідно другого кроку побудов, $CL = AB$. Звідси випливає, що $KP = AB$. В силу того, що $KP \parallel EC$, трикутники AEC і AKP є подібними, $\frac{EC}{KP} = \frac{AE}{AK}$.

Але тоді $\frac{AD}{AB} = \frac{EC}{KP}$, $\frac{AD}{EC} = \frac{AB}{KP}$, $AD = EC$. Отже, $AD = DC = EC$, точки D і E є шуканими.

IV. Дослідження. Проаналізуємо проведену побудову з точки зору можливості реалізації її кроків за тих чи інших варіантів обрання вихідних даних.

Зрозуміло, що кроки побудов (1) - (4) є виконаними завжди. П'ятий крок побудов є виконаним тоді та тільки тоді, коли відстань від точки B до прямої a не перевищує довжину відрізка AB . З іншого боку, проведений аналіз розв'язання даної задачі свідчить про те, що, якщо у задачі розв'язок існує, то вищевказану умову виконано. Отже, якщо відстань від точки B до прямої, яка проходить паралельно до прямої AC через таку точку L променю CB , що $CL = AB$, є більшою за AB , задача не має розв'язків. Якщо визначена відстань не перевищує довжини відрізка AB , то п'ятий крок побудов виконано, коло Q з центром у точці B радіусу AB перетинає пряму a у одній чи у двох точках, кроки побудов (6) – (8) є виконаними завжди, задача, відповідно, має один або два розв'язки.

Згідно обраних вихідних даних, на рис. 7.5 побудовано один розв'язок. Побудовані при цьому точки D і E безпосередньо належать, відповідно, сторонам AB і BC заданого трикутника ABC , чотирикутник $ADEC$, для якого $AD = DE = EC$, є опуклим. Подібна ситуація має місце далеко не за будь-якого варіанту обрання вихідних даних.

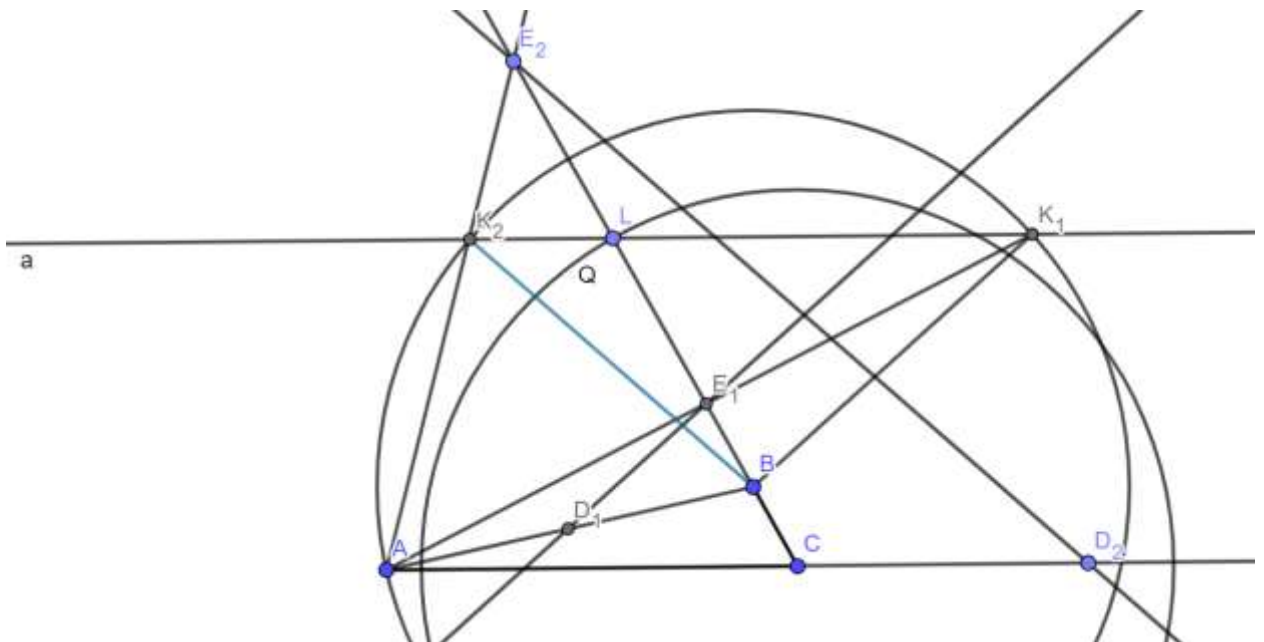


Рис. 7.6.

Наприклад, на рис. 7.6 зображено два розв'язки поставленої задачі на підставі іншого за формою заданого трикутника ABC . На прямих AB і BC побудовано, відповідно, такі точки D_1, D_2 і E_1, E_2 , що $AD_1 = D_1E_1 = E_1E_2$,

точка E_1 не належить відрізку BC , чотирикутник AD_1E_1C не є опуклим, $AD_2 = D_2E_2 = E_2C$, точка D_2 не належить відрізку AB , точка E_2 не належить відрізку BC , можна, взагалі, вести мову лише про замкнену ламану AD_2E_2CA , яка має самоперетин.

Задача 7.2. Побудувати трикутник ABC за заданими кутами BAC і ABC та сумою бісектриси і висоти, проведеними до сторони AC .

Дано: $\angle M_1N_1K_1$, $\angle M_2N_2K_2$, відрізок PT (рис. 7.7).

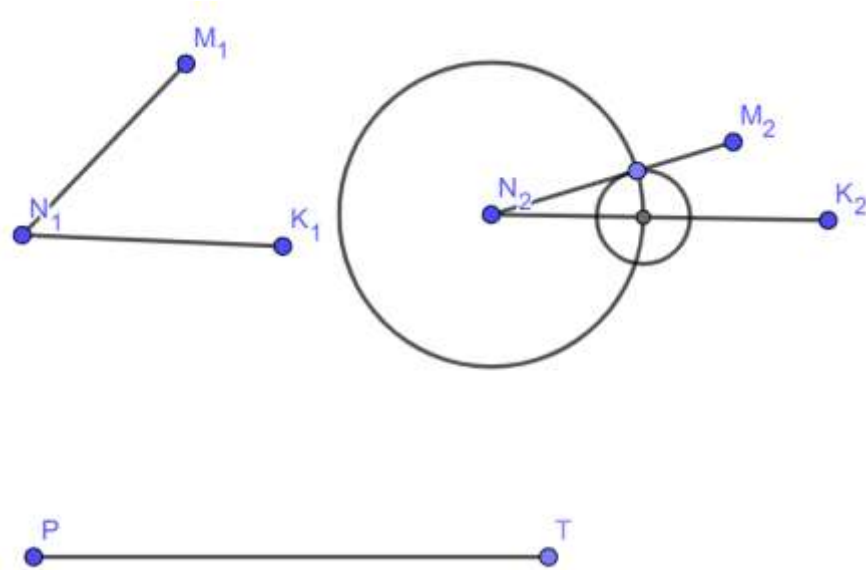


Рис. 7.7.

Побудувати: Трикутник ABC , для якого $\angle ABC = \angle M_1N_1K_1$, $\angle BAC = \angle M_2N_2K_2$, $BH \perp AC$, $H \in AC$, $\angle ABL = \angle LBC$, $L \in AC$, $BH + BL = PT$.

Розв'язання. І. Аналіз. Припустимо, побудовано шуканий трикутник ABC , $\angle ABC = \angle M_1N_1K_1$, $\angle BAC = \angle M_2N_2K_2$ (рис. 7.8).

Проведемо $BH \perp AC$, $H \in AC$. Розглянемо бісектрису BL трикутника ABC ($\angle ABL = \angle LBC$). На промені, доповняльному до променю LB , відкладемо відрізок LD , $LD = BH$. $BD = BL + LD = BH + BL = PT$. Через довільну точку A' променю BA , паралельно до прямої AC проведемо пряму a до перетину з променем BC у точці C' . Шуканий трикутник ABC буде

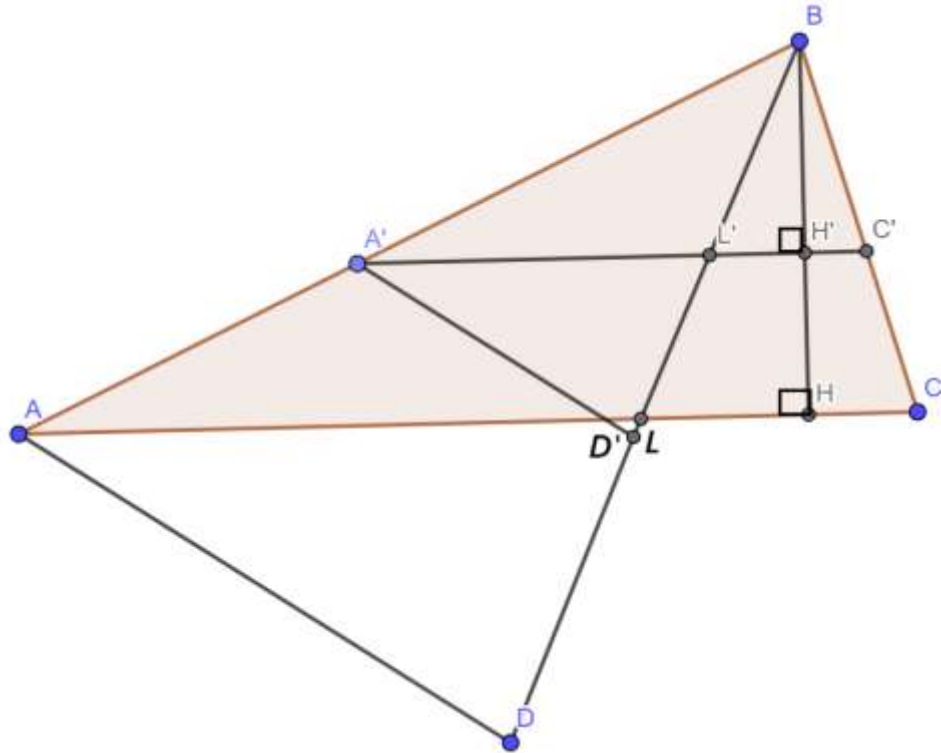


Рис. 7.8.

подібним, гомотетичним, до утвореного трикутника $A'BC'$ відносно гомотетії f з центром у точці B і коефіцієнтом k , $k = \frac{BA}{BA'}$, $f(A') = A$, $f(B') = B$, трикутник $A'BC'$, як довільний трикутник, подібний до шуканого, за заданими кутами $M_1N_1K_1$ і $M_2N_2K_2$ можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. У результаті буде визначено промінь BA' , якому належить шукана точка A , і промінь BC' , якому належить шукана точка C . В силу того, що $A'C' \parallel AC$, пряма BH перетинає пряму $A'C'$ у певній точці H' , $BH' \perp A'C'$, відрізок BH' є висотою трикутника $A'BC'$. Відрізок BL є підмножиною променю BL , який. У свою чергу, є бісектрисою кута ABC . Отже, промінь BL перетинає відрізок $A'C'$ у певній точці L' , відрізок BL' є бісектрисою трикутника $A'BC'$. На промені, доповняльному до променю $L'B$, відкладемо відрізок $L'D'$, $L'D' = BH'$. $BD' = BL' + L'D' = BL' + BH'$. В силу гомотетичності трикутників ABC і

$A'BC'$ їх відповідні висоти та бісектриси є гомотетичними з тим же самим коефіцієнтом гомотетії. В силу цього, $BH = k \cdot BH'$, $BL = k \cdot BL'$,

$$BD = BL + LD = BL + BH = k \cdot BL' + k \cdot BH' = k \cdot (BL' + BH') = k \cdot BD'.$$

Це означає, що $f(D') = D$, $f(A'D') = AD$, $A'D' \parallel AD$, тому що унаслідок гомотетії пряма, яка не проходить через центр гомотетії, переходить у паралельну до неї пряму. Все це визначає шляхи, згідно яких за побудованим трикутником $A'BC'$ шуканий трикутник ABC можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки: виходячи із трикутника $A'BC'$, можна вищевказаним чином побудувати відрізок BD' , на промені BD' відкласти відрізок BD , що дорівнює заданому відрізку PT , знайти точку A як точку перетину прямої, що проходить через точку D паралельно до прямої $A'D'$, з променем BA' , і точку C як точку перетину прямої, що проходить через точку A паралельно до прямої $A'C'$, з променем BC' .

II. Побудова.

1. Задані умовою задачі кути $M_1N_1K_1$ і $M_2N_2K_2$ та відрізок PT вважаються побудованими.
2. Будуємо трикутник $A'B'C'$, у якого $\angle A'BC' = \angle M_1N_1K_1$, $\angle BA'C' = \angle M_2N_2K_2$. (Зручніше, мабуть, виконати відповідні побудови виходячи із заданого кута $M_1N_1K_1$: перейменувати вершину кута – точку N_1 – на точку B , на промені BM_1 обрати довільну точку A' (яка не співпадає з точкою B), від променю $A'B$ у ту півплощину відносно прямої BA' , що містить промінь BK_1 , відкласти кут $EA'B$, який дорівнює куту $M_2N_2K_2$, визначити точку C' як точку перетину променю $A'E$ з променем BK_1).
3. Будуємо висоту BH' трикутника $A'BC'$.
4. Будуємо бісектрису BL' трикутника $A'BC'$.

5. На промені, доповняльному до променю $L'B$, відкладаємо відрізок $L'D'$, $L'D' = BH'$.

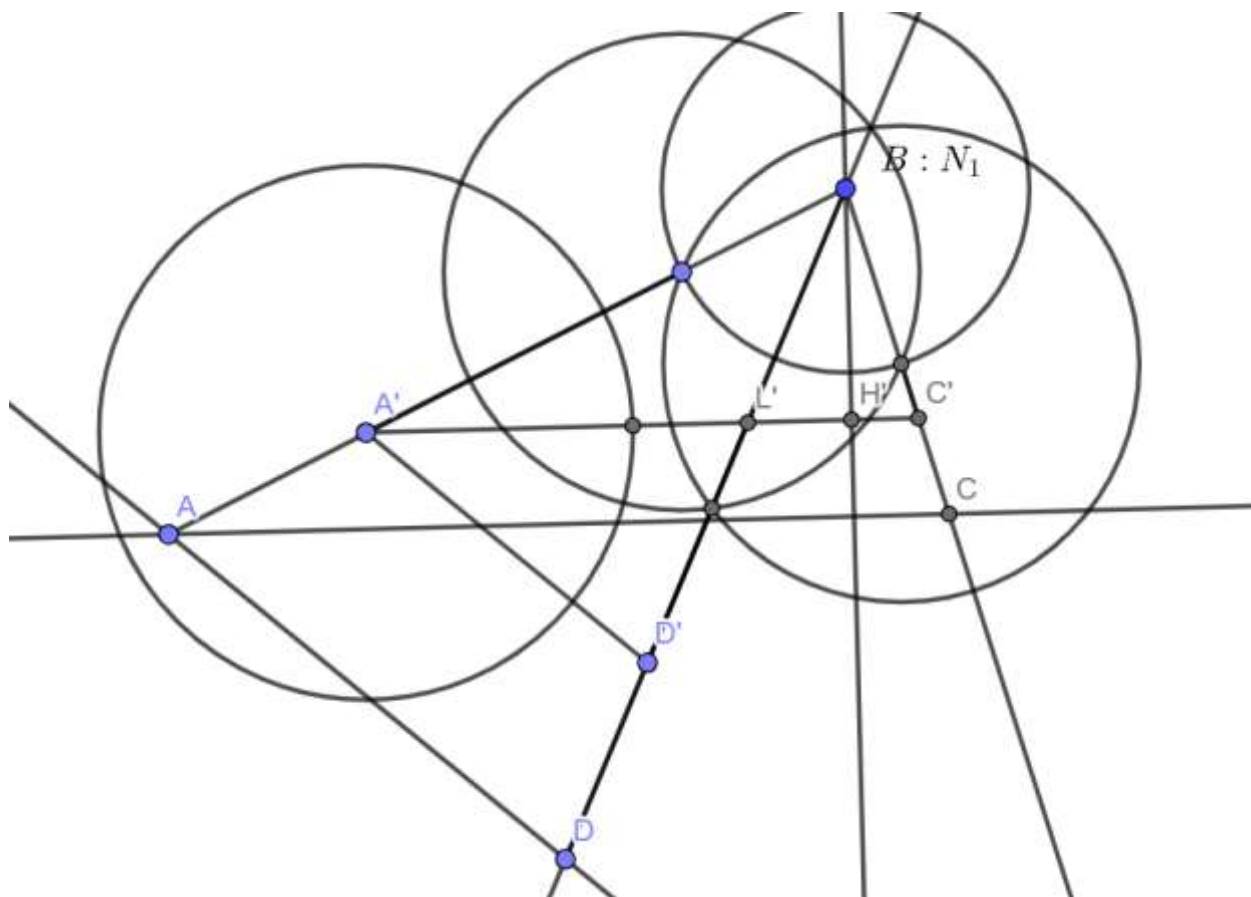


Рис. 7.9.

6. Проводимо пряму $A'D'$.

7. На промені BL' відкладаємо відрізок BD , $BD = PT$.

8. Через точку D , паралельно до прямої $A'D'$, проводимо пряму l , визначаємо точку A як точку перетину прямої l і променю BA' .

9. Через точку A , паралельно до прямої $A'C'$ проводимо пряму a до перетину з променем BC' у точці C .

10. Будуємо трикутник ABC (рис. 7.9).

