О. М. Синюкова, Л. П. Ладиненко

Зображення просторових фігур на площині при викладанні евклідової геометрії

Навчальний посібник

Частина I

Одеса – 2018

У першій частині навчального посібника розглянуто загальні положення теорії зображень просторових фігур на площині та різні методи побудови таких зображень, висвітлено найпростіші властивості паралельного проектування як основного методу побудови зображень просторових фігур при викладанні евклідової геометрії, всебічно досліджено питання зображення плоских фігур на площині за означеним методом.

Матеріал розраховано на студентів фізико-математичних спеціальностей вищих закладів освіти, у першу чергу, педагогічних, учителів математики та учнів середніх загальноосвітніх закладів.

РЕЦЕНЗЕНТИ

С. М. Покась, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології ОНУ імені І. І. Мечнікова

В. В. Грінчук, завідувач науково-методичної лабораторії математики та інформатики ООІУВ

Зміст

ВСТУП

Навчальний посібник «Зображення просторових фігур на площині при викладанні евклідової геометрії» розроблено відповідно до програми однойменного курсу, що входить до навчального плану підготовки майбутніх учителів математики в Державному закладі «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського».

Сьогодні важко уявити собі викладача евклідової стереометрії, який не мав би уяви про методи зображень просторових фігур на площині. Сучасні інформаційні технології дозволяють у різних ракурсах «бачити» будь-які просторові об’єкти на екрані монітора. Натомість це далеко не завжди може суттєво допомогти в розв’язанні необхідної стереометричної задачі. У жодному разі не заперечуючи доцільність використання таких технологій, дозволимо собі стверджувати, що розв’язання значної кількості стереометричних задач стає майже прозорим після виконання на дошці або в учнівському зошиті необхідного рисунку. Зрозуміло, мова може йти лише про правильний рисунок відповідно до обраного методу зображень.

Людство розробило різні методи зображень просторових фігур на площині залежно від різних практичних потреб. Екран монітору також можна розглядати як модель частини евклідової площини. Отже, для створення на ньому певних зображень знайомство з відповідними методами зображень є цілком необхідним.

Математично найпростішим і найбільш придатним до використання під час навчання евклідової геометрії для зображень геометричних фігур на площині виявився метод паралельного проектування. Опанування основних положень цього методу передбачено сучасними програмами з геометрії для старших класів загальноосвітніх закладів [5],[6],[7].

Отже, слід визнати, що знайомство з різними методами зображень просторових фігур на площині є вкрай необхідним як для майбутнього вчителя математики загальноосвітнього закладу, так і для викладача математики вищої школи. Метою цього навчального посібника є забезпечення подібного знайомства.

Перша частина посібника складається з двох розділів. У першому розділі розглянуто загальні поняття про зображення геометричних фігур на площині, наведено приклади найбільш поширених методів зображень, з математичного і методичного поглядів обгрунтовано особливу роль методу паралельного проектування при викладанні евклідової геометрії, наведено основні характеристики методу паралельного проектування, ретельно обгрунтовано найпростіші властивості зображення на площині фігур евклідової геометрії за означеним методом.

Другий розділ присвячено питанням зображення при паралельному проектуванні плоских геометричних фігур. Тут послідовно розглянуто закономірності зображення трикутників та пов'язаних з ними основних лінійних елементів, інших плоских многокутників, кола, круга та їх основних частин, вписаних та описаних многокутників.

Одночасно в запропонованій першій частині посібника висвітлено теорію повноти і неповноти зображень, обгрунтовано критерії різних видів повноти зображень плоских геометричних фігур за допомогою паралельного проектування, для плоских геометричних фігур наведено теорію коефіцієнтів подібної та метричної неповноти.

Матеріал розділів розбито на параграфи. Кожний параграф закінчується питаннями і завданнями для самоконтролю за його змістом. Кожний розділ завершується відповідними практичними завданнями для самостійного розв'язання і завданнями як теоретичного, так і практичного характеру в тестовій формі. Відповіді, розв'язки або вказівки до розв'язків запропонованих практичних завдань разом з відповідями до завдань у тестовій формі розташовані наприкінці посібника. Там також розміщено іменний і предметний покажчики та перелік використаних інформаційний джерел.

Посібник безпосередньо розрахований на студентів фізико-математичних спеціальностей вищих закладів освіти, у першу чергу педагогічних. Викладання більшої частини матеріалу спирається на ті положення евклідової геометрії, які стали відомими читачам під час вивчення шкільного курсу геометрії. При цьому, у випадках, коли автори вважали за доцільне, для усунення необхідності звернень до довідкових джерел і виключення можливих непорозумінь, наводено відповідні означення і сформульовано деякі теореми. Водночас для усвідомлення певних, включених до посібника, положень необхідним є знайомство з матеріалом стандартного курсу лінійної алгебри для вищих закладів освіти і з матеріалом такого курсу аналітичної геометрії для вищих закладів освіти, який містить теорії геометричних перетворень евклідової площини та евклідового простору, зокрема, теорію рухів, теорію перетворень подібності і теорію афінних перетворень. У випадках, коли це є можливим і доцільним, наведено паралельні міркування (і «на мові елементарної геометрії», і «на мові вищої математики»).

Посібник спрямовано на самостійне опанування майбутніми вчителями математики запропонованого навчального матеріалу. Посібник містить теоретичні відомості і задачі, які безпосередньо входять або можуть входити до підручників з геометрії для учнів старших класів загальноосвітніх закладів, на його основі може бути розроблено відповідні факультативні курси для учнів, певні, вміщені в ньому задачі можна розглядати як задачі олімпіадного характеру для учнів старших класів загальноосвітніх закладів. Отже, посібник може бути корисним не тільки для студентів, а й для вчителів-практиків з математики загальноосвітніх закладів. Переважна більшість розглянутого у ньому матеріалу є доступною і для учнів старших класів загальноосвітніх закладів .

Теорія зображень на площині геометричних фігур евклідової геометрії за допомогою паралельного проектування розроблялася М. Ф. Четверухіним, його учнями і послідовниками в минулому столітті ([11], [17], [18], [20], [22],

[23], [24], [25], [29], [31], [32], [33], [34]) головним чином з метою застосування в курсах геометрії середніх закладів освіти. Проте численні, видані на той час для вчителів, навчальні посібники та інші методичні розробки у вигляді книжок у своїй переважній більшості дотепер не збереглися. Зрозуміло, що з багатьма з них можна ознайомитися за електронними версіями. Натомість за такими книжками нинішньому студенту чи вчителю досить важко створити сучасне цілісне уявлення про сутність питання. Автори спробували допомогти їм у цьому.

З методичного погляду даний навчальний посібник має авторський характер. З математичного - авторський характер мають наведені розв’язки запропонованих задач, при цьому важко сказати, які з цих розв’язків мають оригінальний характер.

Автором обох розділів посібника є О. М. Синюкова. Л. П. Ладиненко підготовлено відповіді, розв’язки або вказівки до розв’язання всіх представлених практичних і тестових завдань.

Автори вважають за необхідне висловити свою вдячність студентці фізико-математичного факультету Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» О. Л. Михайловій, дипломна робота якої стала поштовхом для створення даного посібника, хоча, і через значну кількість років після її захисту.

Автори.

РОЗДІЛ І. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ.

§ 1. Загальне поняття про зображення геометричної фігури в евклідовій геометрії

З найдавніших часів людина почала зображати предмети оточуючого середовища на інших предметах цього середовища. Цей факт підтверджується різноманітними археологічними знахідками (див. рис. 1).

Рис.1. Петроглифи на скелях. Казахстан. [36]

Вчені не є одностайними в тому, який зміст носили зображення на початку існування людства. Багато хто вважає, що вони мали суто релігійний характер, інші вбачають у подібних зображеннях спосіб покращення комунікації або спосіб навчання підростаючого покоління.

Проте, якими б не були причини, що змусили людей почати відтворювати предмети довкілля та живі істоти в зображеннях, ця тенденція поглиблювалася з плином часу. Зображення наносили на стіни, посуд, зброю, одяг та інші поверхні, які тільки можна було пристосувати для цього (див. рис. 2).

Рис.2.Древньогрецька ваза з розписом. [37]

Бажаність використання зображень у навчально-виховному процесі була усвідомлена людством ще у далекій давнині. Як приклад цього, до нас дійшли стародавні картини та гравюри, які свідчать про використання з навчальною метою моделей та малюнків (див. рис. 3).

Рис.3. Піфагор Самоський [38]

Загальновідомим є той факт, що людина, а особливо – дитина, значно краще розуміє матеріал, коли має наочний примірник. Але далеко не завжди у процесі навчання можна продемонструвати реальний предмет чи його модель. У цьому часто заважають або розміри цього предмету, або його ціна, або унікальність. До того ж подібне не завжди варто вважати за потрібне, бо у процесі навчання ми, зазвичай, розглядаємо не всі, а лише певні характеристики об′єктів, лише ті характеристики, які є важливими саме для даного етапу навчання.

Рис.4. Декоративний розпис на склі. [39]

Отже, важливим було знайти більш економічний спосіб підвищення наочності навчального процесу. У той же час вже існував досвід представлення предметів оточуючого середовища та живих істот у вигляді рисунків. Такі зображення виявилися саме тим інструментом, який став вкрай доцільним елементом навчання.

Незважаючи на те, що зображення можна будувати на поверхнях будь-якої форми (див. рис.4), найпростішими, і тому найзручнішими, для цього виявилися плоскі поверхні.

Відтак, необхідною складовою викладання евклідової геометрії стала побудова зображень просторових фігур на площині.

Для того, щоб точно описати цей процес, конкретизуємо зміст наступних основних понять.

У математиці під **евклідовою геометрією** розуміють конкретну аксіоматичну теорію. Розробку даної теорії започаткував давньогрецький вчений Евклід близько 300 років до н.е. (рис. 5).

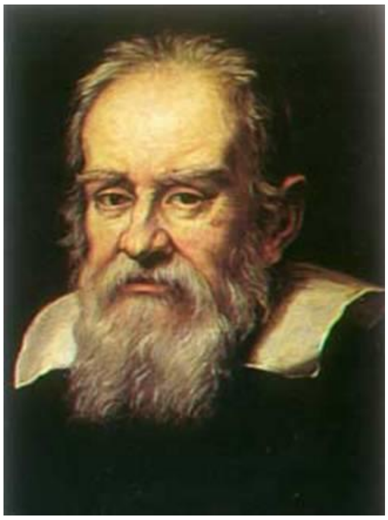


Рис.4. Евклід [40]

Зараз можна стверджувати, що це аксіоматична теорія аксіоматики Д. Гільберта (рис. 6) евклідової геометрії або іншої аксіоматики, яка є еквівалентною до аксіоматики Д. Гільберта. **Евклідів простір** – це множина точок даної аксіоматичної теорії.

Багатотисячолітній досвід людства переконливо свідчить про те, що евклідів простір найкращим чином моделює просторові форми безпосередньо оточуючого людину середовища. Саме тому теорія евклідового простору була першою (і до початку 19 століття єдиною) геометричною моделлю простору, створеною людством.

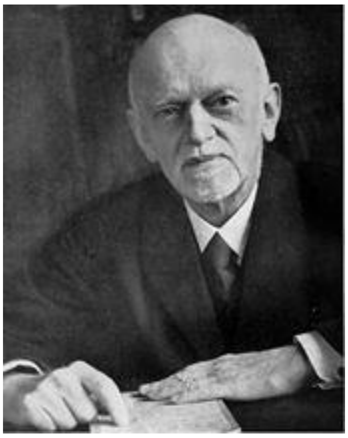


Рис.6. Д. Гільберт [41]

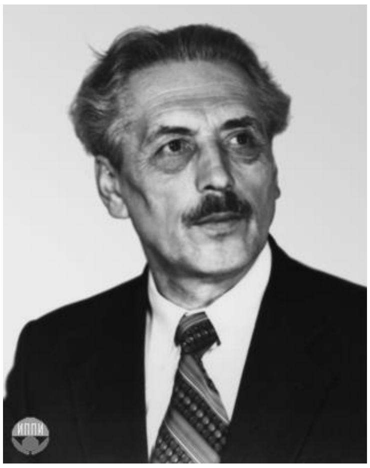


Рис.7. О. В. Погорелов, [42]

Дитина важко сприймає абстрактні математичні теорії. У повному обсязі це і не здається за потрібне у межах загальноосвітньої середньої школи. Отже, як підкреслював О. Д. Александров [12], сучасний шкільний курс геометрії не може не мати двоїстого характеру, органічно поєднуючи у собі так звану фізичну геометрію – науку про властивості просторових форм безпосередньо оточуючого людину середовища – і теоретичну геометрію – науку, представлену у вигляді певної аксіоматичної теорії евклідової геометрії.