III. Доведення. Розглянемо побудований трикутник ABC . Згідно восьмого і дев'ятого кроків побудов, кут ABC співпадає з кутом $A'BC'$. Згідно другого кроку побудов, $\angle A'BC'$ співпадає із заданим кутом $M_1N_1K_1$. Згідно дев'ятого кроку побудов, промені $A'C'$ і AC є однаково

напрямленими. Отже, $\angle BAC = \angle BA'C'$ як відповідні кути при паралельних прямих AC' і AC та січній AA' . Згідно другого кроку побудов, $\angle BA'C' = \angle M_2 N_2 K_2$. Отже, $\angle BAC = \angle M_2 N_2 K_2$. У підсумку, трикутник ABC є подібним до трикутника $A'BC'$, більш за це, гомотетичним, з центром гомотетії у точці B і коефіцієнтом гомотетії $k = \frac{BA}{BA'}$. Знайдемо

точку перетину H прямої BH' з прямою a . В силу того, що $a \perp A'C$, згідно девятого кроку побудов, пряма BH' є перпендикулярною до прямої a , відрізок BH є висотою побудованого трикутника ABC . $BH = k \cdot BH'$. Згідно четвертого кроку побудов, промінь BL' є бісектрисою кута $A'BC'$, який, згідно восьмого і дев'ятого кроків побудов, співпадає з кутом ABC . Позначимо через L точку перетину променю BL' з відрізком AC . Відрізок BL є бісектрисою трикутника ABC , $BL = k \cdot BL'$. Згідно восьмого кроку побудов, $A'D' \parallel AD$. Згідно сьомого кроку побудов, $D \in BD'$. Отже, точка D є гомотетичною до точки D' відносно гомотетії з центром у точці B і коефіцієнтом $\frac{BA}{BA'}$, який дорівнює k : $BD = k \cdot BD'$. Згідно четвертого і

п'ятого кроків побудов, $BD' = BL' + L'D'$. Отже,

$$BD = k \cdot (BL' + L'D') = k \cdot (OL' + BH') = k \cdot BL' + k \cdot BH' = BL + BH.$$

З іншого боку, згідно сьомого кроку побудов, відрізок BD дорівнює заданому відрізку PT . У підсумку, для побудованого трикутника ABC сума бісектриси BL і висоти BH дорівнює заданому відрізку PT , трикутника ABC є шуканим.

IV. Дослідження. Ретельний перегляд процесу побудови свідчить про те, що задачу завжди можна розв'язати тим способом, який ми обрали, у випадку існування трикутника $A'BC'$. З іншого боку, якщо задача має розв'язок, то трикутник, який можна прийняти за трикутник $A'BC'$ існує,

ним є, наприклад, сам трикутник ABC . Необхідною й достатньою умовою існування трикутника $A'BC'$ є умова того, що

$$\angle M_1 N_1 K_1 + \angle M_2 N_2 K_2 A < 180^\circ \quad (7.2)$$

Отже, задача має розв'язок тоді та тільки тоді, коли виконано умову (7.2).

З іншого боку, легко обґрунтувати, що всі трикутники, які мають однакові кути та однакові суми висоти і бісектриси, проведених з вершин цих кутів, є рівними між собою.

Дійсно, розглянемо такі трикутники $A_1 B_1 C_1$ і $A_2 B_2 C_2$, що $\angle A_1 B_1 C_1 = \angle A_2 B_2 C_2$, $\angle B_1 A_1 C_1 = \angle B_2 A_2 C_2$, $\angle A_1 B_1 L_1 = \angle L_1 B_1 C_1$, $A_1 - L_1 - C_1$, $\angle A_2 B_2 L_2 = \angle L_2 B_2 C_2$, $A_2 - L_2 - C_2$, $B_1 H_1 \perp A_1 C_1$, $H_1 \in A_1 C_1$, $B_2 H_2 \perp A_2 C_2$, $H_2 \in A_2 C_2$, $B_1 L_1 + B_1 H_1 = B_2 L_2 + B_2 H_2$ (рис.7.10).

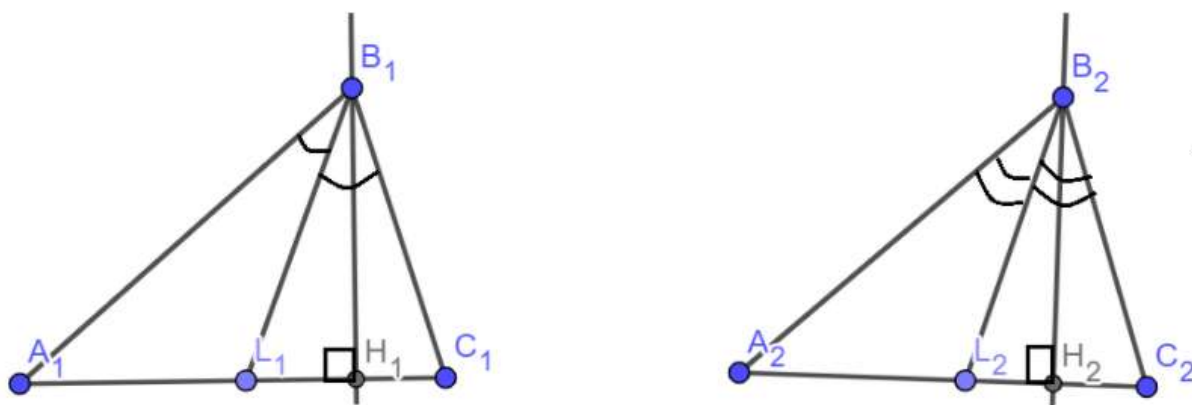


Рис. 7.10

Трикутники $A_1 B_1 C_1$ і $A_2 B_2 C_2$ мають два попарно рівних кути. Отже, вони є подібними, існує перетворення подібності f , яке переводить один з них у інший: $f(A_1) = A_2$, $f(B_1) = B_2$, $f(C_1) = C_2$. Нехай перетворення подібності f має коефіцієнт подібності k . Тоді $A_2 B_2 = k \cdot A_1 B_1$, $A_2 C_2 = k \cdot A_1 C_1$, $B_2 C_2 = k \cdot B_1 C_1$. Відомо, що кожне перетворення подібності переводить пряму - у пряму, промінь - у промінь, відрізок - у відрізок, кут - у кут, зберігає приналежність точок і прямих та величини кутів. Звідси

випливає, що $f(L_1) = L_2$, $f(H_1) = H_2$, $B_2 L_2 = k \cdot B_1 L_1$, $B_2 H_2 = k \cdot B_1 H_1$.

Але тоді $B_2 L_2 + B_2 H_2 = k \cdot B_1 L_1 + k \cdot B_1 H_1 = k \cdot (B_1 L_1 + B_1 H_1)$. З іншого боку,

за умови, $B_1 L_1 + B_1 H_1 = B_2 L_2 + B_2 H_2$. Отже, $k = 1$, $A_2 B_2 = A_1 B_1$, $A_2 C_2 = A_1 C_1$,

$B_2 C_2 = B_1 C_1$, $\square A_2 B_2 C_2 = \square A_1 B_1 C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників,

за трьома сторонами.

Доведений факт означає, що, якщо задача має розв'язок, то він є єдиним.

Питання та завдання для самоконтролю до §7

1. Яке перетворення евклідової площини називають перетворенням подібності?
2. Наведіть означення коефіцієнта подібності перетворення подібності евклідової площини.
3. Яку алгебраїчну структуру утворюють перетворення подібності евклідової площини відносно операції композиції перетворень?
4. Чому дорівнює коефіцієнт подібності композиції двох перетворень подібності евклідової площини, відповідно, з коефіцієнтами k_1 і k_2 ?
5. Чому дорівнює коефіцієнт подібності перетворення подібності, оберненого до перетворення подібності евклідової площини з коефіцієнтом k ?
6. Наведіть означення перетворення подібності геометричної фігури.
7. Які дві геометричні фігури евклідової площини називають подібними?
8. Наведіть приклади перетворень подібності евклідової площини.
9. Наведіть означення гомотетії.
10. За яких значень коефіцієнта гомотетії вона є рухом?
11. Як можна задати апарат гомотетії геометрично?
12. Чому гомотетію можна застосовувати до розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки?

13. Гомотетію евклідової площини задано геометрично, за допомогою центра і пари відповідних точок. Як побудувати образ довільної заданої точки?
14. Гомотетію евклідової площини задано геометрично, за допомогою центра і пари відповідних точок. Як побудувати образ довільного заданого променя?
15. Гомотетію евклідової площини задано геометрично, за допомогою центра і пари відповідних точок. Як побудувати образ довільної заданої прямої?
16. Гомотетію евклідової площини задано геометрично, за допомогою центра і пари відповідних точок. Як побудувати образ довільного заданого кола?
17. Сформулюйте основну теорему перетворень подібності евклідової площини.
18. Як можна задати довільне перетворення подібності евклідової площини геометрично? Відповідь обґрунтуйте.
19. У чому полягає сутність застосування теорії перетворень подібності евклідової площини до розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки?

Задачі для самостійного розв'язання до §7

7.1. Задано кут ABC і точку M у його внутрішній області. Побудувати відрізок з кінцями на сторонах даного кута так, щоб точкою M він ділився у відношенні $2 : 3$.

7.2. Побудувати трапецію, якщо задано кути α і β при її основі, відрізок PT , що дорівнює її діагоналі, та відомо, що основи трапеції відносяться як $2 : 5$.

7.3. Побудувати трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$) за її суміжними сторонами AB і BC , кутом між ними і двома відрізками, відношення довжин яких дорівнює відношенню довжин сторін AD і CD .

7.4. Побудувати трикутник ABC за кутами ABC і ACB та відрізком, довжина якого дорівнює сумі довжини сторони AC і висоти трикутника ABC , проведеної до сторони BC .

7.5. Побудувати трикутник ABC за кутами ABC і ACB та відрізком PT , довжина якого дорівнює різниці довжини сторони AC і висоти трикутника ABC , проведеної до сторони BC .

7.6. Побудувати трикутник ABC за кутами ABC і BAC та відрізком, довжина якого дорівнює сумі довжин сторін BC і AC .

7.7. Побудувати трикутник ABC за кутами ABC і BAC та відрізком, довжина якого дорівнює модулю різниці довжин сторін AB і BC .

7.8. Побудувати прямокутний трикутник за периметром і двома відрізками, відношення довжин яких дорівнює відношенню довжин його катетів.

7.9. Побудувати прямокутний трикутник за гострим кутом і периметром.

7.10. Побудувати трикутник за двома кутами і периметром.

7.11. Побудувати трикутник ABC за кутом ABC , бісектрисою BL та відомим відношенням $2 : 3$ довжин відрізків AD і DC , де точка D є основою висоти BD .

7.12. Побудувати трикутник за трьома його заданими висотами.

7.13. Задано трикутник ABC , коло Q з центром у точці O і точку M , яка належить даному колу. На заданому колі побудувати точки N і K так, щоб трикутник MNK був подібним до заданого трикутника ABC .

7.14. Побудувати трикутник ABC за кутами BAC і ACB та відрізком PT , довжина якого дорівнює сумі довжин сторони AC і висоти BH трикутника ABC .

7.15. Побудувати трикутник ABC за двома заданими кутами та відрізком, який дорівнює радіусу вписаного у трикутник ABC кола.

7.16. Побудувати трикутник ABC за кутом ABC , двома відрізками, відношення довжин яких дорівнює відношенню довжин сторін

BC і AB , та відрізком, довжина якого дорівнює довжині вписаного у трикутник ABC кола.

7.17. Побудувати трикутник за кутом, висотою, проведеною з вершини цього кута, і двома відрізками, відношення довжин яких дорівнює відношенню довжин двох сторін шуканого трикутника, прилеглих до заданого кута.

7.18. Побудувати трикутник ABC за кутом ABC , висотою, проведеною до сторони BC , і двома відрізками, відношення довжин яких дорівнює відношенню довжин сторін AC і BC .

7.19. Побудувати трикутник за двома висотами і медіаною, проведеною до тієї ж самої сторони, що й одна з висот.

7.20. У заданий сектор AOB вписати квадрат так, щоб дві його суміжні вершини належали дузі сектора, а дві інші вершини, відповідно, радіусам OA і OB .

7.21. Задано кут ABC і точку M у його внутрішній області. На стороні BC даного кута побудувати точку X , рівновіддалену від точки M і сторони BA .

7.22. Задано трикутник ABC . Побудувати квадрат $MNPT$ так, щоб його сторона MT належала стороні трикутника ABC , а вершини N і P належали, відповідно, сторонам AB і BC .

7.23. У заданий трикутник вписати ромб із заданим гострим кутом так, щоб дві вершини цього ромба належали одній стороні трикутника, а дві інші, відповідно, двом іншим сторонам.

7.24. У заданий трикутник вписати прямокутник сторони якого відносяться як $1 : 2$, так, щоб одна з більших сторін прямокутника належала стороні заданого трикутника, а вершини протилежної сторони, відповідно, двом іншим сторонам заданого трикутника.

7.25. Задано коло Q з центром у точці O і точки A, B, C , які належать даному колу. Побудувати хорду BE , яка перетинає хорду AC і дане коло, відповідно, у точках D і E так, що $ED:EC = 2:5$.

7.26. Побудувати трикутник ABC за кутом ABC і відрізками P_1T_1 та P_2T_2 , які дорівнюють сумам відповідних сторін трикутника ABC :
 $P_1T_1 = BC + AC$, $P_2T_2 = AC + AB$.

7.27. Задано коло і точку A у його зовнішній області. Побудувати пряму, яка є такою січною, проведеною через точку A до даного кола, що її зовнішня частина відноситься до її внутрішньої частини як 3 : 2.

7.28. Побудувати рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$) за основою BC і двома відрізками, відношення довжин яких для даного трикутника дорівнює відношенню довжини висоти, проведеної до основи, до довжини висоти, проведеної до бічної сторони.

7.29. Побудувати трикутник ABC за висотами, проведеними до сторін BC і AC , та двома відрізками, відношення довжин яких для даного трикутника дорівнює відношенню довжин сторін BC і AB .

7.30. Побудувати трикутник ABC за такими відрізками P_1T_1 , P_2T_2 , P_3T_3 , P_4T_4 про які відомо, що $P_1T_1 : P_2T_2 = BC : AC$, $P_2T_2 : P_3T_3 = AC : AB$,
 $P_4T_4 = AA_1 + BB_1 + CC_1$, де AA_1 , BB_1 , CC_1 - медіани трикутника ABC .

§8. Алгебраїчний метод розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки. Критерій розв'язності задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки

Теоретичні передумови формування алгебраїчного методу розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки створені, по-перше, сформованою у евклідовій геометрії теорією вимірювання довжин відрізків, згідно основних положень якої вірними є наступні твердження:

- 1) якщо обрано відрізок, довжину якого прийнято за одиницю вимірювання довжин відрізків, то для кожного відрізка стає однозначно визначеним певне додатне дійсне число, яке називається довжиною даного відрізка відносно обраного одиничного відрізка;
- 2) довжина відрізка стає однозначно визначеною унаслідок реалізації так званого процесу вимірювання довжин відрізків, який полягає у послідовному відкладанні на вимірюваному відрізку одиничного відрізка та його частин;
- 3) у якості одиничного відрізка може бути обраним довільний відрізок, зрозуміло, що довжина одиничного відрізка відносно нього самого дорівнює одиниці;
- 4) унаслідок зміни одиничного відрізка довжини усіх відрізків змінюються у однакову кількість разів, отже, якщо довжини двох відрізків відносно певного одиничного відрізка є рівними, то такий факт має місце для довжин цих відрізків відносно будь-якого іншого одиничного відрізка, якщо довжина одного відрізка відносно певного одиничного відрізка є більшою за довжину іншого відрізка відносно того самого одиничного відрізка, то цей же факт має місце для довжин цих відрізків відносно будь-якого іншого одиничного відрізка;
- 5) при обраному одиничному відрізку для кожного додатного дійсного числа d існує відрізок, довжина якого відносно обраного одиничного відрізка дорівнює d ; якщо обрано одиничний відрізок і довільний промінь AB , то для кожного додатного числа d на цьому промені є

однозначно визначеною така точка C , що довжина відрізка AC відносно обраного одиничного відрізка складає d ;

- 6) якщо точка C є внутрішньою точкою відрізка AB ($A-C-B$), то довжина відрізка AB дорівнює сумі довжин відрізків AC і CB (довжина відрізка має, так звану, властивість адитивності);
- 7) два відрізка є рівними (суміщаються накладанням) тоді та тільки тоді, коли вони мають однакові довжини відносно одного й того ж одиничного відрізка; один відрізок є більшим за інший тоді та тільки тоді, коли його довжина відносно певного одиничного відрізка є більшою за довжину іншого відносно того самого одиничного відрізка.

По-друге, формування алгебраїчного методу розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки обумовлено можливістю розв'язання вже у межах аксіоматичної теорії побудов за допомогою циркуля і лінійки наступної серії задач.

Задача 8.1. *Задано відрізки P_1T_1 і P_2T_2 . Побудувати відрізок PT , довжина якого дорівнює сумі довжин відрізків P_1T_1 і P_2T_2 .*

Задача 8.2. *Задано відрізки P_1T_1 і P_2T_2 , відрізок P_1T_1 є більшим за відрізок P_2T_2 . Побудувати відрізок PT , довжина якого дорівнює різниці довжин відрізків P_1T_1 і P_2T_2 .*

Задача 8.3. *Задано відрізок AB , довжина якого відносно певного одиничного відрізка дорівнює a . Побудувати відрізок PT , довжина якого відносно того ж самого одиничного відрізка дорівнює $\frac{m}{n} \cdot a$, якщо числа m і n є довільними натуральними числами.*

Задача 8.4. *Задано відрізки P_1T_1 , P_2T_2 і P_3T_3 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка, відповідно, дорівнюють числам a , b і c .*

Побудувати відрізок PT , довжина якого відносно того самого одиничного відрізка дорівнює числу $\frac{ab}{c}$.

Задача 8.5. Задано відрізки P_1T_1 і P_2T_2 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка, відповідно, дорівнюють числам a і b . Побудувати відрізок PT , довжина якого відносно того самого одиничного відрізка дорівнює числу $\sqrt{ab}$ (середньому геометричному чисел a і b).

Задача 8.6. Задано відрізки P_1T_1 і P_2T_2 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка, відповідно, дорівнюють числам a і b . Побудувати відрізок PT , довжина якого відносно того самого одиничного відрізка дорівнює числу $\sqrt{a^2+b^2}$.

Задача 8.7. Задано відрізок AB , довжина якого відносно певного одиничного відрізка дорівнює числу a . Побудувати відрізок PT , довжина якого відносно того ж самого одиничного відрізка дорівнює числу $a \cdot \sqrt{n}$, де число n є довільним натуральним числом.

Задача 8.8. Задано відрізки P_1T_1 і P_2T_2 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка, відповідно, дорівнюють числам a і b . Відрізок P_1T_1 є більшим за відрізок P_2T_2 . Побудувати відрізок PT , довжина якого відносно того самого одиничного відрізка дорівнює числу $\sqrt{a^2-b^2}$.

Розв'язок наведених задач 8.1 і 8.2 є очевидним.