До недавнього часу у середніх школах України найбільш поширеною була аксіоматика О. В. Погорелова (рис.7) евклідової геометрії [8], [30]. Зараз автори різних шкільних підручників з геометрії, в більш чи менш явному вигляді, використовують різні аксіоматики евклідової геометрії (див. [1],[2],[3],[4]). Але переважна більшість цих аксіоматик схожа саме на аксіоматику О. В. Погорелова.

Під **геометричною фігурою** F евклідового простору будемо розуміти довільну непорожню підмножину точок цього простору.

Основу поняття про зображення геометричної фігури на площині складає поняття про проекцію геометричної фігури на площину**.** Площину, на яку відбувається проектування фігури F, будемо називати **площиною проекцій.**

Процес проектування фігури F – це процес побудови проекцій всіх її точок.

Процес проектування точки M **–** це встановлення відповідності між точкою M та деякою підмножиною M' точок площини проекцій. При цьому підмножина M' називається **проекцією точки** M.

Проекція фігури F – це множина F' проекцій всіх її точок. Фігуру F для проекції F' називають **оригіналом.**

Конкретний спосіб реалізації процесу побудови проекцій фігур називають **методом проектування**. Будь-який метод проектування характеризується своїми **апаратом** та **законом відображення.**

Апарат – це ті геометричні фігури, що визначають **процес проектування**, а **закон відображення** – це спосіб побудови для точки M її проекції M', тобто спосіб реалізації процесу проектування точки M.

Використання того чи іншого методу залежить від **мети** проектування. Можна стверджувати, що існує безліч різних методів проектування. Це пояснюється тим, що, існує безліч способів задання як апарату проектування, так і закону відображення. Реально, головним чином, теоретично розроблені саме ті методи, які виявилися корисними для певних практичних застосувань.

Зображенням фігури F називають будь-яку фігуру Φ, подібну до проекції F' даної фігури. Площину, на якій побудовано зображення фігури фігури F називать **картинною площиною** або **площиною зображень**. Зрозуміло, що кожна геометрична фігура є подібною до себе, отже, проекція фігури є і її зображенням. Але не тільки. Найчастіше зображення Φ вважають підмножиною площини проекцій, площина проекцій тоді одночасно є і картинною площиною. Але іноді зручно розглядати зображення як підмножину певної іншої площини, можна вести мову про однакові (рівні між собою) зображення однієї і тієї ж фігури на різних площинах.

Потреба в розділенні понять «проекція фігури» і «зображення фігури» виникла в зв'язку з тим, що проекції часто мають розміри, подібні до розмірів оригіналів. А в більшості випадків – це є зайвим для зображень. Часто зображення доцільно робити або меншими, або більшими за проекції. У більшому степені це положення є суттєвим з точки зору можливостей для того чи іншого методу зображень практичних застосувань.

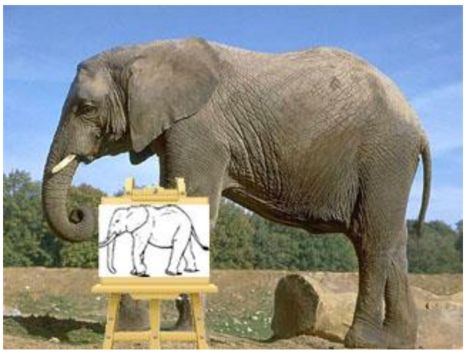


Рис. 8. Зображення та об'єкт мають різний розмір. [43]

Так, зрозуміло, що для проведення досліджень проекція клітини людського тіла в більшості випадків має бути збільшена у велику кількість разів, у той же час зображення слона не завжди повинне відповідати його реальним розмірам (рис. 8).

У відповідності з тим чи іншим методом проектування геометричних фігур говорять про той чи інший **метод зображення** геометричних фігур. Процес зображення фігури F розглядають як процес побудови зображень усіх точок даної фігури, **процес зображення точки** M -- це, знову таки, встановлення відповідності між точкою M і певною підмножиною T точок картинної площини, підмножина T при цьому є зображенням точки M. Зображення $\varPhi$ фігури F, зрозуміло, представляє собою сукупність зображень усіх точок даної фігури, фігура F для **зображення** $\varPhi$ є **оригіналом**.

Між фігурами евклідового простору виділяють чотири великі групи основних відношень: проективні, афінні, подібні і метричні. **Проективні відношення** – це відношення, які зберігаються при довільних проективних перетвореннях евклідового простору. У першу чергу, вони включають у себе відношення приналежності, що на мові теорії множини означає «бути підмножиною».

Афінні відношення – це відношення, які зберігаються при довільних **афінних перетвореннях евклідового простору**. Афінними є всі проективні відношення, а також, наприклад, паралельність прямих і відношення довжин відрізків, що належать одній прямій або паралельним прямим.

Відношення подібності – це відношення, які зберігаються при всіх **перетвореннях подібності евклідового простору**. До них, зокрема, відносяться всі афінні відношення, величини кутів, відношення довжин довільних відрізків.

Метричні відношення – це відношення, які зберігаються при всіх **рухах евклідового простору**. У першу чергу, це всі відношення подібності та довжини відрізків.

Зображення фігури називається **повним** або **позиційно повним**, якщо за цим зображенням однозначно визначаються всі проективні відношення між будь-якими елементами даної фігури. Аналогічним чином визначаються і **афінно повні, подібно повні**, **метрично повні** зображення [14],[18]. Зрозуміло, що кожне афінно повне зображення є і позиційно повним, кожне подібно повне зображення є і афінно повним, кожне метрично повне зображення є і подібно повним.

До позиційно повних зображень не можна довільним чином додавати зображення геометричних фігур, які за допомогою проективних відношень однозначно визначаються через фігури, зображені раніше. До афінно повних зображень не можна довільним чином додавати зображення геометричних фігур, які за допомогою афінних відношень однозначно визначаються через фігури, зображені раніше. Аналогічні твердження є справедливими і для подібно повних, і для метрично повних зображень. Позиційно повні зображення дозволяють відновити оригінал з точністю до проективних перетворень евклідового простору. Афінно повні зображення дозволяють відновити оригінал з точністю до афінних перетворень евклідового простору. Подібно повні зображення дозволяють відновити оригінал з точністю до перетворень подібності евклідового простору. Метрично повні зображення дозволяють відновити оригінал з точністю до його рухів у евклідовому просторі.

Теоретична розробка кожного методу зображень передбачає і визначення способів оцінки характеру повноти отриманого зображення, встановлення критеріїв різних видів повноти.

Питання і завдання для самоконтролю до §1.

1.1. Чим підтверджується той факт, що з найдавніших часів у людини виникла потреба побудови зображень одних предметів оточуючого середовища на інших предметах цього середовища?

1.2. Які міркування існують з приводу мети подібних зображень?

1.3. Які обставини часто заважають продемонструвати у процесі навчання реальний предмет чи його модель?

1.4. Чому у процесі навчання це не завжди можна вважати за потрібне?

1.5. Що розуміють під евклідовою геометрією у теорії зображень геометричних фігур?

1.6. Який вчений започаткував формування евклідової геометрії у вигляді аксіоматичної теорії?

1.7. Що у евклідовій геометрії називають евклідовим простором?

1.8. Чому саме теорія евклідового простору була першою геометричною моделлю простору, створеною людством?

1.9. Як треба розуміти твердження про те, що шкільний курс геометрії носить двоїстий характер?

1.10. Чому шкільний курс геометрії носить двоїстий характер?

1.11. Яка аксіоматика евклідового простору була найбільш поширеною у середніх школах України до недавнього часу?

1.12. Наведіть прийняте у евклідовій геометрії означення геометричної фігури.

1.13. Яке поняття у евклідовій геометрії складає основу поняття про зображення геометричної фігури на площині?

1.14. Як називають площину на яку відбувається проектування геометричної фігури?

1.15. У чому полягає процес проектування геометричної фігури?

1.16. Що розуміють під процесом проектування точки? Наведіть означення проекції точки?

1.17. Наведіть означення проекції геометричної фігури.

1.18. Наведіть означення оригінала проекції геометричної фігури.

1.19. Що у евклідовій геометрії розуміють під методом проектування?

1.20. За допомогою чого у евклідовій геометрії характеризують кожний метод проектування?

1.21. З чого складається апарат методу проектування?

1.22. Що розуміють під законом відображення для певного методу проектування?

1.23. Скільки, теоретично, існує різних методів проектування геометричних фігур на площину? Чим цей факт можна пояснити?

1.24. Від чого залежить застосування того чи іншого методу проектування ?

1.25. Що у теорії зображень геометричних фігур називається зображенням геометричної фігури?

1.26. Наведіть означення картинної площини у теорії зображень геометричних фігур.

1.27. У чому полягає різниця між поняттями «проекція фігури» і «зображення фігури» при певному методі проектування ?

1.28. У зв'язку з чим виникла потреба у розділенні понять «проекція фігури» і «зображення фігури» за певним методом проектування?

1.29. Що у теорії зображень геометричних фігур називають методом зображень?

1.30. Що у теорії зображень геометричних фігур розуміють під процесом зображення певної геометричної фігури?

1.31. Що у теорії зображень геометричних фігур розуміють під процесом зображення довільної точки евклідового простору?

1.32. Що у теорії зображень геометричних фігур називають оригіналом зображення?

1.33. Які перетворення евклідового простору називають проективними?

1.34. Які відношення між геометричними фігурами евклідового простору називають проективними? Наведіть відповідні приклади.

1.35. Які перетворення евклідового простору називають афінними?

1.36. Які відношення між геометричними фігурами евклідового простору називають афінними? Наведіть відповідні приклади.

1.37. Які перетворення евклідового простору називають перетвореннями подібності?

1.38. Які відношення між геометричними фігурами евклідового простору називають відношеннями подібності? Наведіть відповідні приклади.

1.39. Наведіть означення руху евклідового простору.

1.40. Які відношення між геометричними фігурами евклідового простору називають метричними? Наведіть відповідні приклади.

1.41. Наведіть означення повного (позиційно повного) зображення геометричної фігури. У якому степені позиційно повне зображення геометричної фігури характеризує оригінал?

1.42. Наведіть означення афінно повного зображення геометричної фігури. У якому степені позиційно повне зображення геометричної фігури характеризує оригінал?

1.43. Наведіть означення подібно повного зображення геометричної фігури. У якому степені подібно повне зображення геометричної фігури характеризує оригінал?

1.44. Наведіть означення метрично повного зображення геометричної фігури. У якому степені метрично повне зображення геометричної фігури характеризує оригінал?

1.45. Чи передбачає теоретична розробка кожного методу зображень визначення способів оцінки характеру повноти отриманого зображення?

§2. Про різні методи зображень на площині фігур евклідової геометрії

Наведемо кілька прикладів найбільш поширених методів побудови зображень просторових фігур на площині. Кожний з цих методів охарактеризуємо з точки зору його апарату і правила знаходження зображення довільної точки. Історично, всі методи, про які буде подалі йти мова, у евклідовій геометрії сформувалися як математичні абстракції відповідних практичних дій людей по зображенню на плоских поверхнях об'єктів оточуючого середовища. Існування кожного з цих методів обумовлено певними практичними задачами, певними професійними потребами людей. Саме тому більшість з отриманих теоретичних розробок безпосередньо знаходить своє застосування у практичній професійній діяльності відповідних фахівців. Сфери подібних застосувань того чи іншого методу також будуть вказані.

2.1 Метод Монжа

Метод названо на ім′я Гаспара Монжа (1746–1818) (рис.9) – французького математика, геометра та державного діяча, який цей метод розробив та описав.

Рис.9. Гаспар Монж [9]

Апарат методу Монжа складається з трьох попарно перпендикулярних площин α, β, γ. Площину α називають **вертикальною площиною**, β – **горизонтальною площиною**, γ **– профільною** (рис.10).

Для побудови зображення довільної точки M з цієї точки проводять перпендикуляри до кожної з площин апарату: $MM_1 \perp \alpha$, $MM_2 \perp \beta$, $MM_3 \perp \gamma$ (рис.11).

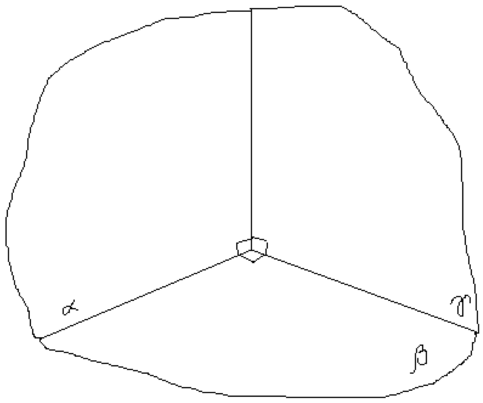


Рис.10

Потім виконують «розріз» за лінією перетину площин γ і β, та «розгортають» утворену фігуру на картинну площину (рис. 12).