Для розв'язання задачі 8.3 варто, спочатку, побудувати відрізок довжини $m \cdot a$, а потім поділити його на n однакових частин. Шляхи розв'язування цих обох задач є визначеними раніше.

Розв'язок задачі 8.4 знаходиться на підставі теореми Фалеса. Розглядають довільний кут ABC . На стороні BA цього кута відкладають відрізок BA_1 , $BA_1 = P_1T_1$. На стороні BC послідовно відкладають відрізки

BC_1 , $BC_1 = PT_3$ і C_1C_2 , $C_1C_2 = PT_2$. Через точку C_2 , паралельно до прямої C_1A_1 проводять пряму l до перетину з променем BA у точці A_2 . За теоремою Фалеса, $\frac{AA_2}{BA_1} = \frac{C_1C_2}{BC_1}$. Отже, $AA_2 = \frac{BA_1 \cdot C_1C_2}{BC_1}$, $AA_2 = \frac{ab}{c}$, відрізок AA_2 є шуканим (рис. 8.1).

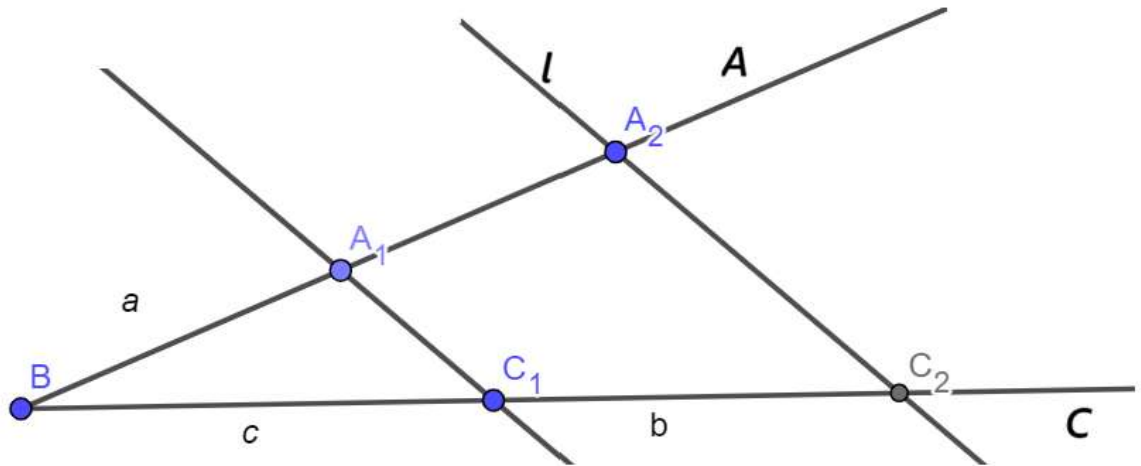


Рис. 8.1.

Розглянемо задачу 8.5. Для її розв'язання використовують відому властивість висоти прямокутного трикутника, проведеної до його гіпотенузи. На довільній прямій l послідовно відкладають відрізки AN , $AN = PT_1$, і NB , $NB = PT_2$. На утвореному відрізку AB , як на діаметрі, будують півколо. Через точку N , перпендикулярно до прямої AB , проводять півхорду CH . Відрізок CH є шуканим (рис. 8.2).

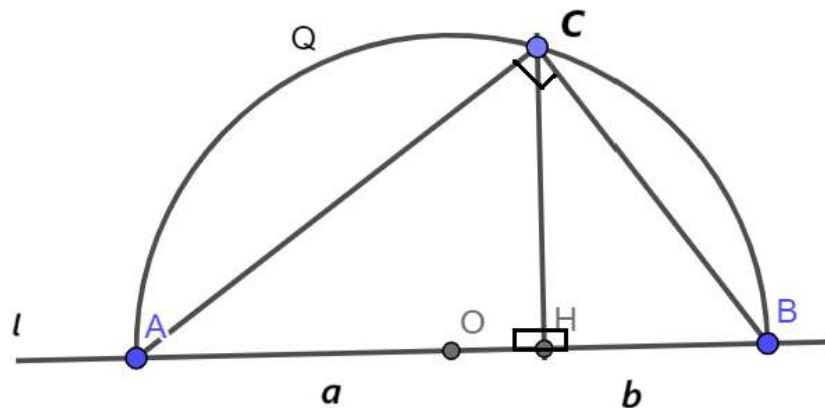


Рис. 8.2.

Дійсно, трикутник ABC є прямокутним: $\angle ACB = 90^\circ$ бо є кутом, вписаним у коло, який спирається на діаметр. Згідно побудови, відрізок CH є висотою прямокутного трикутника ABC , проведеною до гіпотенузи. За відомою теоремою евклідової геометрії, квадрат довжини такої висоти дорівнює добутку довжин проєкцій на гіпотенузу катетів даного прямокутного трикутника. Отже, квадрат довжини відрізка CH дорівнює добутку довжин відрізків AH і HB , які, відповідно, дорівнюють заданим відрізкам P_1T_1 і P_2T_2 , тобто, числу ab , довжина відрізка CH дорівнює $\sqrt{ab}$, відрізок CH є шуканим.

Розв'язок задачі 8.6 є очевидним. Достатньо побудувати прямокутний трикутник, катети якого, відповідно, дорівнюють заданим відрізкам P_1T_1 і P_2T_2 . Згідно теореми Піфагора, гіпотенуза такого трикутника буде мати довжину $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Задачу 8.7 можна розв'язати як за допомогою задач 8.3 та 8.5, так і за допомогою задачі 8.7. Зрозуміло, що має сенс розглядати лише той випадок, коли $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. По-перше, для кожного додатного числа a вірними є тотожності $\sqrt{n} \cdot a = \sqrt{na^2} = \sqrt{(na) \cdot a}$. Отже, за заданим відрізком AB можна побудувати відрізок, довжина b якого дорівнює $n \cdot a$, і розв'язати задачу за схемою розв'язання задачі 8.5. По-друге, $\sqrt{n} \cdot a = \sqrt{na^2} = \sqrt{(n-1)a^2 + a^2}$, $\sqrt{(n-1)a^2} = \sqrt{n-1} \cdot a$. Отже, задачу можна розв'язати і за схемою розв'язання задачі 8.6, якщо спочатку, виходячи із заданого відрізка AB , побудувати відрізок, довжина якого дорівнює $\sqrt{n-1} \cdot a$, і подалі. На першому етапі таких побудов, треба побудувати відрізок, довжина якого складає $\sqrt{2} \cdot a = \sqrt{a^2 + a^2}$. Для цього достатньо побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють заданому відрізку AB . Гіпотенуза такого трикутника буде мати

довжину $\sqrt{2} \cdot a$. Далі, можна обрати цю гіпотенузу у якості одного з катетів наступного прямокутного трикутника, за інший катет прийняти відрізок, який дорівнює заданому відрізку AB . Гіпотенуза такого прямокутного трикутника вже буде мати довжину $\sqrt{3} \cdot a$. Відповідний процес побудов можна продовжувати (див. рис. 8.3).

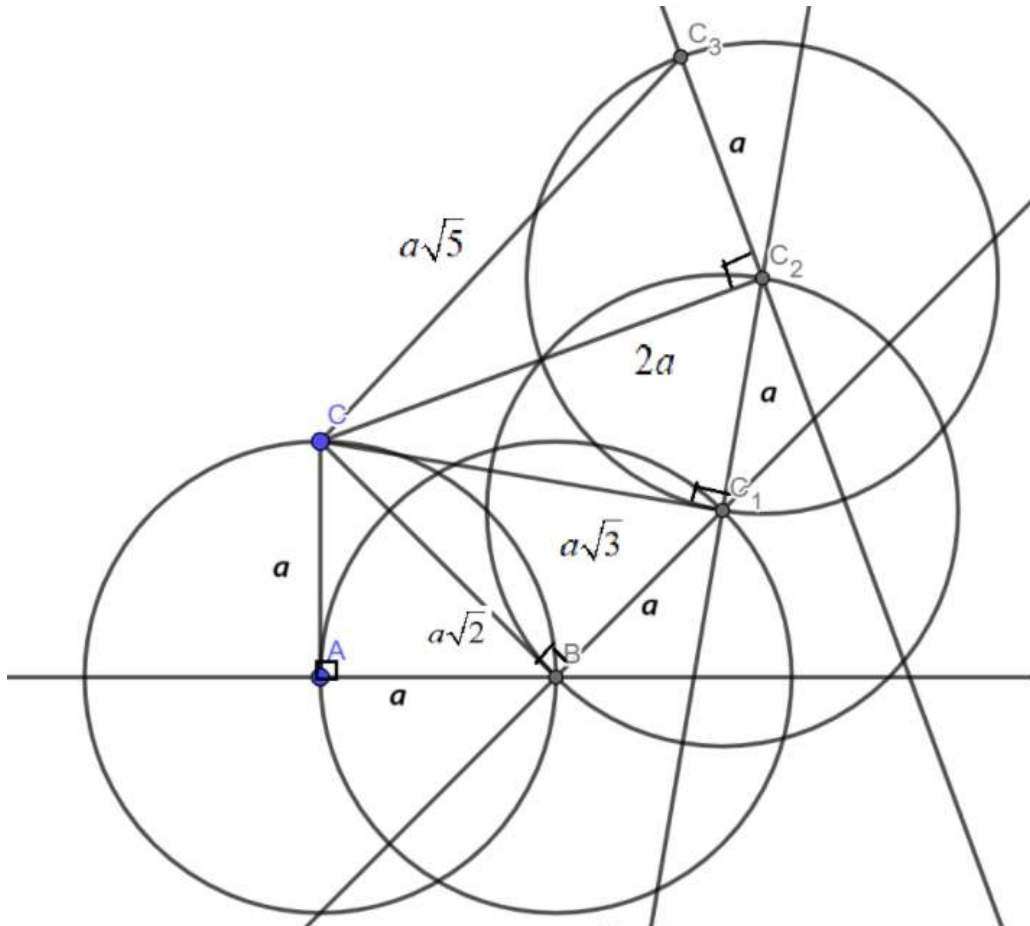


Рис. 8.3.

Розв'язок задачі 8.8 є очевидним, аналогічним до розв'язку задачі 8.6. Достатньо побудувати прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює відрізку P_1T_1 , а один з катетів – відрізку P_2T_2 . Такий трикутник існує, бо, за умови задачі, відрізок P_1T_1 є більшим за відрізок P_2T_2 . Згідно теореми Піфагора, другий катет даного трикутника буде мати потрібну довжину $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Аналіз побудов, запропонованих до задач 8.1 – 8.8, дозволяє зробити той висновок, що задачі 8.1, 8.3 – 8.7 мають розв'язок за будь-якого варіанту

обрання вихідних даних. Цей розв'язок завжди можна знайти вказаним вище способом. Задачі 8.2 і 8.8 мають розв'язок за будь-яких варіантів обрання вихідних даних, що задовольняють їхні умови. Ці розв'язки також завжди можна знайти тими способами, які ми обрали. Розв'язок кожної із задач 8.1 – 8.8 є єдиним в силу того, що умова кожної з них однозначно визначає довжину шуканого відрізка і не передбачає жодних спеціальних варіантів розташування шуканого відрізка на евклідовій площині, а у евклідовій геометрії відрізок своєю довжиною відносно обраного одиничного відрізка з точністю до руху є визначеним однозначно (всі відрізки однакової довжини є рівними між собою).

За допомогою послідовного виконання скінченної кількості побудов, вказаних у задачах 8.1 – 8.8, за заданими відрізками можна будувати і відрізки, довжини яких через довжини заданих відрізків виражаються більш

складними формулами. Розглянемо, наприклад, формулу
$$x = \frac{a^3}{c^2 + \sqrt{ab^3}}.$$

Припустимо, задано відрізки P_1T_1 , P_2T_2 і P_3T_3 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка, відповідно, дорівнюють числам a , b і c .

Можна побудувати відрізок, довжина якого відносно того самого одиничного відрізка дорівнює числу x . Дійсно, спочатку, згідно задачі 8.5, можна побудувати відрізок A_1B_1 , довжина x_1 якого визначається формулою

$x_1 = \sqrt{ab}$. Далі, згідно тієї ж задачі 8.5, можна побудувати відрізок A_2B_2 ,

довжина x_2 якого є визначеною за допомогою формули $x_2 = \sqrt{x_1 b}$. Тоді

$x_2^2 = x_1 \cdot b = \sqrt{ab} \cdot b = \sqrt{ab^3}$. Після цього, згідно задачі 8.6, можна

побудувати відрізок A_3B_3 , довжина x_3 якого дорівнює $x_3 = \sqrt{c^2 + x_2^2}$.

Отже, $x_3^2 = c^2 + x_2^2 = c^2 + \sqrt{ab^3}$. Потім, згідно задачі 8.4, можна побудувати

відрізок A_4B_4 , довжина x_4 якого визначається формулою $x_4 = \frac{a \cdot a}{x_3}$.

Зрозуміло, що $x_4 = \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + \sqrt{ab^3}}}$. Після цього, ще раз відповідно до задачі

8.4, можна побудувати шуканий відрізок AB , довжина x якого визначається за допомогою формули $x = \frac{x_4 \cdot a}{x_3}$. Дійсно, у даному випадку,

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{c^2 + \sqrt{ab^3}}} \cdot \frac{a}{\sqrt{c^2 + \sqrt{ab^3}}} = \frac{a^3}{c^2 + \sqrt{ab^3}}, \text{ тобто, підсумкова формула є}$$

саме тією формулою, яку задано за умови задачі. Зрозуміло, що така задача має єдиний розв'язок за обрання будь-яких вихідних даних – відрізків P_1T_1 , P_2T_2 і P_3T_3 .

Фактично, вже було підкреслено, що, як у аксіоматичній теорії евклідової геометрії, так і у аксіоматичній теорії геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки, відрізкам, безпосередньо не відповідають жодні числові значення довжин, такі значення з'являються лише унаслідок обрання одиничного відрізка і реалізації відповідної процедури вимірювання. «Числові значення не належать самій геометрії, вони є лише її допоміжними засобами» ([кн., с. 50]). Отже, з геометричної точки зору, задачі вищевказаного виду мають сенс тоді та тільки тоді, коли результат їхнього розв'язання не залежить від обраного на евклідовій площині одиничного відрізка.

Тут мається на увазі наступне. Припустимо, задано скінченну кількість відрізків $P_1T_1, P_2T_2, \dots, P_nT_n$, $n \in \mathbb{N}$, довжини яких відносно певного відрізка AB , обраного у якості одиничного, відповідно, приймають додатні значення $a_1, a_2, \dots, a_n$, і формулу $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, визначено відрізок

PT , для довжини a відносно одиничного відрізка AB якого справджується рівність $a = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Нехай одиничний відрізок AB замінено на довільний інший одиничний відрізок MN , відносно якого довжини відрізків $PT_1, PT_2, \dots, PT_n$ приймають додатні значення $b_1, b_2, \dots, b_n$, визначено відрізок CD , для довжини b відносно одиничного відрізка MN якого має місце рівність $b = f(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Відрізки CD і PT є рівними між собою, тобто, вони суміщаються унаслідок певного накладання, існує певний рух, який переводить один з них у інший.

Як вже було відзначено, виходячи з теорії вимірювання довжин відрізків евклідової геометрії, при зміні одиниці вимірювання, довжини всіх відрізків змінюються у однакову кількість разів. Отже, існує таке додатне дійсне число t , що $b_1 = ta_1, b_2 = ta_2, \dots, b_n = ta_n$. Для того, щоб відрізки CD і PT були рівними між собою, необхідно і достатньо, щоб мала місце рівність $b = ta$.

Математичний вираз $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають **додатно однорідним математичним виразом першого степеню** відносно змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, якщо для довільного додатного дійсного числа t рівність

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = tf(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (8.1)$$

є вірною для тих додатних значень змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, для яких обидві частини цієї рівності мають зміст і приймають додатні значення. У аксіоматичній теорії евклідової геометрії справедливим, фактично очевидним, є наступне твердження.

Теорема 8.1. *Нехай числа $a_1, a_2, \dots, a_n, n \in \mathbb{N}$, відповідно, виражають довжини заданих відрізків відносно певного відрізка, обраного у якості одиничного. Для того, щоб додатне число a , знайдене за допомогою формули $a = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, визначало довжину одного й того*

ж відрізка за будь-якого варіанту обрання одиничного відрізка, необхідно й достатньо, щоб математичний вираз $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мав зміст, приймав додатне значення при $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $\dots$, $x_n = a_n$ і був додатньо однорідним математичним виразом першого степеню відносно своїх змінних.

Неважко переконатися у тому, що всі математичні вирази, які фігурують у розглянутих задачах 8.1 – 8.8, відносно своїх змінних є саме додатньо однорідними математичними виразами першого степеню. У той же час, існування у цих задач розв’язків, можливість побудови зазначених відрізків за допомогою циркуля і лінійки виключно на підставі відрізків, заданих у якості вихідних даних, в силу наведеної теореми, фактично, обґрунтовує додатню однорідність першого степеню відповідних математичних виразів.

Одночасно, виникає й наступне питання. Нехай задано формулу $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, у якій математичний вираз $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є додатньо однорідним математичним виразом першого степеню відносно всіх своїх змінних. Якщо відрізки PT_1 , PT_2 , $\dots$, PT_n відносно певного одиничного відрізка AB мають довжини a_1 , a_2 , $\dots$, a_n , сукупність чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ входить до області визначення математичного виразу $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(a_1, a_2, \dots, a_n) > 0$, то за яких умов відрізок PT , довжина a якого відносно одиничного відрізка AB дорівнює $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, на підставі відрізків PT_1 , PT_2 , $\dots$, PT_n можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки (виходячи із визначеної сукупності аксіом таких побудов).

Спочатку у неявному, а потім – і у явному виді подібне питання постало перед математиками ще за часів Евкліда. Але вичерпну відповідь на нього

було отримано лише у другій половині XIX століття. Було доведено справедливність наступного твердження.

Теорема 8.2. *За зазначених вище умов відрізок довжини a за відрізками $P_1T_1, P_2T_2, \dots, P_nT_n$ можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки тоді та тільки тоді, коли формулу $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна представити у вигляді композиції скінченної послідовності формул, що фігурують у попередньо розглянутих задачах 8.1 – 8.8 [15; 28].*

Підкреслимо, що це формули виду $x_1 + x_2; x_1 - x_2; \frac{m}{n}x, m, n \in N; \frac{x_1x_2}{x_3};$

$\sqrt{x_1x_2}; \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; x\sqrt{n}, n \in N; \sqrt{x_1^2 - x_2^2}.$

Сутність алгебраїчного методу розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки полягає у наступному.