Множину точок $\{M_1, M_2, M_3\}$ називають **зображенням точки *M* за методом Монжа** [15], [16].

Метод Монжа дозволяє відновити за зображенням оригінал з точністю до його положення у просторі (див, наприклад, рис. 13).

Отже, всі зображення, отримані за методом Монжа, є метрично повними.

У практичній діяльності метод Монжа, у першу чергу, використовують інженери та лікарі.

Зображення, отримані за методом Монжа, для людей без спеціальних навичок не є наочними. Наприклад, технічно не підготована людина, не завжди спроможна уявити, який

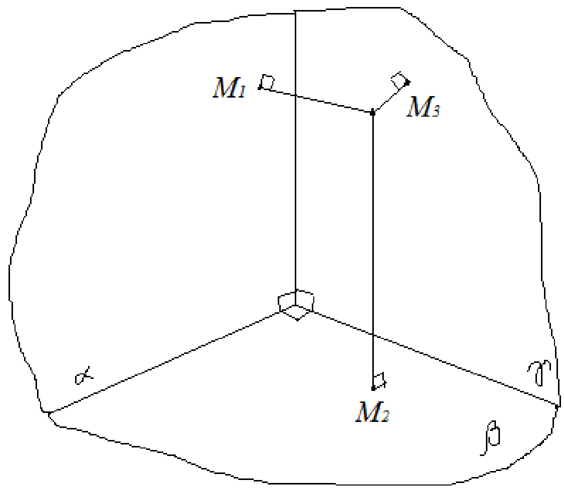


Рис.11

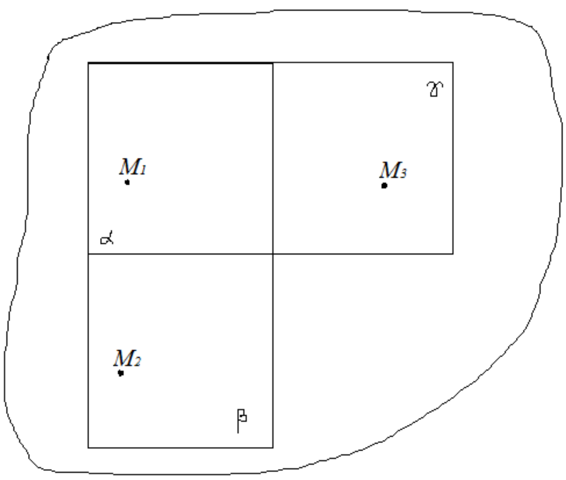


Рис.12

об'єкт зображено на виконаному за допомогою методу Монжа кресленні (див, наприклад, рис. 12). Студенти технічних вузів опановують метод Монжа у курсах нарисної геометрії та креслення. Студенти медичних університетів та лікарі вимагають спеціальної підготовки, для того, щоб навчитися розуміти рентгенівські знімки та знімки УЗІ.

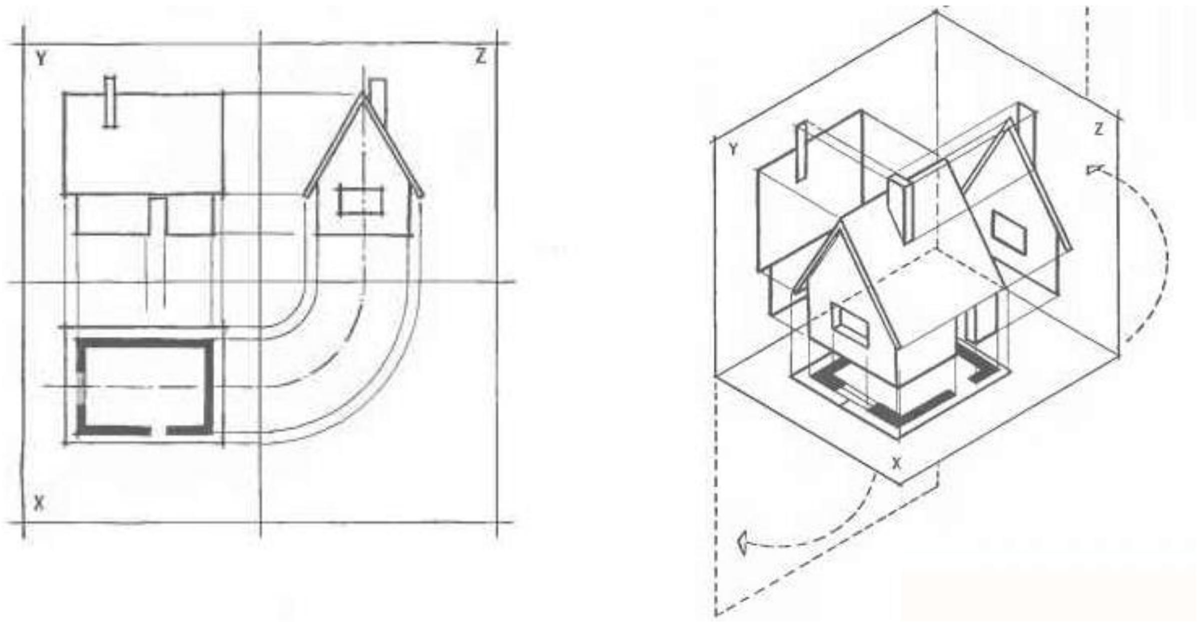


Рис.13

2.2. Метод центрального проектування

Апарат методу центрального проектування складається з точки A, яку називають **точкою зору**, і картинної площини α, що не містить точку A ($A \notin \alpha$) (рис.14).

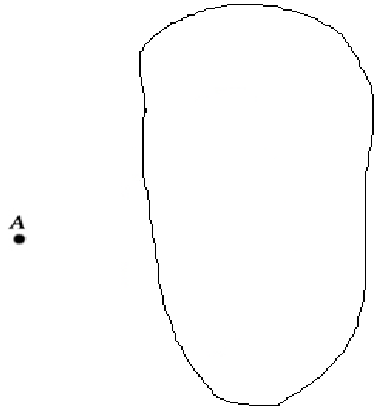


Рис.14

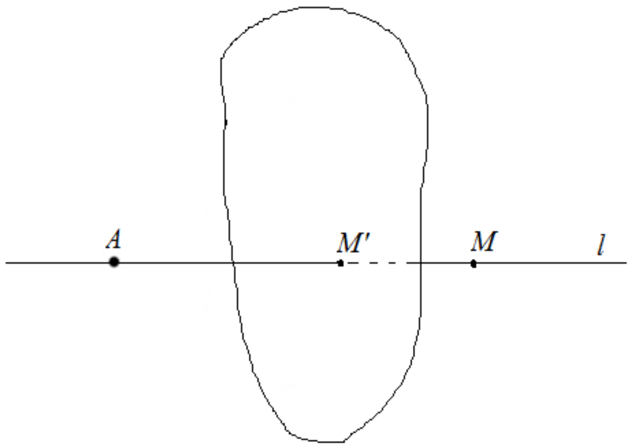


Рис.15

Для побудови **зображення точки** M **за методом центрального проектування** через точки A і M проводять пряму l. Точка M', у якій ця пряма перетинає картинну площину, називається зображенням точки M (рис.15) [15],[16]

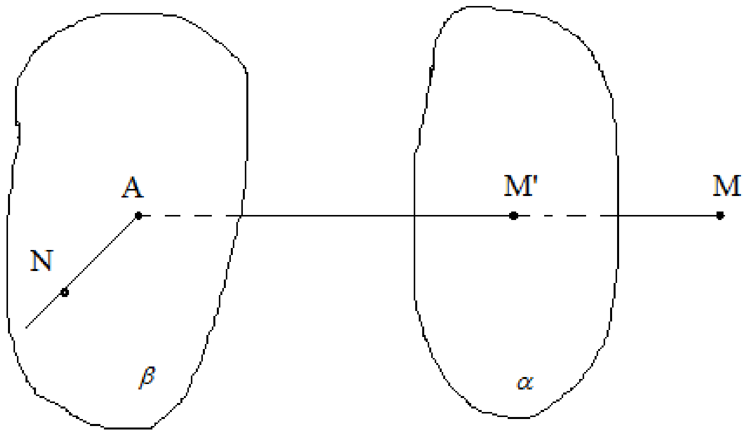
Рис.16

Метод центрального проектування у першу чергу використовується художниками-натуралістами та у фототехніці. (Саме тому цей метод також називають «фотографічним» або «оптичним».) (рис. 16).

Рис.17.Наочність зображення змінюється при зміні точки зору [45]

Зображення, отримані за методом центрального проектування, є наочними для людини, тому що у значній мірі відповідають сприйняттю оточуючого середовища органами зору людини.

У той же час, отримане за цим методом зображення є дійсно наочним тільки для спостерігача, який знаходитися у тій точці зору, де перебував автор зображення під час виконання зображення (рис.17.)



$\beta \| \alpha,\ N \in \beta,\ AN \| \alpha$

Рис.18

За методом центрального проектування неможливо зобразити точки, які належать площині , що проходить через точку зору паралельно до картинної площини (рис.18).

Зображення, отримані за методом центрального проектування, не дозволяють відновити оригінал з точністю до його положення у просторі: всі точки прямої *AM* зображуються однією точкою.

Створення без використання технічних засобів зображення просторового об′єкту за методом центрального проектування потребую значної кількості часу, спеціальних вмінь та навичок.

2.3. Метод лінійної перспективи

Рис.19.Автопортрет Леонардо да Вінчі.[46]

Метод лінійної перспективи був розроблений відомим італійський художником, скульптором, архітектором та вченим епохи Ренесансу Леонардо да Вінчі (1452–1519) (рис.19).

Апарат цього методу складають: дві взаємно перпендикулярні площини α і β. та точка A, яка не належить жодній з них. Площина α називається **картинною площиною**, площина β **площиною другорядних** (додаткових) **проекцій**, точка A – **точкою зору**. Пряма h перетину площин α та β називається **основою картини**. До апарату також включають проведений з точки A перпендикуляр AB до картинної площини α, і пряму h', що проходить через точку B паралельно до основи картини. Пряму h' називають **лінією горизонту** (рис.20). Через точку B у площині α проводять пряму $l \perp h'$. У тій півплощині відносно прямої h', що не містить пряму h, на прямій l відкладають відрізок $BB'=AB$. Точку B' в такому разі називають **головною точкою картини** (рис. 20).

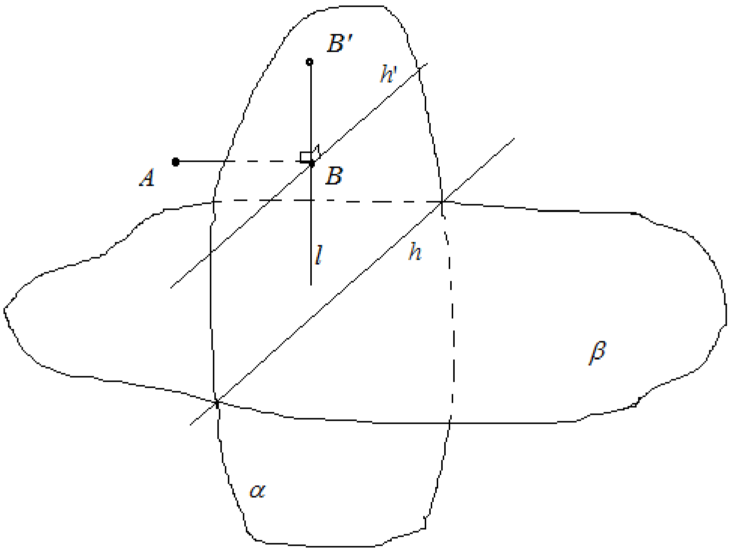


Рис.20

У результаті всіх побудов картинна площина приймає вигляд як на рис.21.

Для побудови **зображення** деякої **точки** M за методом лінійної перспективи на картинній площині α виконують наступні дії:

1) ортогонально проектують точку M на площину другорядних проекцій β, - проводять

$MM_1 \perp \beta$ (рис.22);

2) із точки зору A проектують на картинну площину α точки M та M_1 відповідно, отримують проекції $M\,'$ та $M\,'_1$ (рис.22).