Під час реалізації етапу аналізу задачу, за необхідності, переформулюють таким чином, щоб на підставі заданих геометричних фігур було визначено певну скінченну кількість заданих відрізків. Знаходять відрізок, побудова якого дозволяє здійснити подальшу побудову шуканої геометричної фігури, який, виходячи з відрізків, визначених вихідними даними задачі, може бути побудованим за допомогою циркуля і лінійки. Використовуючи відповідні теореми евклідової планіметрії, отримують формулу, яка виражає довжину даного відрізка через довжини заданих відрізків. Визначають скінченну послідовність можливих кроків побудов даного відрізка згідно отриманої формули.

Наведемо відповідні приклади.

Задача 8.9. *Задано трикутник ABC . Побудувати коло Q_1 з центром у точці A , коло Q_2 з центром у точці B і коло Q_3 з центром у точці C так, щоб ці кола попарно дотикалися зовнішнім образом.*

Дано: трикутник ABC (рис. 8.4).

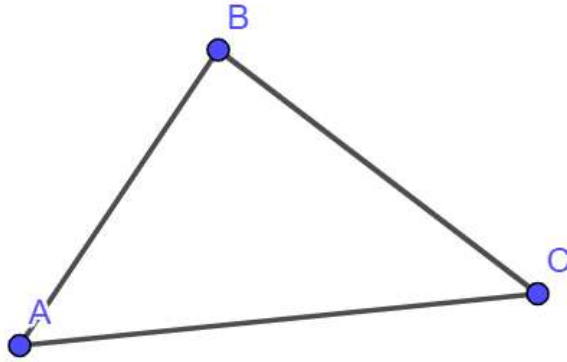


Рис. 8.4.

Побудувати: коло Q_1 з центром у точці A , коло Q_2 з центром у точці B і коло Q_3 з центром у точці C так, щоб кола Q_1 і Q_2 , Q_2 і Q_3 , Q_1 і Q_3 дотикалися одне до одного зовнішнім образом.

Розв'язання. I. Аналіз. Припустимо, задачу розв'язано, шукані кола Q_1 , Q_2 і Q_3 побудовано (див. рис. 8.5).

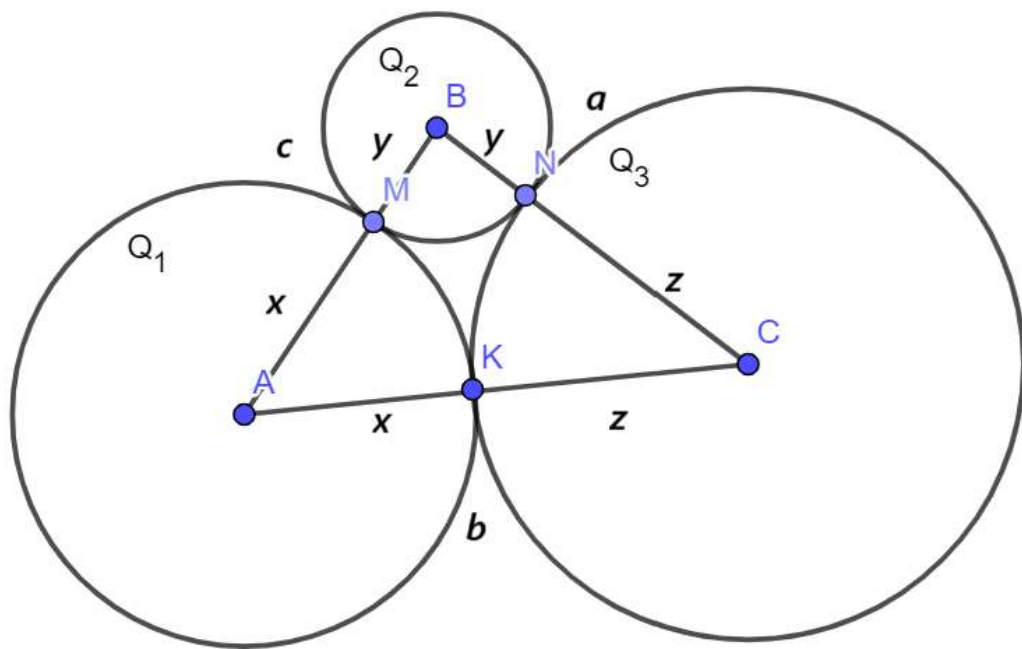


Рис. 8.5.

Позначимо довжини сторін BC , AC , AB заданого трикутника і радіуси кіл Q_1 , Q_2 і Q_3 , відповідно, через a , b , c , x , y , z . В силу того, що точка дотику двох кіл знаходиться на лінії їх центрів, мають місце рівності

$x+y=c$, $y+z=a$, $x+z=b$. Сторони трикутника є відомими за вихідними даними задачі. Отже, маємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} x+y=c \\ y+z=a \\ x+z=b \end{cases}$$

Якщо до першого рівняння додати третє і відняти друге, отримаємо рівняння

$$2x=c+b-a \text{ або } x=\frac{1}{2}(c+b-a).$$

За умови задачі трикутник ABC задано, довжина кожної сторони кожного трикутника є меншою за суму довжин двох інших його сторін, отже, число $c+b-a$ є додатним, відрізок, довжина якого дорівнює числу x , можна побудувати на підставі задач 8.1 – 8.3. Після цього можна буде побудувати коло Q_1 , визначити точки M і K як точки перетину даного кола, відповідно, зі сторонами AB і AC заданого трикутника ABC , побудувати коло Q_2 як коло з центром у точці B радіусу BM і коло Q_3 з центром у точці C радіусу CK . У підсумку, задачу буде розв'язано.

II. Побудова. 1. Заданий трикутник ABC , як геометричну фігуру, утворену точками A , B , C і відрізками AB , AC і BC , вважаємо побудованими.

2. Будуємо відрізок довжини $x=\frac{1}{2}(c+b-a)$, де a , b , c , відповідно,

довжини відрізків BC , AC , і AB відносно будь-якого обраного одиничного відрізка. (Зрозуміло, що результат побудови не залежить від обрання одиничного відрізка). При цьому, мабуть, зручніше за все, виконати наступні дії: 1) на промені, доповняльному до променю CA відкласти відрізок CD , який дорівнює відрізку AB ; 2) на промені DC відкласти відрізок DE , який дорівнює відрізку AB ; 3) побудувати середину K відрізка AE . Відрізок AK буде шуканим (рис. 8.6)

3. Будуємо коло Q_1 як коло з центром у точці A радіусу AK .

4. Будуємо коло Q_3 як коло з центром у точці C радіусу CK .

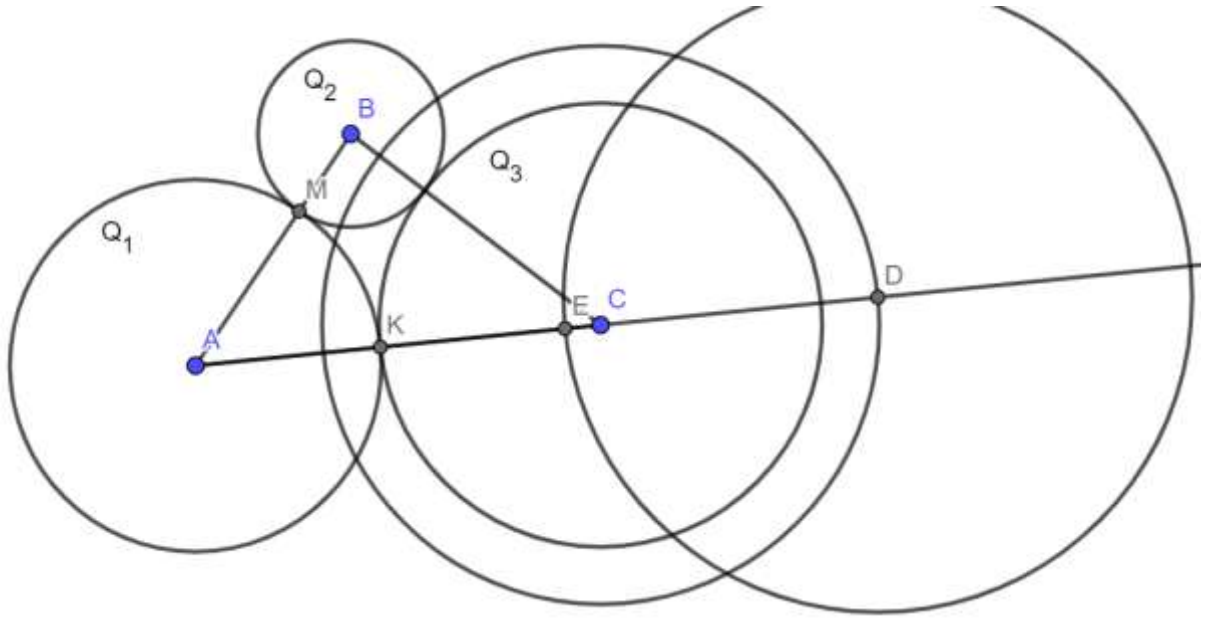


Рис. 8.6.

5. Будуємо точку M як точку перетину кола Q_1 з відрізком AB .

6. Будуємо коло Q_2 як коло з центром у точці B радіусу MB .

III. Доведення. Згідно другого кроку процесу побудови, $AD = AC + CD = AC + AB$, $DE = BC$. В силу того, що для кожної сторони кожного трикутника вірною є нерівність трикутника, мають місце нерівності $BC < AC + AB$, $DE < AD$, точка E є внутрішньою точкою відрізка AD . Згідно того самого кроку процесу побудови, точка K є серединою відрізка

$$AE, \quad AK = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} (AD - DE) = \frac{1}{2} (AC + AB - BC).$$

З іншого боку, кожна сторона кожного трикутника є більшою за модуль різниці двох інших сторін.

$$\text{Звідси } AC > AB - BC; \quad \frac{1}{2} AC > \frac{1}{2} (AB - BC); \quad AC > \frac{1}{2} (AC + AB - BC);$$

$AC > AK$, точка K належить стороні AC заданого трикутника ABC .

$$\text{Аналогічно } AB > AC - BC; \quad \frac{1}{2} AB > \frac{1}{2} (AC - BC);$$

$$AB > \frac{1}{2} (AC + AB - BC), \quad \text{точка } M \quad (AM = AK \text{ згідно третього і п'ятого}$$

кроків побудов), як точка перетину кола Q_1 з відрізком AB , існує як внутрішня точка відрізка AB .

Згідно третього і четвертого кроків побудов, кола Q_1 і Q_2 мають визначені умовою задачі центри, відстань між їхніми центрами дорівнює сумі їх радіусів ($AC = AK + KC$), отже, ці кола дотикаються зовнішнім образом. Згідно третього і шостого кроків побудов, аналогічне твердження має місце й для кіл Q_1 і Q_2 . Згідно четвертого і шостого кроків побудов, кола Q_2 і Q_3 мають необхідні центри. З іншого боку, згідно п'ятого і шостого кроків побудов, $BM = AB - AM$. Згідно третього і четвертого кроків побудов, відповідно до доведеного $CK = AC - AK$. Але тоді, згідно другого кроку побудов,

$$BM + CK = AB - AM + AC - AK = (AB + AC) - 2AK = AD - AE = DE = BC$$

Отже, відстань між центрами кіл Q_2 і Q_3 дорівнює сумі їхніх радіусів, кола Q_2 і Q_3 також дотикаються одне до одного зовнішнім образом, кола Q_1 , Q_2 і Q_3 є шуканими.

IV. Дослідження. У процесі реалізації етапу доведення було обґрунтовано приналежність всіх побудованих точок відповідним відрізкам (точка K належить відрізку AC , точка M - відрізку AB) для довільного трикутника ABC . Звідси випливає, що дана задача завжди має розв'язок, який завжди можна визначити тим способом, який ми обрали. В силу того, що, як було обґрунтовано під час проведення етапу аналізу, сторонами заданого трикутника ABC радіус кола Q_1 є визначеним однозначно, у свою чергу, радіус кола Q_1 однозначно визначає радіуси кіл Q_2 і Q_3 , центри всіх трьох кіл є однозначно визначеними умовою задачі, задача має єдиний розв'язок.

Задача 8.10. Побудувати коло, яке проходить через задані точки A і B так, що відрізок дотичної, проведеної до даного кола через задану

точку C від точки C до точки дотику, дорівнює заданому відрізку. Точки A, B і C не належать одній прямій.

Дано: відрізок PT , точки A, B, C (рис. 8.7).



Рис. 8.7.

Побудувати: коло Q , яке проходить через точки A і B так, що певна пряма дотикається кола Q у точці K і $CK = PT$.

Розв'язання. І. Аналіз. Припустимо, побудовано коло Q , яке проходить через задані точки A і B . Нехай пряма l проходить через задану точку C , дотикається кола Q у точці M , відрізок CM дорівнює заданому відрізку PT . Проведемо пряму CB . В силу того, що, за умови задачі, точки A, B, C не належать одній прямій, пряма CB не співпадає з прямою AB . Припустимо, пряма CB є січною до кола Q , перетинає його не лише в точці B , а ще й у певній точці K (рис. 8.8).

Згідно відомої теореми, точка K буде належати променю CB , вірною буде рівність $CK \cdot CB = CM^2$. $CM = PT$, відрізок CB є відомим за вихідними даними задачі. Отже, вищенаведена формула дозволить визначити

відрізок, довжину x якого знаходять із співвідношення $x = \frac{a^2}{b}$, де a –

довжина відрізка PT , b – довжина відрізка CB . Відрізок довжини x можна побудувати, виходячи із розв'язку задачі 8.4. Відрізок, що йому дорівнює, можна відкласти на промені CB від точки C . У результаті буде побудовано

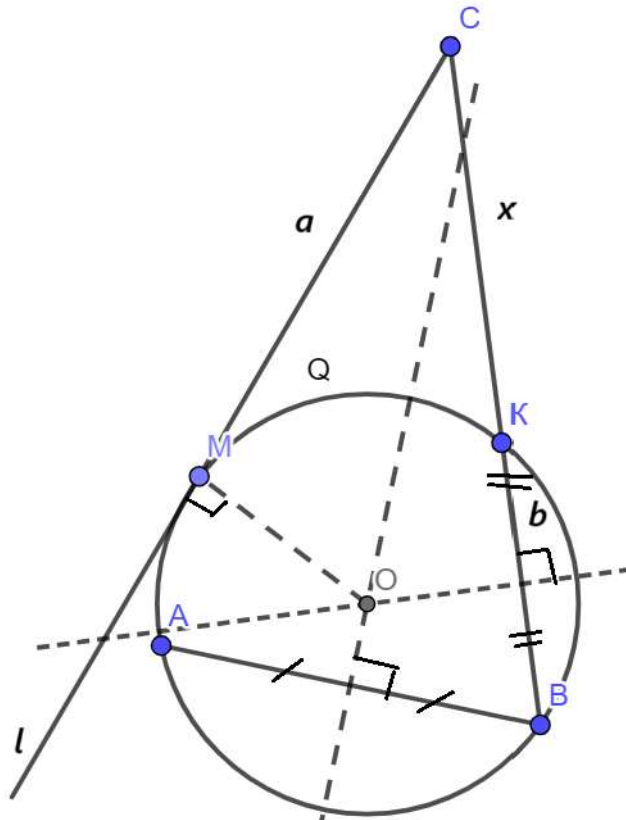


Рис. 8.8.

точку K . Центр O шуканого кола Q можна буде побудувати як точку, рівновіддалену від точок A , B і K , центр кола, описаного навколо трикутника ABK , як точку перетину серединних перпендикулярів до відрізків AB і BK .

II. Побудова. 1. Задані умовою задачі точки A , B , C та відрізок PT вважаємо побудованими. За умови задачі, точки A , B і C не належать одній прямій.

2. Будуємо відрізок CB .

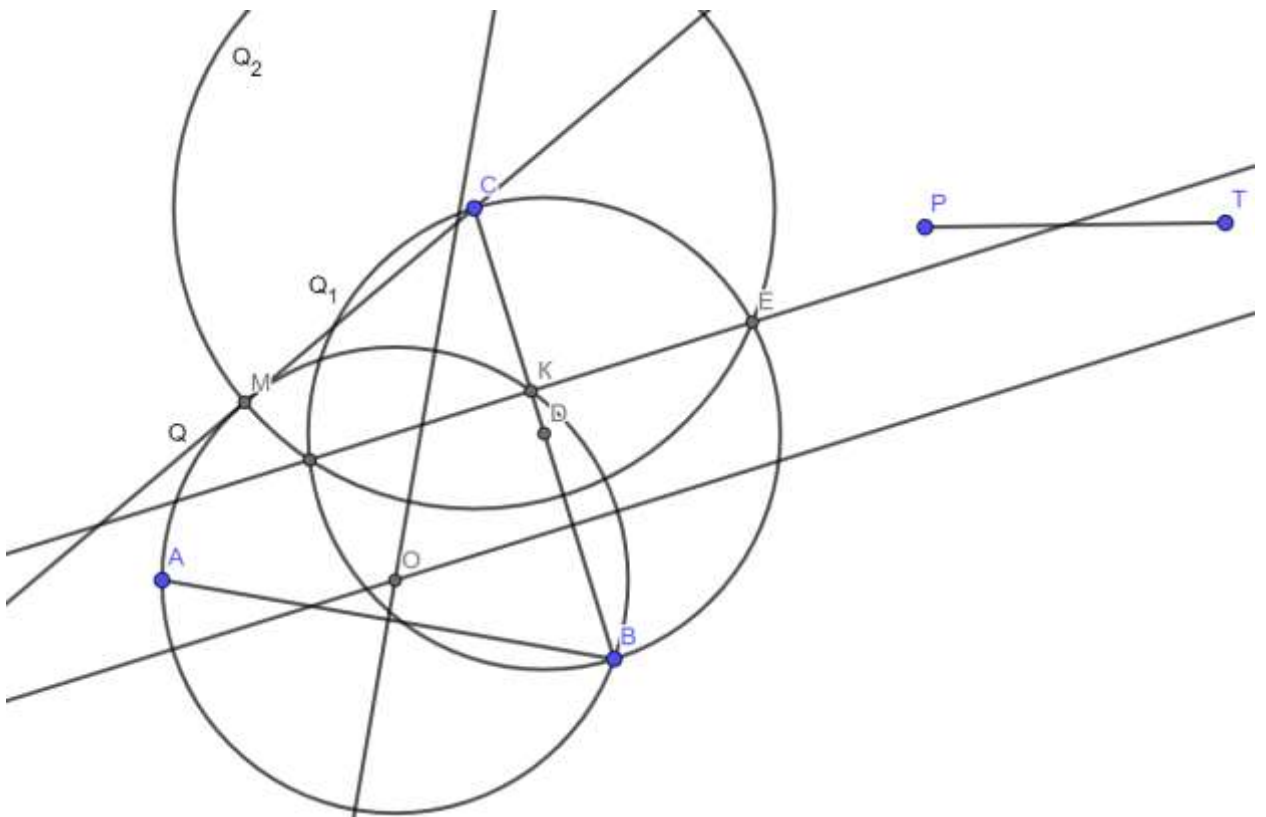
3. Будуємо такий відрізок MN , що $MN = \frac{PT^2}{CB}$. На промені CB відкладаємо

відрізок CK , $CK = MN$.