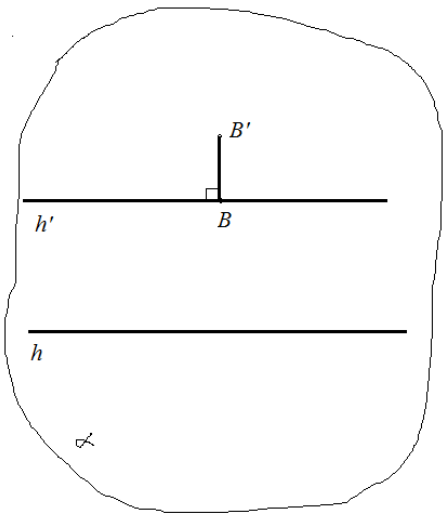


Рис.21

(При цьому, очевидно, що $BB' \parallel M\,'M\,'_1 \parallel MM_1$). Зображенням точки M називається множина $\{M\,', M_1\,'\}$ картинної площини (рис.23).

Метод лінійної перспективи одночасно є наочним і дає можливість за зображенням відновити оригінал з точністю до його положення у просторі. Саме завдяки останньому всі зображення, отримані за методом лінійної перспективи, є метрично повними.

Проте, так само, як і метод центрального проектування, цей метод є наочним лише для спостерігача, що знаходиться у точці зору, він не дозволяє зобразити точку, яка лежить у площині, що проходить через точку зору, паралельно до картинної площини.

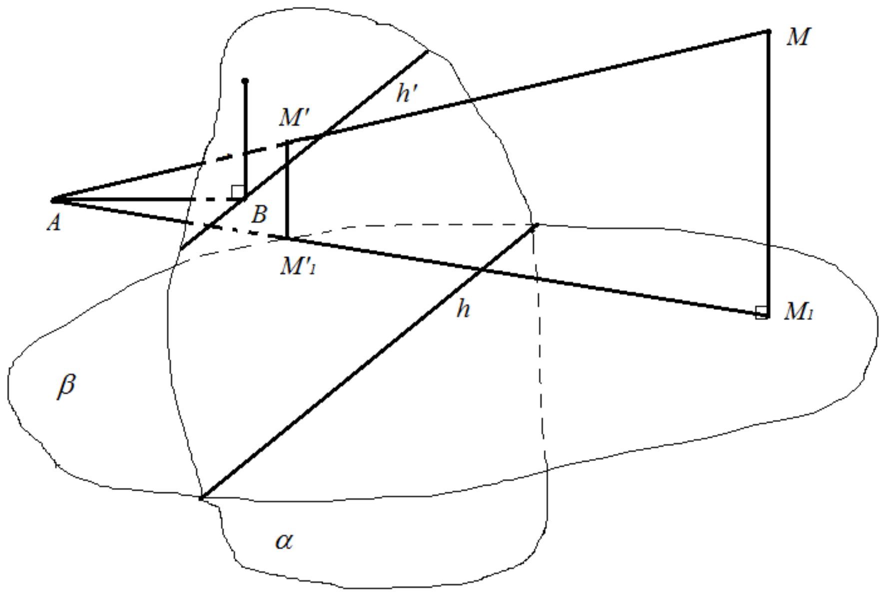


Рис.22

На практиці метод лінійної перспективи (і його узагальнення — метод подвійного проектування) використовують архітектори. Він є достатньо складним технічно, побудова зображень за цим методом вимагає значної кількості часу.

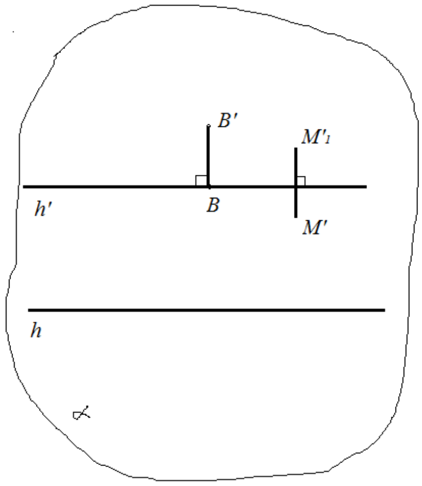


Рис.23

Художники натуралісти, у випадках зображення предмету та його відбиття від плоскої поверхні, також використовують метод лінійної перспективи (див, наприклад, рис. 24)

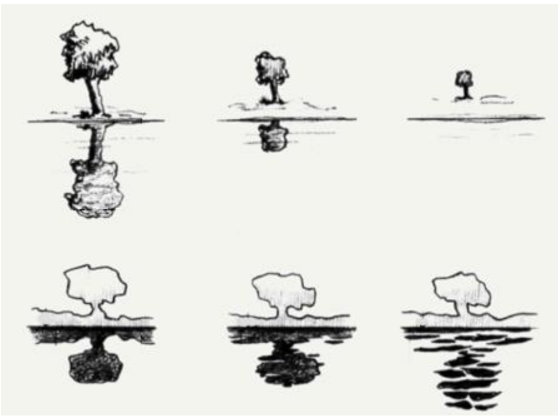


Рис.24. У випадку зображення предметів та їх відбиття також використовується метод лінійної перспективи[47]

2.4. Метод Федорова

Рис.25. Федоров Є.С.[37]

Метод названо на ім′я російського кристалографа, мінералолога та математика Є. С.Федорова (1853 – 1919) (рис.25).

Апарат методу Федорова складається лише з однієї **картинної площини** α. Площина α ділить простір на два півпростори, один з яких приймають за додатній, а інший за від′ємний.

Можливі три варіанти положення точки M, відносно даного апарату, і, відповідно, три варіанти **зображень** цієї **точки**.

1. Точка M належить площині α. Тоді вона зображується самою собою (рис.26).

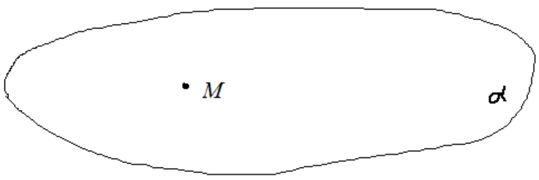


Рис.26

2. Точка M належить додатному півпростору. В такому випадку вона ортогонально проектується на площину α у точку M_1, будується коло з цент ром у точці M_1, радіус якого дорівнює відрізку MM_1. На колі обирається додатня орієнтація. Таке коло приймається за зображення точки M (рис. 27).