4. За обраних вихідних даних задачі, необхідний відрізок CK можна побудувати за виключенням окремої побудови відрізка MN . Для цього:

- 1) будуємо середину D відрізка CB ;
- 2) будуємо півколо Q_1 з центром у точці D радіусу CD ;

6. Будуємо коло Q як коло з центром у точці O радіусу OA (рис. 8.9).



ІІІ. Доведення. Розглянемо побудоване коло Q . Згідно п'ятого і шостого кроків побудов, його центр O належить серединному перпендикуляру до відрізка AB . Отже, коло Q проходить через задані точки A і B , що й вимагалось умовою поставленої задачі. Згідно четвертого і п'ятого кроків побудов, пряма CB є січною до кола Q , перетинає це коло у точках K і B , $C-K-B$ (точка K є внутрішньою точкою відрізка CB , бо, згідно першого і третього кроків побудов, точка E належить півколу Q_1 з діаметром CB , $\angle CEB = 90^\circ$, відрізок EK є висотою прямокутного трикутника CEB ,

проведеною до його гіпотенузи). Отже, $CK \cdot CB = CM^2$, де CM - відрізок дотичної, проведеної через точку C до кола Q , від точки C до точки дотику. ($CH > KH$, де точка H є серединою відрізка KB в силу того, що точка C на прямій CB лежить у зовнішній області відносно відрізка KB : $C-K-B$. В силу цього $OC > OK$ (де відрізок OK є радіусом кола Q , бо OC і OK є похилими, проведеними з точки O до прямої CB , відрізки HC і HK - проєкціями цих похилих на пряму CB , більшою є та похила, що має більшу проєкцію). З іншого боку, за відомою теоремою, квадрат катета прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на проєкцію цього катета на гіпотенузу і, в силу цього, $CK \cdot CB = CE^2$. Але, згідно другого кроку побудов, $CE = PT$. Отже, $CK \cdot CM = PT^2$, $CM = PT$, відрізок дотичної, проведеної до даного кола через задану точку C , від точки C до точки дотику, дорівнює заданому відрізку PT , коло Q є шуканим.

IV. Дослідження. Проаналізуємо, чи при будь-якому варіанті задання вихідних даних задачу можна розв'язати тим способом, який ми обрали.

Кроки побудов (1) – (3) є здійсненими за будь-якого варіанту обрання вихідних даних, що задовольняють умову задачі. А ось визначений кроком (4) спосіб побудови відрізка CK можна реалізувати лише у випадку, коли відрізок CE є меншим за відрізок CB , тобто, коли заданий умовою задачі відрізок PT є меншим за визначений вихідними даними задачі відрізок CB .

Припустимо, $CB = PT$. Тоді відрізок CB буде відрізком дотичної, проведеної із точки C до шуканого кола Q (у випадку січної, відрізок CB , як відрізок січної, є або меншим, або більшим до відповідного відрізка дотичної, бо відповідних відрізків січної існує два, їх добуток дорівнює квадрату відрізка дотичної). Точка K буде співпадати з точкою B . Шукане коло Q буде колом, яке проходить через точку A і дотикається прямої CB у точці B . Центр O такого кола є точкою перетину серединного

The diagram illustrates a geometric construction involving a circle \$Q\$ with center \$O\$. A horizontal line segment \$a\$ passes through \$O\$. A vertical line \$l\$ intersects \$a\$ at point \$B\$. A line \$h\$ passes through \$O\$. Points \$A\$ and \$C\$ are located on the circumference of the circle. Line segments \$AB\$ and \$BC\$ are drawn. A right angle symbol is shown at point \$B\$, indicating that \$\angle ABC = 90^\circ\$. Another right angle symbol is shown at the intersection of line \$h\$ and segment \$AB\$. Tick marks on segments \$AB\$ and \$BC\$ indicate that \$AB = BC\$.

Рис. 8.10

В силу того, що, за умови задачі, точки A , B і C не лежать на одній прямій, пряма a не є паралельною до прямої h , точка O є визначеною однозначно, коло Q , як коло з центром у точці O радіусу OA можна легко побудувати.

Розглянемо тепер той випадок, коли $CB < PT$. В силу того, що точка B повинна належати шуканому колу Q , пряма CB буде для кола Q січною,

буде перетинати коло Q ще й у певній точці K , $CK = \frac{PT^2}{CB}$, на прямій CB

точки C , B і K будуть розташовані таким чином, що $C-B-K$ (рис 8.11). Зрозуміло, що, як і під час розв'язування даної задачі за обраних вихідних даних, відрізок, який дорівнює відрізку CK , можна однозначно побудувати за допомогою циркуля і лінійки, після цього – однозначно побудувати відповідну точку K на промені CB і визначити точку O як центр кола, описаного навколо трикутника ABK (реалізувати п'ятий і шостий кроки

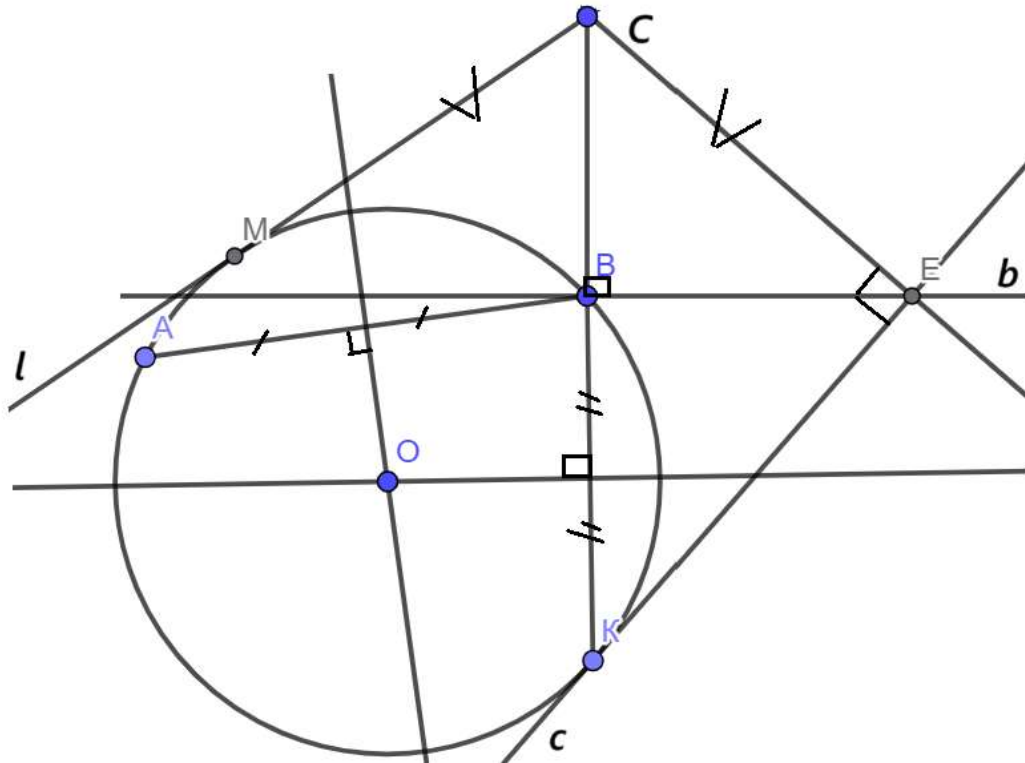


Рис. 8.11

вищезазначених побудов). І у випадку $CB > PT$, і у випадку $CB < PT$, ці кроки є здійсненними, бо точки A , B і C є попарно різними і не належать одній прямій. Питання стоїть лише про те, як у випадку $CB < PT$ доцільніше побудувати точку K . Для цього можна провести пряму CB , побудувати пряму b , яка проходить через точку B перпендикулярно до прямої CB , побудувати точку E як одну з точок перетину прямої b з колом Q_2 з центром у точці C радіусу PT , через точку E перпендикулярно до прямої CE провести пряму c до перетину з прямою BC у шуканій точці K . Відрізок EB буде висотою прямокутного трикутника CEK , проведеною до гіпотенузи, буде справджуватися рівність $CE^2 = CB \cdot CK$, тобто, саме та рівність, яка й є потрібною: $PT^2 = CB \cdot CK$.

Отже, сформульована задача має розв'язок за будь-якого варіанту обрання вихідних даних. Задача має єдиний розв'язок тому, що за умови будь-яких співвідношень між довжинами відрізків CB і PT центр O шуканого кола є точкою перетину двох, однозначно визначених прямих.

Радіус шуканого кола є однозначно визначеним довжинами відрізків AB , BC і PT .

Ще за часів Давньої Греції перед математиками постало питання про те, чи кожна правильно сформульовану задачу на побудову за допомогою циркуля і лінійки у вказаному розумінні за допомогою саме цих інструментів можна розв'язати. (Зрозуміло, що подібна постановка питання має сенс виключно для тих задач на побудову, для яких геометрична фігура, визначена як шукана, принаймні за одного варіанту обрання вихідних даних у евклідовій геометрії існує). При цьому відповідний практичний досвід схиляв до того висновку, що ні, аж ніяк не кожна.

Якщо задачу на побудову за допомогою циркуля і лінійки переформульовано таким чином, що вона стала придатною для постановки питання про можливість її розв'язання алгебраїчним методом, відповідь міститься у сформульованій вище теоремі 8.2. Зауважимо при цьому, що, якщо задачу на побудову за допомогою циркуля і лінійки зведено до побудови відрізка, довжина якого є визначеною певною формулою, а отримана формула не є такою, що дозволяє виконати відповідні побудови, поставлену задачу не лише не можна розв'язати алгебраїчним методом, а й взагалі не можна розв'язати будь-яким іншим методом. (У випадку наявності розв'язку, за побудованою фігурою можна було би побудувати й відповідний відрізок).

Переважна більшість, фактично, усі, задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки курсів геометрії закладів загальної середньої освіти допускають відповідне переформулювання і, в силу цього, розв'язання алгебраїчним методом.

Для кожної окремої відповідної задачі, у тому числі й для однієї й тієї ж задачі, реалізація створення передумов для її розв'язування алгебраїчним методом може бути різною, визначеною більш раціональним, чи менш раціональним чином. Одночасно, у будь-якому випадку, такі передумови можуть бути створеними шляхом обрання на евклідовій площині, побудови

на евклідовій площині за допомогою циркуля і лінійки, прямокутної декартової системи координат.

Перелічені у §2 аксіоми теорії побудов за допомогою циркуля і лінійки, визначені у §2 задачі на побудову геометричних фігур першого рівня складності, дозволяють побудувати на евклідовій площині прямокутну декартову систему координат, навіть, незалежно від геометричних фігур, вказаних у якості вихідних даних кожної окремої задачі. Дійсно, здійсненими є наступні кроки побудов.

1. Застосовуємо аксіому β_1 і визначаємо дві побудовані точки.

Позначаємо їх буквами O та E .

2. Будуємо промінь OE , пряму OE і відрізок OE .

3. Будуємо пряму l , яка проходить через точку O перпендикулярно до прямої OE . Під час реалізації стандартного процесу побудови прямої l будується відмінна від точки O точка на промені, доповняльному до променю OE , за допомогою цієї точки будуємо промінь, доповняльний до променю OE . Будується також принаймні одна точка, припустимо, точка A , прямої l , відмінна від точки O . За допомогою цієї точки, як складова прямої l , будується промінь OA .

У підсумку, на евклідовій площині маємо побудовану конструкцію прямокутної декартової системи координат Oxy , якщо за вісь Ox прийняти пряму OE , разом із променем OE , обраним у якості додатного променю цієї осі, і відрізком OE , обраним у якості одиничного відрізка цієї системи координат, а за вісь Oy – пряму l разом із променем OA , обраним у якості додатного променю цієї осі. (Згідно означення прямокутної декартової системи координат, одиничний відрізок осі Oy повинен дорівнювати одиничному відрізку осі Ox , тобто, відрізку OE) (рис. 8.12). У той же час, у переважній більшості випадків, суттєвого спрощення процесу застосування алгебраїчного методу, точніше, координатного методу, до розв'язування визначеної задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки можна

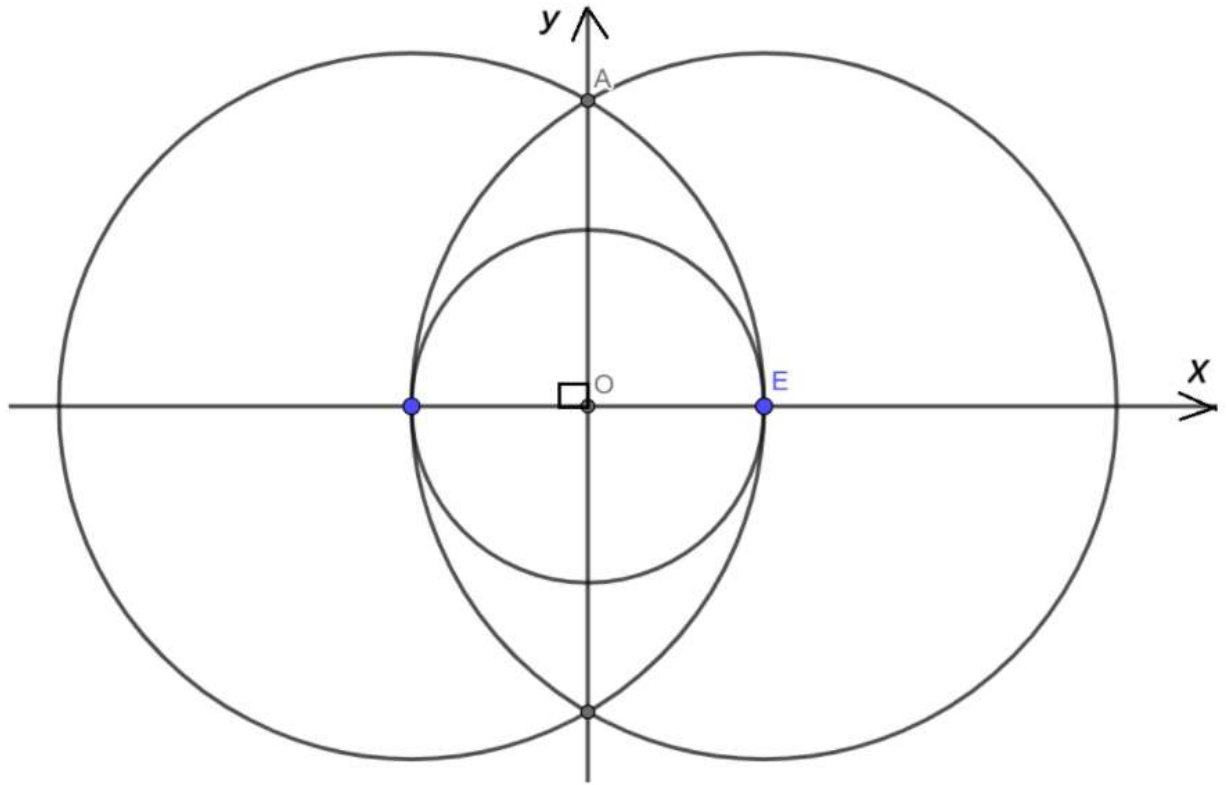


Рис. 8.12

досягнути за допомогою побудови прямокутної декартової системи координат, тим чи іншим чином пов'язаної із вихідними даними даної задачі.

Якщо на площині побудовано прямокутну декартову систему координат Oxy , то для кожної побудованої точки за допомогою циркуля і лінійки можна однозначно побудувати відрізки, які, у свою чергу, положення цієї точки відносно даної системи координат однозначно визначають. У окремих випадках відрізки можуть виявитися так званими «відрізками нульової довжини», тобто, точками. (Так, точка M може належати осі Ox чи осі Oy . У цьому випадку мова буде йти або про точку O , або лише про один відрізок OM , який буде підмножиною відповідної півосі відповідної осі. Якщо точка M не належить ані осі Ox , ані осі Oy , то можна побудувати перпендикуляри MM_1 , $MM_1 \perp Ox$, і MM_2 , $MM_2 \perp Oy$, відрізки OM_1 та OM_2 будуть належати певним півосям відповідних координатних осей). Визначені відрізки можуть утворювати складову шуканих передумов для розв'язання заданої задачі на побудову алгебраїчним методом. Числові

значення довжин цих відрізків відносно одиничного відрізка обраної прямокутної декартової системи координат можуть входити до складу шуканої заключної формули. Зрозуміло, що такі числові значення залежать від обраної системи координат і, в силу цього, не носять суто геометричного характеру. Але, у підсумку, може утворитися така формула, що задовольняє умови теореми 8.1.

Усі геометричні фігури, які допускають побудову за допомогою циркуля і лінійки, зокрема, пряма, промінь, відрізок та коло, можуть бути однозначно визначені й побудовані виходячи із скінченної кількості побудованих точок. Отже, побудова на евклідовій площині за допомогою циркуля і лінійки прямокутної декартової системи координат представляє собою той шлях, який може дозволити переформулювати задану задачу на побудову за допомогою циркуля і лінійки так, щоб доцільною стала постановка питання про застосування до її розв'язування саме алгебраїчного методу.

Прямокутна декартова система координат на евклідовій площині утворена двома взаємно перпендикулярними числовими осями зі спільним початком відліку і рівними між собою одиничними відрізками. Відомо, що конструкція числової осі встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною точок цієї осі як множиною точок прямої і множиною всіх дійсних чисел. Закон f такої відповідності залежить від обрання на прямій, яку покладено у основу даної числової осі, початку відліку, додатного променя та одиничного відрізка. Зрозуміло, що задачу визначення координати $f(A)$ заданої на числовій осі довільної точки A за допомогою циркуля і лінійки розв'язати неможливо. Можна вести мову лише про обернену задачу: на заданій числовій осі за допомогою циркуля і лінійки побудувати точку за її координатою, що є певним дійсним числом. Подібна задача, наприклад, має розв'язок для кожного раціонального числа, для кожного числа виду $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, (відповідний розв'язок можна отримати за зразком розв'язання задач (3) і (7), якщо у якості відрізка AB обрати

одиничний відрізок даної осі), але не для кожного дійсного числа. У загальному випадку, наслідком теореми 8.2 є наступна теорема.

Теорема 8.3. *Нехай на числовій осі Ox побудовано точки $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \in N$, відповідно, з координатами $a_1, a_2, \dots, a_n$. Точку A з координатою a , $a = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, виходячи із точок $A_1, A_2, \dots, A_n$ можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки тоді та тільки тоді, коли формула $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ виражає число $a = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ через числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ і, можливо, через певну скінченну кількість заданих раціональних чисел виключно за допомогою послідовного застосування скінченної кількості арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення і ділення) та вилучення арифметичного квадратного кореня. (Зрозуміло, що при цьому числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, відповідно, повинні входити до області визначення математичного виразу $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$) ([15]).*

Задача 8.11. *На від'ємному промені числової осі Ox з одиничним відрізком OE задано точку A_1 , на додатному промені цієї осі - точку A_2 , на даній числовій осі точка A_1 має координату a_1 , $a_1 < 0$, точка A_2 - координату a_2 , $a_2 > 0$ (рис. 8.12). За допомогою циркуля і лінійки на даній числовій осі побудувати точку A з координатою a , $a = a_1 a_2$.*

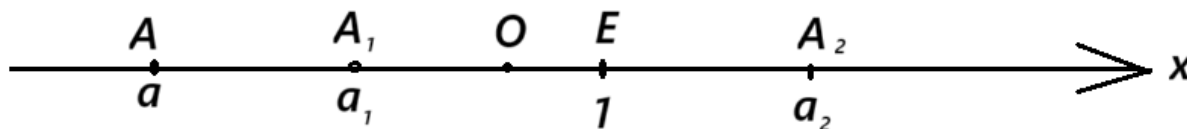


Рис. 8.12

Розв'язання. І. Аналіз. $a_1 a_2 < 0$, отже, шукана точка A належить від'ємному променю осі Ox . $|a| = |a_1 a_2| = |a_1| a_2 = \frac{|a_1| a_2}{1}$. Число $|a_1|$

дорівнює довжині відрізка OA_1 по відношенню до одиничного відрізка OE , число a_2 дорівнює відповідній довжині відрізка OA_2 , число $|a|$ дорівнює довжині шуканого відрізка OA . Отже, відрізок OA можна побудувати як четвертий пропорційний до відрізків OA_1 , OA_2 і OE за зразком розв'язання задачі 8.4.

II. Побудова. 1. На стороні NM довільного кута MNK відкладемо відрізок NM_1 , який дорівнює відрізку OA_1 .

2. На стороні NK даного кута послідовно відкладемо відрізок NK_1 , який дорівнює відрізку OE , і відрізок K_1K_2 , який дорівнює відрізку OA_2 .

3. Через точку K_2 , паралельно до прямої K_1M_1 , проведемо пряму K_2M_2 до перетину з променем NM у точці M_2 (рис. 8.13).

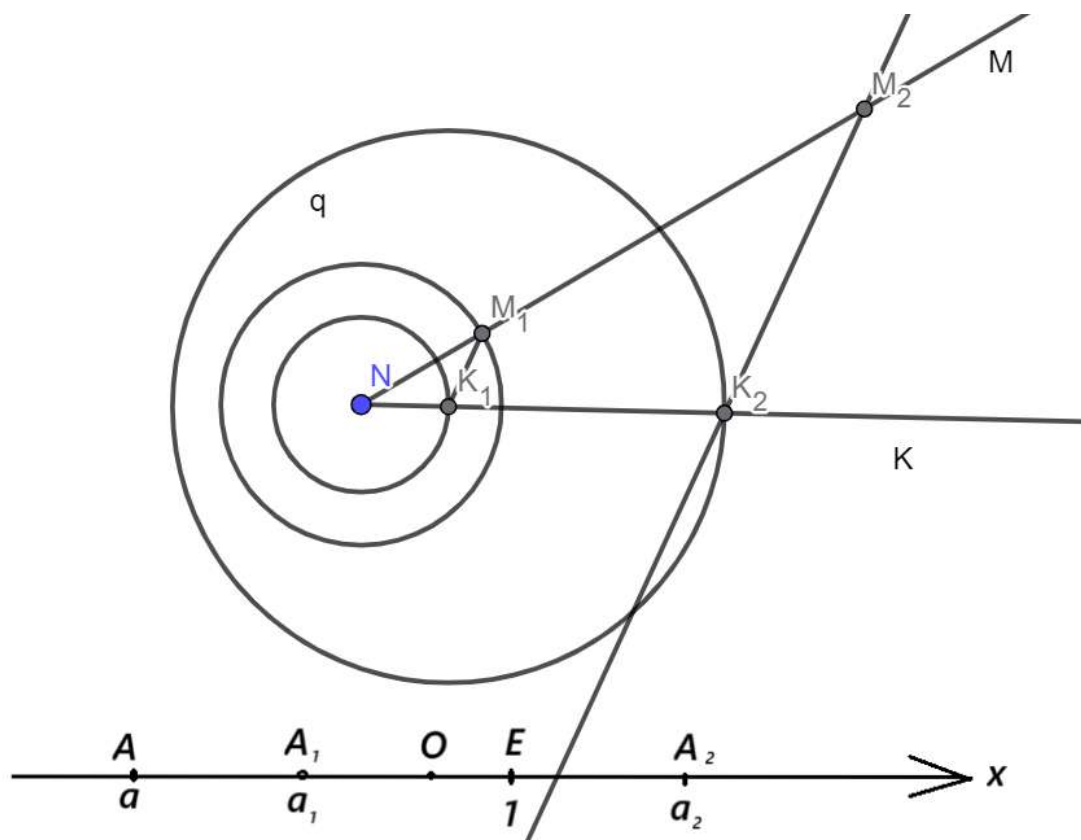


Рис. 8.13

4. Для побудови шуканої точки A на від'ємному промені осі Ox відкладемо відрізок OA , який дорівнює побудованому відрізку M_1M_2 .

III. Доведення. Згідно теореми Фалеса, $\frac{NM_1}{NK_1} = \frac{M_1M_2}{K_1K_2}$. Отже,

$$\frac{OA_1}{OE} = \frac{M_1M_2}{OA_2}, \quad M_1M_2 = \frac{OA_1 \cdot OA_2}{OE}, \quad M_1M_2 = OA.$$

IV. Дослідження. Зрозуміло, що задача завжди має розв'язок і, до того ж, єдиний. Цей розв'язок завжди можна отримати тим способом, який ми обрали, результат розв'язку залежить від заданого відрізка OE (якщо точку E змінити, то й побудована точка A буде іншою).

За своєю сутністю, теореми 8.2 і 8.3 представляють собою критерії можливості розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки. Ми не навели доведень цих теорем, а надали лише відповідні посилання, виходячи з тих міркувань, що всі відомі нам варіанти цих доведень є достатньо складними, далекими від курсів математики закладів загальної середньої освіти, за своїм змістовим наповненням виходять за межі даного курсу. У той же час зрозуміло, що загальнотеоретичне значення даних теорем у межах теорії геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки важко переоцінити. Зокрема, ці теореми створили теоретичні передумови для знаходження строгих обґрунтувань неможливості розв'язання за допомогою циркуля і лінійки низки класичних задач, які привертати до себе увагу математиків протягом багатьох століть. Наведемо подальшу стислу характеристику деяких з таких задач ([15]).

1. Задача про трисекцію кута.

Дано: довільний кут-каркас.

Побудувати: два променя з початком у вершині цього кута, які проходять між сторонами цього кута так, що утворюються три рівних між собою кута.

Теорія вимірювання кутів евклідової геометрії переконливо свідчить про те, що у евклідовій геометрії для довільного кута шукані промені існують і є визначеними однозначно. Існує безліч кутів, для яких відповідні промені

легко побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Це, наприклад, розгорнутий кут, кут у 90° , кут у 45° , і подалі. Одночасно, теорія алгебраїчного методу розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки дозволяє обґрунтувати той факт, що для безлічі кутів подібні побудови є неможливими.

Задачу було зведено (див., наприклад, [Ат., Баз., с. 315] до можливості побудови за допомогою циркуля і лінійки, виходячи із довільного відрізка, прийнятого у якості одиничного, коренів алгебраїчного рівняння

$$x^3 - 3x - a = 0,$$

де число a представляє собою довжину відносно обраного одиничного відрізка певного відрізка, однозначно визначеного величиною заданого кута.

Якщо кут складає, наприклад, 60° , то $a = 1$ і рівняння приймає вид

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

У алгебрі доведено, що дійсний корінь даного рівняння не можна виразити через коефіцієнти цього рівняння за допомогою скінченної кількості операцій додавання, віднімання, множення, ділення та вилучення арифметичного квадратного кореня. (Доведення виходить далеко за межі змістового наповнення курсів алгебри закладів загальної середньої освіти). Згідно теореми 8.3, звідси випливає, що для кута у 60° поставлену задачу розв'язати неможливо, не існує способу побудови кута у 20° за допомогою циркуля і лінійки. Аналогічні міркування виявилися вірними, зокрема, й для

всіх кутів α , $\alpha = \arccos \frac{1}{2p}$, де число p є простим.

2. Задача про подвоєння кубу.

Дано: довільний відрізок PT .

Побудувати: такий відрізок AB , що об'єм кубу, ребро якого дорівнює відрізку AB , є вдвічі більшим за об'єм кубу, ребро якого дорівнює відрізку PT .

Теорія вимірювання довжин відрізків і об'ємів многогранників евклідової геометрії дозволяє зробити той висновок, що, за будь-якого заданого відрізка PT у евклідовій геометрії шуканий відрізок AB існує і за відрізком PT є визначеним однозначно. Якщо дану задачу розв'язувати алгебраїчним методом, то отримаємо рівняння $x^3 = 2a^3$, у якому число a представляє довжину заданого відрізка PT , а число x - довжину шуканого відрізка AB . Той факт, який відрізок обрано у якості одиничного, у даному випадку не є суттєвим тому, що отримане рівняння є рівносильним до рівняння $x = a\sqrt[3]{2}$, а формула $f(a) = a\sqrt[3]{2}$ є додатно однорідним математичним виразом першого степеня відносно змінної a . Будемо вважати, що за одиничний відрізок прийнято заданий відрізок PT . Тоді матимемо рівняння $x^3 - 2 = 0$. Знову-таки, у алгебрі доведено (і доведення виходить далеко за межі курсів алгебри закладів загальної середньої освіти), що єдиний дійсний корінь отриманого рівняння не можна виразити через коефіцієнти цього рівняння за допомогою скінченної кількості операцій додавання, віднімання, множення, ділення та вилучення арифметичного квадратного кореня. Отже, згідно теореми 8.3, поставлену задачу не можна розв'язати за допомогою циркуля і лінійки.

Дана задача носить історичний характер. Вона є відомою під назвою Делійської задачі.

3. Задача про спрямлення кола.

Дано: коло Q з центром у точці O .

Побудувати: відрізок AB , довжина якого дорівнює довжині даного кола. (Зрозуміло, що при цьому мається на увазі, що обидві довжини обчислюються відносно одного й того ж одиничного відрізка)

У евклідовій геометрії доведено, що довжина кола складає $2\pi r$, де число r представляє собою довжину радіуса даного кола, число π є відомим ірраціональним числом, більш за це – числом трансцендентним (не є коренем жодного многочлена над полем раціональних чисел) (див.,

наприклад, [1]). Отже, мова йде про побудову відрізка, довжина x якого знаходиться з формули $x = 2\pi r$. Як і у попередньому прикладі, дана формула представляє собою математичний вираз, додатно однорідний першого степеню відносно змінної r . Отже, для даної задачі, як і для попередньої, визначення одиничного відрізка не є суттєвим. Оберемо у якості одиничного відрізка певний радіус OP заданого кола Q . (Використання аксіом теорії побудов за допомогою циркуля і лінійки дозволяє за заданим колом Q з центром у точці O достатньо легко такий радіус побудувати). Отримаємо формулу $x = 2\pi$. Із теореми 8.3 випливає, що, якщо, виходячи із одиничного відрізка, відрізок довжини a можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки, то число a є алгебраїчним (є коренем певного многочлена над полем раціональних чисел). Число 2π таким числом не є. Звідси випливає, що поставлену задачу за допомогою циркуля і лінійки розв'язати неможливо.

4. Задача про квадратуру круга.

Дано: коло Q з центром у точці O .

Побудувати: квадрат, площа якого дорівнює площі круга, обмеженого даним колом.

Позначимо довжину радіуса заданого кола через r , довжину сторони шуканого квадрата через x . Отримаємо співвідношення $x^2 = \pi r^2$, або,

еквівалентну до нього систему співвідношень
$$\begin{cases} x^2 = yr \\ y = \pi r \end{cases}$$
. Як було

обґрунтовано під час розгляду попередньої задачі, за відрізком довжини r за допомогою циркуля і лінійки побудувати відрізок довжини y неможливо. Отже, неможливо й побудувати відрізок довжини x , задачу про квадратуру круга також неможливо розв'язати за допомогою циркуля і лінійки.

4. Задачі на побудову правильних багатокутників.

Як добре відомо, правильний трикутник, квадрат та правильний шестикутник можна легко побудувати за допомогою циркуля і лінійки

виходячи з відрізка, що дорівнює його стороні. Зрозуміло, що, якщо побудовано правильний n -кутник, то за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати і правильний $2n$ -кутник. Виникає природне питання про те, чи для довільного натурального числа n , $n \geq 3$, можна, виходячи з відрізка, що дорівнює його стороні, побудувати правильний n -кутник за допомогою циркуля і лінійки. Відповідь на це питання надає наступна теорема Гауса.

Теорема 8.4. *Правильний n -кутник, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, виходячи з відрізка, що дорівнює його стороні, можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки тоді та тільки тоді, коли натуральне число n наступним чином розкладається на прості множники:*

$$n = 2^m p_1 p_2 \dots p_t,$$

де $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, числа $p_1, p_2, \dots, p_t$ є попарно різними між собою числами Ферма, тобто, простими числами виду 2^{2^k} , $k \in \mathbb{N}$ ([15]).

Питання та завдання для самоконтролю до §8

1. Які положення евклідової планіметрії створюють теоретичні передумови існування у межах відповідної аксіоматичної теорії алгебраїчного методу розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки?
2. Сформулюйте умови задач, наявність розв'язків у яких забезпечило можливість формування алгебраїчного методу розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки у межах відповідної аксіоматичної теорії.
3. Наведіть розв'язок задачі 8.1 згідно повної схеми розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.
4. Наведіть розв'язок задачі 8.2 згідно повної схеми розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.
5. Наведіть розв'язок задачі 8.3 згідно повної схеми розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.

6. Наведіть розв'язок задачі 8.4 згідно повної схеми розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.
7. Наведіть розв'язок задачі 8.5 згідно повної схеми розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.
8. Наведіть розв'язок задачі 8.6 згідно повної схеми розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.
9. Наведіть розв'язок задачі 8.7 згідно повної схеми розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.
10. Наведіть розв'язок задачі 8.8 згідно повної схеми розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки.
11. Що мають на увазі під геометричним характером задачі на побудову відрізка, довжину якого виражено через довжини заданих відрізків за допомогою певної формули? (Зрозуміло, що довжини всіх відрізків обчислені відносно одного й того ж одиничного відрізка).
12. Який математичний вираз називають додатно однорідним математичним виразом першого степеню відносно визначених змінних?
13. Нехай числа $a_1, a_2, \dots, a_n, n \in \mathbb{N}$, виражають, відповідно, довжини заданих відрізків відносно певного відрізка, обраного у якості одиничного. Сформулюйте критерій того, що число $a = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ визначає довжину одного й того ж відрізка за будь-якого варіанту обрання одиничного відрізка.
14. Сформулюйте критерій того, що відрізок, довжину a якого відносно певного одиничного відрізка визначено за допомогою формули $a = f(a_1, a_2, \dots, a_n), n \in \mathbb{N}$, у якій числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ виражають довжини заданих відрізків $P_1T_1, P_2T_2, \dots, P_nT_n$ відносно того ж самого одиничного відрізка, можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки на підставі заданих відрізків.

15. Згадайте означення числової осі та прямокутної декартової системи координат на евклідовій площині. Поясніть, як, виходячи із аксіом теорії побудов за допомогою циркуля і лінійки, можна побудувати числову вісь, прямокутну декартову систему координат, геометрично визначати координати точок.
16. На числовій осі Ox задано точки $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$, координати яких, відповідно, позначено через $a_1, a_2, \dots, a_n$. Сформулюйте критерій того, що точку A даної числової осі, координата a якої через координати заданих точок $A_1, A_2, \dots, A_n$ виражається за допомогою формули $a = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, за заданими точками можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.
17. Сформулюйте задачу про трисекцію кута. Охарактеризуйте ситуацію з наявністю у цієї задачі розв'язків.
18. Поясніть сутність задачі про подвоєння кубу (Делійська задача).
19. Поясніть сутність задачі про спрямлення кола.
20. Поясніть сутність задачі про квадратуру круга.
21. Поясніть сутність задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки правильних многогранників.

Задачі для самостійного розв'язання до §8

- 8.1. Задано відрізки $P_1T_1, P_2T_2, P_3T_3, P_4T_4$, довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1, a_2, a_3, a_4 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає $a_1 + a_2 - a_3 + a_4$.
- 8.2. Задано відрізки P_1T_1 і P_2T_2 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 і a_2 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає $2a_1 - 3a_2$.

8.3. Задано відрізки PT_1 , PT_2 , PT_3 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 , a_2 , a_3 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає $\frac{(a_1+a_2) \cdot a_3}{a_1}$.

8.4. Задано відрізки PT_1 , PT_2 , PT_3 , PT_4 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 , a_2 , a_3 , a_4 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає $\frac{a_1 \cdot (a_3 - a_4)}{a_2}$.

8.5. Задано відрізки PT_1 , PT_2 , PT_3 , PT_4 , PT_5 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає $\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{a_4 \cdot a_5}$.

8.6. Задано відрізки PT_1 і PT_2 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 і a_2 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає $\frac{a_1^2}{a_2}$.

8.7. Задано відрізки PT_1 і PT_2 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 і a_2 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає $\frac{(a_1+a_2)^2}{a_1}$.

8.8. Задано відрізки P_1T_1 і P_2T_2 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 і a_2 . Побудувати відрізок AB ,

довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає $\frac{a_1^3}{a_2^2}$.

8.9. Задано відрізки P_1T_1 , P_2T_2 , P_3T_3 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 , a_2 , a_3 . Побудувати

відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає

$$\sqrt{\frac{a_1^2 \cdot a_3}{a_2}}.$$

8.10. Задано відрізки P_1T_1 , P_2T_2 , P_3T_3 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 , a_2 , a_3 . Побудувати

відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає

$$a_1 \cdot \sqrt{\frac{a_2}{a_3}}.$$

8.11. Задано відрізок PT , довжину якого відносно певного одиничного відрізка позначено через a . Побудувати відрізок AB , довжина якого

відносно даного одиничного відрізка складає $\frac{a}{\sqrt{5}}$.

8.12. Задано відрізки P_1T_1 , P_2T_2 , P_3T_3 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 , a_2 , a_3 . Побудувати

відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає

$$\sqrt[4]{a_1^2 a_2 a_3}.$$

8.13. Задано відрізки P_1T_1 , P_2T_2 , P_3T_3 , P_4T_4 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 , a_2 , a_3 , a_4 . Побудувати

відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає $\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$.

8.14. Задано відрізки $P_1 T_1$, $P_2 T_2$, $P_3 T_3$, довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 , a_2 , a_3 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає $\sqrt{a_1 a_2 - a_3^2}$.

8.15. Задано відрізки $P_1 T_1$ і $P_2 T_2$, довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 і a_2 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає $\sqrt{3a_1^2 - 2a_2^2}$.

8.16. Задано відрізки $P_1 T_1$ і $P_2 T_2$, довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 і a_2 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає $\frac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2}}$.

8.17. Задано відрізки $P_1 T_1$, $P_2 T_2$, $P_3 T_3$, довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 , a_2 , a_3 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає $\frac{a_1 a_2^2}{a_3 \sqrt{4a_1^2 - 9a_2^2}}$.

8.18. Задано відрізки $P_1 T_1$ і $P_2 T_2$, довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 і a_2 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає $\sqrt[4]{a_1^2 - a_2^2}$.

8.19. Задано відрізки $P_1 T_1$, $P_2 T_2$, $P_3 T_3$, довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 , a_2 , a_3 . Побудувати

відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка складає $\frac{a_1^4 + a_2^4}{a_1^3 - a_2^3}$.

8.20. Задано відрізки P_1T_1 і P_2T_2 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 і a_2 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка є коренем квадратного рівняння $x^2 + a_1x + a_2^2 = 0$.

8.21. Задано відрізки P_1T_1 і P_2T_2 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 і a_2 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка є коренем квадратного рівняння $x^2 - x\sqrt{a_1a_2} + a_1^2 = 0$.

8.22. Задано відрізки P_1T_1 і P_2T_2 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 і a_2 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка є коренем квадратного рівняння $a_1x^2 - \sqrt{a_1a_2^3}x - a_2\sqrt{a_1^4 - a_2^4} = 0$.

8.23. Задано відрізки P_1T_1 і P_2T_2 , довжини яких відносно певного одиничного відрізка позначено, відповідно, через a_1 і a_2 . Побудувати відрізок AB , довжина якого відносно даного одиничного відрізка є коренем квадратного рівняння $x^2 - a_1x - a_2^2 = 0$.

8.24. Побудувати коло, яке проходить через дві задані точки і дотикається до заданої прямої.

8.25. Побудувати прямокутний трикутник за сумою катетів і висотою, проведеною до гіпотенузи.

8.26. Побудувати коло, яке обмежує круг, площа якого дорівнює площі кільця між двома заданими концентричними колами.

- 8.27. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і бісектрисою прямого кута.
- 8.28. У задане коло вписати рівнобедрений трикутник, у якого медіана, проведена до бічної сторони, дорівнює заданому відрізку.
- 8.29. Побудувати квадрат, рівновеликий до заданого трикутника.
- 8.30. Побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник, рівновеликий до заданого прямокутника.
- 8.31. Побудувати квадрат, площа якого дорівнює сумі площ двох заданих прямокутників.
- 8.32. У задане коло вписати прямокутник, рівновеликий до заданого квадрата.
- 8.33. У задане коло вписати прямокутник, периметр якого дорівнює довжині заданого відрізка.
- 8.34. Побудувати пряму, паралельну до сторони AC заданого трикутника ABC , яка перетинає його сторони AB і BC , відповідно, у точках M і N так, що площа трикутника MBN відноситься до площі трапеції $AMNC$ як довжини m і n двох заданих відрізків.
- 8.35. Побудувати пряму, яка є паралельною до основ заданої трапеції і перетинає бічні сторони цієї трапеції у внутрішніх точках так, що при цьому задана трапеція розбивається на дві рівновеликі трапеції.

Тестові завдання для самоконтролю за теоретичним змістом курсу

1. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які є **вірними**.

- I. На перших етапах формування евклідової геометрії як науки факт існування у ній відповідної геометричної фігури ототожнювався з існуванням у докільці або можливістю побудови у докільці фізичного аналогу такої фігури за допомогою реальних технічних приладів.
- II. На перших етапах формування евклідової геометрії як науки факт існування у ній відповідної геометричної фігури ототожнювався виключно з існуванням у докільці аналогічних природних форм.
- III. Поштовхом до усвідомлення необхідності розмежування у евклідовій геометрії як дедуктивній теорії понять існування геометричної фігури і можливості її побудови за допомогою «циркуля і лінійки» стали проблеми, пов'язані з пошуком розв'язків задач про трисекцію кута та подвоєння кубу.
- IV. Аксиоматику «циркуля і лінійки» можна побудувати у вигляді продовження будь-якої аксиоматики евклідової планіметрії.
- V. Аксиоматику «циркуля і лінійки» можна побудувати у вигляді посилення будь-якої аксиоматики евклідової планіметрії.

А	Б	В	Г	Д
I, II, IV	II, III	Лише V	I, III, V	II, IV

2. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які **не є вірними**.

- I. Побудова канонічного посилення аксиоматики евклідової планіметрії з метою створення аксиоматики теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки» вимагає обов'язкового доєднання до аксиоматики евклідової планіметрії нових неозначуваних понять.
- II. Побудова канонічного посилення аксиоматики евклідової планіметрії з метою створення аксиоматики теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки» вимагає обов'язкового доєднання до переліку аксіом даної аксиоматики нових аксіом.
- III. Побудова канонічного посилення аксиоматики евклідової планіметрії з метою створення аксиоматики теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки» вимагає обов'язкового доєднання до переліку аксіом даної аксиоматики виключно двох нових аксіом: аксіоми циркуля і аксіоми лінійки.
- IV. Побудова канонічного посилення аксиоматики евклідової планіметрії з метою створення аксиоматики теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки» вимагає обов'язкового доєднання до переліку аксіом даної аксиоматики виключно аксіом, що є

математичними аналогами тих практичних дій, які можна здійснювати за допомогою циркуля та лінійки без поділок.

- V. Існують різні, еквівалентні між собою, варіанти аксіоматик теорії «побудов на евклідовій площині за допомогою циркуля і лінійки».

А	Б	В	Г	Д
Лише II	III, IV	Лише V	I, V	II, III

3. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які є **вірними**.

- I. Стандартні курси планіметрії закладів загальної середньої освіти включають до себе явним чином сформульовані аксіоми «циркуля і лінійки».
- II. Стандартні курси планіметрії закладів загальної середньої освіти включають до себе неявним чином сформульовані аксіоми «циркуля і лінійки».
- III. Стандартні курси планіметрії закладів загальної середньої освіти не містять формулювань загальних аксіом теорії побудов «за допомогою циркуля і лінійки».
- IV. Деякі аксіоми теорії побудов «за допомогою циркуля і лінійки» входять до складу аксіом евклідової геометрії, сформульованих у стандартних курсах геометрії закладів загальної середньої освіти.
- V. Можна вважати, що деякі аксіоми теорії побудов «за допомогою циркуля і лінійки» неявним чином входять до складу аксіом евклідової геометрії, сформульованих у стандартних курсах геометрії закладів загальної середньої освіти.

А	Б	В	Г	Д
II, III, V	I, II, IV	II, IV, V	I, III, IV	III, IV, V

4. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які є **вірними**.

- I. Стандартний курс геометрії закладів загальної середньої освіти за своїм змістовим наповненням носить двоїстий характер, поєднуючи у собі уявлення про евклідову геометрію як аксіоматичну теорію і як «фізичну» геометрію - науку, що безпосередньо опановує властивості просторових форм довкілля.
- II. На даний час стандартні курси геометрії закладів загальної середньої освіти представлені виключно у вигляді цілісних аксіоматичних теорій.
- III. На даний час стандартні курси геометрії закладів загальної середньої освіти містять уявлення про евклідову геометрію як аксіоматичну теорію.

- IV. Стандартні курси геометрії закладів загальної середньої освіти вимагають від учнів усвідомлення різниці між побудовами за допомогою циркуля і лінійки у кресленні і аналогічними «побудовами» на підставі евклідової геометрії як аксіоматичної теорії.
- V. Методиці навчання математики відомі спроби представлення стандартних курсів геометрії закладів загальної середньої освіти у вигляді цілісних аксіоматичних теорій.

А	Б	В	Г	Д
II, III, IV	I, II, III	I, III, V	III, IV, V	I, IV, V

5. Вкажіть, які з наведених тверджень **не є вірними**.

- I. Стандартна задача на побудову за допомогою циркуля і лінійки завжди містить скінченну кількість вихідних даних.
- II. Серед вихідних даних стандартної задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки можуть бути геометричні фігури, які, безпосередньо, не можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки у межах стандартної аксіоматики таких побудов.
- III. Задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки вважають конструктивними задачами евклідової геометрії.
- IV. Задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки входять до конструктивної складової аксіоматичної теорії евклідової планіметрії.
- V. Задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки утворюють конструктивну складову аксіоматичної теорії евклідової планіметрії.

А	Б	В	Г	Д
I, II	II, III	II, IV	III, V	IV, V

6. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які **є вірними**.

- I. Якщо геометричну фігуру можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки, то вона існує у аксіоматичній теорії евклідової планіметрії.
- II. Якщо геометрична фігура існує у аксіоматичній теорії евклідової планіметрії, то її можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.
- III. У аксіоматичній теорії евклідової планіметрії існують геометричні фігури, які не можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки у відповідній аксіоматичній теорії.
- IV. У аксіоматичній теорії побудов за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати деякі геометричні фігури, існування яких

неможливо обґрунтувати у аксіоматичній теорії евклідової планіметрії.

- V. Кількість геометричних фігур, які можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки у відповідній аксіоматичній теорії є зліченою.

А	Б	В	Г	Д
II, IV	I, V	II, III	I, III	III, V

7. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які **не є вірними**.

- I. Загальна схема розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки складається з чотирьох етапів.
- II. Задача на побудову за допомогою циркуля і лінійки вважається розв'язаною, якщо реалізовано певні два етапи її розв'язку.
- III. Задача на побудову за допомогою циркуля і лінійки вважається розв'язаною, якщо реалізовано певні три етапи її розв'язку.
- IV. Задача на побудову за допомогою циркуля і лінійки вважається розв'язаною, якщо реалізовано будь-які три етапи її розв'язку.
- V. У деяких підручниках з геометрії для закладів загальної середньої освіти при розв'язуванні задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки реалізацію етапу дослідження не вважають за обов'язкову.

А	Б	В	Г	Д
II, IV	I, II	II, V	IV, V	I, III

8. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які **не є вірними**.

- I. Той чи інший метод розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки обирають під час реалізації етапу аналізу.
- II. При навчанні евклідової геометрії у закладах загальної середньої освіти реалізацію етапу побудови розв'язування задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки вважають за доцільне супроводжувати реальним графічним виконанням відповідних побудов.
- III. При розв'язуванні задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки послідовність реалізації чотирьох стандартних етапів розв'язання не має значення.
- IV. Реалізація етапу дослідження розв'язування задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки передбачає знаходження відповіді на питання, чи при будь-якому варіанті обрання вихідних даних задача має розв'язок.

- V. Рівні між собою геометричні фігури завжди вважають за один розв'язок при розв'язуванні задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки.

A	Б	В	Г	Д
I, V	II, III	I, III	IV, V	III, V

9. Вкажіть, яке з наведених тверджень **не є вірним**.

- I. З точки зору методики навчання геометрії у закладах загальної середньої освіти розв'язання найпростіших із задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки першого рівня складності, фактично, носить інтуїтивний характер.
- II. У задачах на побудову за допомогою циркуля і лінійки під кутом, як правило, розуміють кут-каркас.
- III. Представлення теоретичного процесу побудови за допомогою циркуля і лінійки у вигляді скінченної послідовності застосувань аксіом теорії побудов створює передумови вдалого відтворення його графічної ілюстрації.
- IV. З методичної точки зору реалізацію етапу аналізу при розв'язуванні задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки першого рівня складності у курсах планіметрії закладів загальної середньої освіти беззаперечно не вважають доцільною.
- V. З методичної точки зору питання про доцільність реалізації етапу аналізу при розв'язуванні задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки першого рівня складності в курсах планіметрії закладів загальної середньої освіти є суперечливим.

A	Б	В	Г	Д
V	IV	III	II	I

10. Вкажіть, які з наведених тверджень **є вірними**.

- I. У стандартних курсах планіметрії закладів загальної середньої освіти у якості одного з основних методів розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки розглядають метод геометричних місць точок.
- II. Алгебраїчний метод є основним методом розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки в курсах планіметрії закладів загальної середньої освіти.
- III. Обраний метод розв'язування задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки визначає кроки реалізації етапу побудови.
- IV. Метод паралельного перенесення є основним методом розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки в курсах планіметрії закладів загальної середньої освіти.

- V. Метод симетрії є основним методом розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки в курсах планіметрії закладів загальної середньої освіти.

А	Б	В	Г	Д
II, III	I, III	I, II	III, IV	I, V

11. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які є **вірними**.

- I. Кожну задачу на побудову за допомогою циркуля і лінійки можна розв'язати за методом допоміжного трикутника.
- II. У процесі розв'язування задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки застосування методу допоміжного трикутника часто поєднують із застосуванням методу геометричних місць точок.
- III. Автори далеко не всіх підручників з планіметрії для закладів загальної середньої освіти серед методів розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки вказують метод допоміжного трикутника.
- IV. Автори всіх підручників з планіметрії для закладів загальної середньої освіти серед методів розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки вказують метод допоміжного трикутника.
- V. Плоский трикутник не можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки за умови стандартного переліку аксіом таких побудов.

А	Б	В	Г	Д
I, II	I, IV	II, V	III, IV	IV, V

12. Серед наведених тверджень вкажіть те, яке **не є вірним**.

- I. Обраний спосіб розв'язування задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки вважається тим більш раціональним, чим меншу кількість разів застосувань аксіом теорії побудов він вимагає.
- II. За допомогою циркуля і лінійки можна побудувати дотичну до заданого кола у заданій на цьому колі точці.
- III. За допомогою циркуля і лінійки не можна побудувати дотичну до заданого кола, яка проходить через задану всередині цього кола точку.
- IV. За допомогою циркуля і лінійки не можна побудувати дотичну до заданого кола, яка проходить через задану точку у зовнішній відносно цього кола області.
- V. Якщо задана точка знаходиться у зовнішній відносно заданого кола області, то за допомогою циркуля і лінійки можна

побудувати дві дотичні до даного кола, які проходять через цю точку.

А	Б	В	Г	Д
I	II	III	IV	V

13. Серед наведених тверджень вкажіть те, яке **не є вірним**.

- I. Якщо спільна дотична до двох заданих кіл існує, то її можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.
- II. Будь-яку спільну дотичну до двох заданих кіл можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.
- III. Спільну дотичну до двох концентричних кіл можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.
- IV. Будь-яку спільну дотичну до двох кіл однакових радіусів можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.
- V. Гомотетію можна використати для побудови спільних дотичних до двох заданих кіл різних радіусів, одне з яких знаходиться у зовнішній області іншого.

А	Б	В	Г	Д
I	II	III	IV	V

14. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які **є вірними**.

- I. Історично, у математиці формування поняття про геометричне місце точок передувало формуванню теорії множин.
- II. Поняття про геометричне місце точок, наділених певною властивістю, є рівносильним до поняття «множина точок, задана за допомогою своєї характеристичної властивості».
- III. У планіметрії кожне геометричне місце точок, визначене за допомогою певної характеристичної властивості, можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.
- IV. Для того, щоб обґрунтувати, що деяка геометрична фігура утворює геометричне місце точок, наділених певною характеристичною властивістю, треба довести дві взаємно обернені теореми.
- V. На евклідовій площині геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута, є бісектриса даного кута.

А	Б	В	Г	Д
III, IV, V	I, III, V	I, II, IV	II, III, IV	II, III, V

15. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які **не є вірними**.

- I. Степінь точки відносно кола може бути довільним дійсним числом.
- II. Степінь точки відносно кола може приймати лише додатні значення.
- III. Степінь точки відносно кола може бути від'ємним числом.
- IV. Степінь точки відносно кола може дорівнювати нулю.
- V. Степінь точки відносно кола може приймати довільні від'ємні значення.

А	Б	В	Г	Д
I, II, V	II, III, IV	I, III, V	II, III	I, V

16. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які є **вірними**.

- I. Для будь-яких двох кіл існує радикальна вісь.
- II. Геометричне місце точок, відрізки дотичних з яких до двох заданих кіл є рівними між собою, співпадає з радикальною віссю цих кіл.
- III. Радикальну вісь будь-яких двох заданих не концентричних кіл можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.
- IV. Геометричне місце точок, відрізки дотичних з яких до двох заданих не концентричних кіл є рівними між собою, є підмножиною радикальної осі даних кіл.
- V. Геометричне місце точок, відрізки дотичних з яких до двох заданих не концентричних кіл є рівними між собою, можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

А	Б	В	Г	Д
II, IV	III, IV	I, III	IV, V	I, II

17. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які **не є вірними**.

- I. Кожний рух евклідової площини переводить кожен геометричний фігуру цієї площини у рівну до неї фігуру.
- II. Рух евклідової площини є бієктивним відображенням цієї площини на себе.
- III. Кожне бієктивне відображення евклідової площини на себе є рухом цієї площини.
- IV. Симетрія відносно прямої є рухом евклідової площини.
- V. Композиція двох рухів евклідової площини може не бути рухом цієї площини.

А	Б	В	Г	Д
I, V	II, IV	III, IV	I, III	III, V

18. Встановіть **відповідності** між видами рухів евклідової площини і тими геометричними фігурами або наборами геометричних фігур, за допомогою яких вони можуть бути заданими (апаратами цих рухів).

- | | |
|---|--|
| 1. Паралельне перенесення. | А. Точка і напрямлений відрізок |
| 2. Симетрія відносно точки. | Б. Пряма |
| 3. Симетрія відносно прямої. | В. Направлений відрізок |
| 4. Обертання навколо точки на орієнтований кут. | Г. Орієнтований кут |
| 5. Ковзна симетрія. | Д. Точка |
| | Е. Точка і орієнтований кут |
| | Є. Пряма і колінеарний до неї напрямлений відрізок |

19. Серед наведених тверджень вкажіть те, яке **не є вірним**.

- I. Апарат обертання навколо точки на орієнтований кут на евклідовій площині можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.
- II. Якщо на евклідовій площині задано вісь симетрії, то образ кожної точки площини при цій симетрії можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.
- III. На евклідовій площині симетрія відносно точки є окремим випадком обертання навколо даної точки на орієнтований кут.
- IV. Коло може бути образом прямої при обертанні прямої навколо заданої точки на певний орієнтований кут.
- V. При симетрії відносно прямої відстані від точок до осі симетрії не змінюються.

А	Б	В	Г	Д
I	II	III	IV	V

20. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які **є вірними**.

- I. Метод спрямлення розв'язання задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки є окремим випадком методу симетрії відносно прямої.
- II. Ковзна симетрія, як окремий вид руху площини, є композицією паралельного перенесення на довільний вектор і симетрії відносно прямої.

- III. Ковзна симетрія, як окремий вид руху площини, є композицією паралельного перенесення на певний вектор і симетрії відносно прямої.
- IV. На множині всіх рухів площини бінарна операція композиції рухів є комутативною алгебраїчною операцією.
- V. На множині всіх рухів площини бінарна операція композиції рухів є асоціативною алгебраїчною операцією.

А	Б	В	Г	Д
I, II, IV	I, III, V	II, III, IV	II, III, V	I, II, V

1. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які **не є вірними**.

- I. Довільний рух евклідової площини є окремим випадком її перетворення подібності.
- II. Гомотетія з коефіцієнтом $k = -1$ є рухом евклідової площини.
- III. Довільний рух евклідової площини є окремим випадком певної її гомотетії.
- IV. Кожне перетворення подібності евклідової площини змінює відстані між будь-якими двома точками цієї площини.
- V. Композиція руху і гомотетії евклідової площини може бути рухом евклідової площини.

А	Б	В	Г	Д
III, IV	I, V	II, III	I, II	IV, V

2. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які **є вірними**.

- I. Кожне перетворення подібності евклідової площини переводить кожну пряму у паралельну до неї пряму.
- II. Кожна гомотетія переводить кожну пряму у паралельну до неї пряму.
- III. Гомотетія з коефіцієнтом k , $k \neq 1$ переводить кожну пряму, що не проходить через центр гомотетії, у паралельну до неї пряму.
- IV. Кожне перетворення подібності евклідової площини переводить пару паралельних прямих у пару паралельних прямих.
- V. Перетворення евклідової площини, обернене до певної гомотетії, може не бути гомотетією.

А	Б	В	Г	Д
I, III	II, IV	I, V	III, IV	IV, V

3. Серед наведених тверджень вкажіть те, яке **не є вірним**.

- I. Кожне перетворення подібності з коефіцієнтом k евклідової площини можна представити як композицію довільної гомотетії з коефіцієнтом k і певного руху.

- II. Апарат кожного перетворення подібності евклідової площини можна задати за допомогою циркуля і лінійки.
- III. Довільні перетворення подібності евклідової площини можуть бути застосованими до розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки
- IV. Будь-які два кола евклідової площини є гомотетичними між собою.
- V. Будь-які два кола евклідової площини мають точно два центра гомотетії.

A	Б	В	Г	Д
I	II	III	IV	V

4. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які **є вірними**.

- I. Теоретичні передумови формування алгебраїчного методу розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки створено виключно сформованою у евклідовій геометрії теорією вимірювання довжин відрізків.
- II. Теоретичні передумови формування алгебраїчного методу розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки містять дві складові.
- III. Згідно теорії вимірювання довжин відрізків евклідової геометрії, будь-який відрізок може бути обраним у якості одиничного відрізка.
- IV. На евклідовій площині існують відрізки, довжини яких збільшуються у разі збільшення одиничного відрізка
- V. На евклідовій площині довжини всіх відрізків зменшуються у разі збільшення одиничного відрізка.

A	Б	В	Г	Д
II, III, IV	I, II, III	I, III, IV	I, II, V	II, III, V

5. Серед наведених тверджень вкажіть ті, які **не є вірними**.

- I. Довжину шуканого відрізка виражено через довжини заданих відрізків за допомогою певної формули. Для того, щоб шуканий відрізок, виходячи із заданих відрізків, можна було однозначно побудувати за допомогою циркуля і лінійки, необхідно, щоб дана формула була однорідним математичним виразом першого степеню відносно всіх своїх змінних.
- II. Довжину шуканого відрізка виражено через довжини заданих відрізків за допомогою певної формули. Для того, щоб шуканий відрізок, виходячи із заданих відрізків, можна було однозначно

побудувати за допомогою циркуля і лінійки, необхідно й достатньо, щоб дана формула була однорідним математичним виразом першого степеня відносно всіх своїх змінних.

- III. Переважну більшість задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки стандартних курсів геометрії закладів загальної середньої освіти можна розв'язати алгебраїчним методом.
- IV. Переважну більшість задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки стандартних курсів геометрії закладів загальної середньої освіти доцільно розв'язувати алгебраїчним методом
- V. Якщо задачу на побудову за допомогою циркуля і лінійки зведено до побудови відрізка, довжину якого визначено такою формулою, що не дозволяє виконати відповідні побудови, то поставлену задачу не можна розв'язати за допомогою циркуля і лінійки жодним методом.

А	Б	В	Г	Д
I, II	III, IV	II, IV	II, V	IV, V

Відповіді

до тестових завдань для самоконтролю за теоретичним змістом курсу

1. Г; 2. Б; 3. А; 4. В; 5. Д; 6. Г; 7. А; 8. Д; 9. Б; 10. Б; 11. В; 12. Г; 13. В; 14. В;
15. А; 16. Б; 17. Д; 18. 1-В, 2-Д, 3-Б, 4-Е, 5-Є; 19. Г; 20. Б; 21. А; 22. Г; 23. Д; 24. Д; 25. В.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аксиома

- лінійки

-

Аксиоматика

Аксиоматична теорія несуперечлива

Аксиоми загальні теорії «побудов» на евклідовій площині

Аналоги аксіом циркуля і лінійки у курсах планіметрії закладів загальної середньої освіти

Апарат гомотетії

- руху евклідової площини

Взаємно однозначна відповідність

Вектор

Відношення неозначуване

Вільний вектор

Вісь однакових степенів двох кіл

- радикальна двох кіл
- симетрії

Геометрія евклідова

- - у вигляді аксіоматичної теорії
- фізична

Геометричне місце точок

Гомотетія

Група

Групова операція

Двоїстий характер курсів геометрії закладів загальної середньої освіти

Доведення конструктивного характеру факту існування геометричної фігури

Допустимі спрощення щодо вимог до розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки більш високого, ніж перший, рівнів складності

Дотична до кола

- спільна до двох кіл

Загальна схема розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки

Загальне поняття про розв'язок задачі на побудову

Загальні вимоги до розв'язування задач на побудовку за допомогою циркуля і лінійки

Задача геометрична з геометричними параметрами

- Делійська
- загальна на побудову геометричної фігури на евклідовій площині
- з параметрами
- про квадратуру круга

- - подвоєння кубу
- - спрямлення кола
- - трисекцію кута

Задачі елементарні на побудову за допомогою циркуля і лінійки

- на побудову правильних багатокутників
- найпростіші на побудову за допомогою циркуля і лінійки
- першого рівня складності на побудову за допомогою циркуля і лінійки

Закон відображення

Еквівалентність аксіоматик

Етап аналізу розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки

- доведення розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки
- дослідження розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки
- побудови розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки

Етапи розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки

Існування геометричної фігури

Кола концентричні

Коефіцієнт гомотетії

- подібності

Коло

- Аполлонія

Композиція перетворень

Координата точки на числовій осі

Координати точки відносно прямокутної декартової системи координат

Креслення

Критерій можливості розв'язання задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки

Кут-каркас

Кут обертання

- орієнтований

Лінійка

- без поділок

Математичний вираз додатно однорідний першого степеню

Метод алгебраїчний розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки

- геометричних місць точок розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки

- геометричних перетворень розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки
- допоміжного трикутника розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки
- обертання розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки
- паралельного перенесення розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки
- перетворень подібності розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки
- рухів розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки
- симетрії розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки
- спрямлення розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки

Множина неозначувана

- точок, заданих за допомогою характеристичної властивості

Моделювання математичне

Модель фізична

Накладання геометричних фігур

Напрявлений відрізок

Обертання навколо точки на орієнтований кут

Об'єднання геометричних фігур

Область визначення математичного виразу

Одиниця вимірювання довжин відрізків

Операція арифметична

- побудови геометричної фігури

Основи геометрії

Паралельне перенесення

Перетворення евклідової площини

- подібності евклідової площини
- - планіметричної фігури
- тотожне

Перетин геометричних фігур

Побудова геометричної фігури

Побудови за допомогою циркуля і лінійки у кресленні

- «за допомогою циркуля і лінійки» на підставі аксіоматичної теорії евклідової планіметрії
- реальні графічні

Повнота аксіоматичної теорії

Поняття аксіоматичної теорії

- - - неозначуване

Початок відліку

Продовження аксіоматики

- - канонічне

Промінь

- від'ємний
- додатний

Прямокутна декартова система координат

Радіус кола

Рівність геометричних фігур

Різниця геометричних фігур

Рух евклідової площини

- планіметричної геометричної фігури

Серединний перпендикуляр до відрізка

Симетрія відносно прямої

- - точки
- ковзна

Степінь точки відносно кола

Сутність алгебраїчного методу розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки

- застосування теорії перетворень подібності евклідової площини до розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки
- - рухів евклідової площини до розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки
- методу геометричних місць точок розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки

Теорема Гауса

- основна теорії перетворень подібності евклідової площини
- - рухів евклідової площини
- Піфагора
- Фалеса

Теоретичні передумови наявності алгебраїчного методу розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки

Теорія аксіоматична евклідової геометрії

- - - планіметрії
- вимірювання довжин відрізків у евклідовій геометрії
- дедуктивна

Точка побудована

Фігура геометрична

- - не побудована
- - побудована

- планіметрична
- Фігури геометричні подібні
- - рівні

Центр гомотетії

- обертання
- симетрії

Циркуль

Інформаційні джерела

1. Алексанров І. І. Збірник геометричних задач на побудову з ро'язаннями. Київ. Радянська школа, 1955. 172 с.
2. Бевз В. Г. Історія математики. Харків. Основа, 2006. 176 с.
3. Бойко О. В., Левчук О. М. Математика ювеліра: навчально-методичний посібник. Київ. Київський професійний коледж артдизайну, 2023. 28 с.
4. Боровик В. Р., Зайченко І. В., Мурач М. М., Яковець В. П. Геометричні перетворення площини: навчальний посібник. ТОВ. ВТД Університетська книга», 2003. 510 с.
5. Державний стандарт базової середньої освіти: постанова КМУ від 30.09.2020 р. № 898 <https://zakon.rada.gov.ua>
6. Драганюк С. В., Синюкова О. М. «Побудови» у тривимірному евклідовому просторі та доцільний характер їх висвітлення у навчальних курсах евклідової геометрії за умови практико-орієнтованого навчання. Наукові записки. Серія: Педагогічні науки, 2022, (203), с 61-68.
7. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф. Геометрія. Підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти. Київ-Харків. Ранок, 2024. 288 с.
8. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В. Геометрія: підручн. для 8 класу закл. загал. серед. освіти, 2-ге вид., перероб. Харків. Ранок, 2021. 256 с.
9. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 7-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ. Генеза, 2024. 224 с.
10. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 8 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ. Генеза, 2021. 240 с.
11. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ. Генеза, 2017. 240 с.
12. Кириленко А. Л., Григор'єва В. Б. Застосування перетворень евклідової площини до розв'язання задач. Херсон. ХДУ, 2020. 114 с.

13. Конет І. М., Сорич В. А. Лекції з аналітичної геометрії. Кам'янець-Подільський. Аксіома, 2013. 200 с.
14. Концепція Нової української школи. (2025, 25 січня).
<https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf>
15. Костарчук В. М., Хацет Б. І. Про можливе і неможливе в геометрії циркуля і лінійки. Київ. Радянська школа, 1971. 128 с.
16. Кушнір І. А. Побудова трикутника. Енциклопедія розв'язування задач. Навч. посібник. Київ. Либідь, 1994. 80 с.
17. Кушнір І. А. Методи розв'язання задач з геометрії: Кн. для вчителя. Київ. Абрис, 1994. 464 с.
18. Мерзляк А. Г., Якір М. С. Геометрія. Підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти. Харків. Гімназія, 2024. 272 с.
19. Мерзляк А. Г., Якір М. С. Геометрія. Підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти. Харків. Гімназія, 2025. 240 с.
20. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. Навч. закладів. Харків. Гімназія, 2017. 304 с.
21. Никифорчин О. Р. Основи геометрії. Івано-Франківськ. ПНУ, 2016. 155 с.
22. Погорєлов О. В. Геометрія: підручн. для 7–11 кл. загальноосвітніх закладів. Київ. Освіта, 1990. 348 с.
23. Семенович О. Ф. Геометрія. Групи перетворень. Київ: Вища школа, 1971. 279 с.
24. Сидоренко В. К. Креслення: (проф. рівень): підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навчанням укр. мовою. Київ. Освіта, 2011. 240 с.
25. Синюкова О. М. Конструктивні аспекти евклідової геометрії: тексти лекцій. Одеса. Фенікс, 2022. 147 с.

26. Синюкова О. М., Ладиненко Л. П. Зображення просторових фігур на площині при викладанні евклідової геометрії. Частина I. Одеса, Фенікс, 2019. 488 с.
27. Синюкова О. М. Чепок О. Л. Практико-орієнтована форма організації процесу навчання як необхідна передумова опанування конструктивних елементів евклідової геометрії у закладах загальної середньої освіти. Фізико-математична освіта. 2020. Випуск 4(26). С. 100–106. DOI 10.31110/2413-1571-2020-026-4-017.
28. Теплінський Ю. В. Елементи конструктивної геометрії: навч. посіб. Кам'янець–Подільськ. Кам'янець–Поділ. держ. ун-т, 2005. 152 с.
29. Філіпповський Г. Б. Чудові обмеження в задачах на побудову. Харків: Основа, 2011. 143 с.
30. [Angle Trisection by Hippocrates](https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Hippocrates.shtml) at *cut-the-knot* URL: <https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Hippocrates.shtml>
31. Boyer, Carl Benjumin (1985). A History of Mathematics. Reprint edition. Princeton University Press. 717 p.
32. [Construction with the Compass Only](https://www.cut-the-knot.org/do_you_know/compass.shtml) at *cut-the-knot* URL: https://www.cut-the-knot.org/do_you_know/compass.shtml
33. Euclid's Elements (2002). Green Pharmacy Lion Press. 526 p.
34. Jacobs, Harold R. (2020). Geometry. Seeing, Doing, Understanding. Master Books, 3rd Edition. 780 p.
35. Math Tricks Help You Design Shop Projects: master a simple compass and you're a designer; convert your router into one with a trammel and away you go, Popular Science, May 1971, p104,106,108, Scanned article via Google Books
URL: <https://books.google.com/books?id=ngAAAAAAMBAJ&pg=PA104>
36. [Online ruler-and-compass construction tool](https://wims.univ-cotedazur.fr/~wims/wims.cgi?&+lang=en&+module=tool%2Fgeometry%2Frulecomp.fr) URL: <https://wims.univ-cotedazur.fr/~wims/wims.cgi?&+lang=en&+module=tool%2Fgeometry%2Frulecomp.fr> (in French)

37. Půlpán, Zdeněk & Čihák, Michal. Matematika 6 geometrie pro ZŠ - 1.vydání - SPN, Praha, 2007. 136 stran.
38. Půlpán, Zdeněk, Čihák, Michal, Müllerová, Šárka & Trejbal, Josef. Matematika 7 geometrie pro ZŠ - 1.vydání - SPN, Praha, 2008. 88 stran.
38. Serovajsky, S. (2022). Architecture of Mathematics. USA, Chapman & Hall. 394 p.
39. Van Der Waerden B. L. (2002). Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. Springer. 223 p.
40. [Various constructions using compass and straightedge](#) With interactive animated step-by-step instructions URL: <https://www.mathopenref.com/tocs/constructionstoc.html>
41. [Visual Euclid](#) slideshows of Euclidean constructions URL: <http://www.visual-euclid.org/animations2/>
42. Weisstein, Eric W. [Angle Trisection](#) (англ.) на сайті Wolfram [MathWorld](#). URL: <https://mathworld.wolfram.com/AngleTrisection.html>