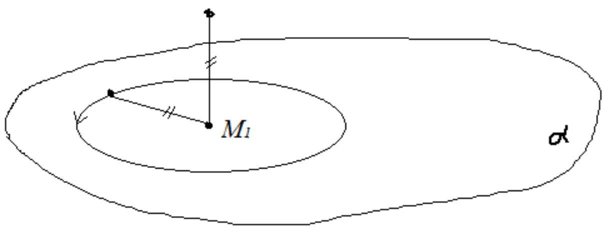


Рис.27

3. Точка M належить від′ємному півпростору. В цьому разі проводяться такі самі побудови, як і у попередньому випадку, але на колі обирається

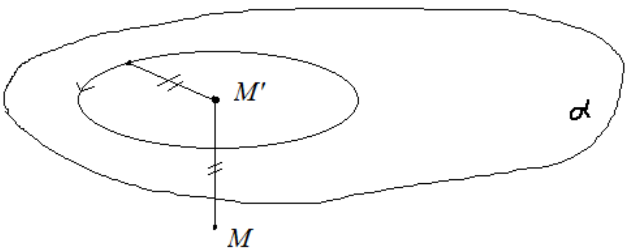


Рис.28

від'ємна орієнтація і вже таке коло приймається за зображення точки M (рис.28).

Даний метод не є наочним, але отримані за його допомогою зображення дозволяють відновити оригінал з точністю до його положення у просторі. Це означає, що отримані зображення є метрично повними. Метод Федорова було розроблено для потреб кристалографії. Там він, у першу чергу, і використовується. [24]

2.5. **Основні вимоги до побудов зображень просторових фігур на площині при викладанні евклідової геометрії**

Всі описані методи є вельми цікавими. Як вже було підкреслено, у математиці вони сформувалися як математичні абстракції конкретних практичних дій людей і тому у максимальному степені задовольняють потреби цих дій. Отже, коли мова йде про задачу побудови зображень просторових фігур на площині при викладанні евклідової геометрії, до того ж, у першу чергу, під час аудиторних занять, бажано спочатку визначити не тільки мету подібних зображень, а й пов'язані з нею **основні вимоги** як **до** самих **зображень**, так і до процесу їх побудови.

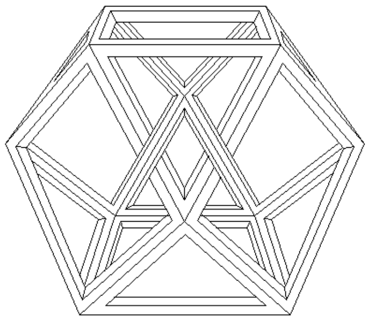


Рис.29 [47]

У першу чергу, зображення повинні бути **вірними** [22], [23]. Мова йде про те, що у евклідовій геометрії для подібних зображень повинні існувати оригінали. Вже було підкреслено, що весь досвід людства свідчить про те, що саме евклідова геометрія найкращим чином моделює просторові форми безпосередньо оточуючого нас середовища.

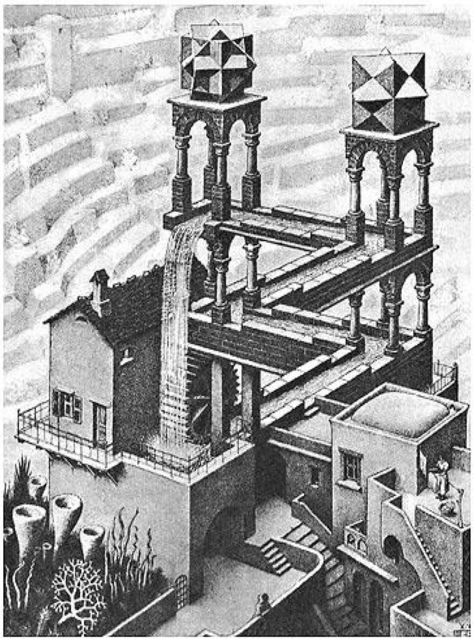


Рис.30. «Вгору та Вниз»[47]

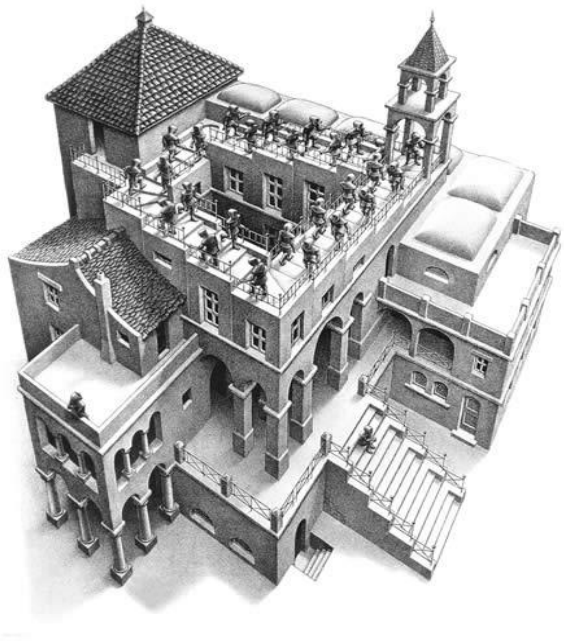


Рис.31. «Водоспад»[47]

Отже, треба вважати, що у якості оригіналів повинні виступати абстрактні об’єкти, які можна вважати моделями певних об’єктів того реального фізичного простору, який нас безпосередньо оточує.

У той же час цілком можливо зобразити на площині фігуру, якої може і не існувати як у евклідовому просторі, так і у реальному фізичному просторі. У живописі, наприклад, сформувався цілий напрям зображення неможливих фігур, який називається «імпосибіліонізм» (від англ. слова impossibility). Інтерес до «неможливих фігур» був присутній у людства доволі давно, так, наприклад, ще Леонардо да Вінчі робив деякі подібні «побудови» (рис.30). Найвідомішим із сучасних представників імпосибіолізму вважається художник-графік Мауріц Корнеліс Ешер (1898-1972) (рис. 30, 31).

Інший сучасний представник — художник Оскар Рутерсвард (1915-2002) (рис. 33, 34).

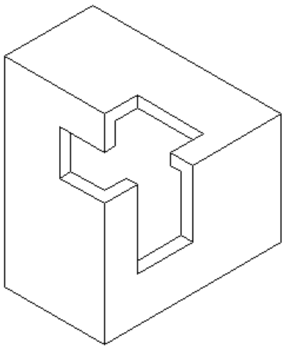


Рис.32[47]

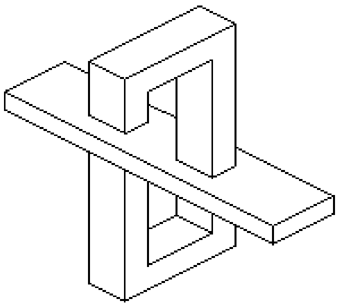


Рис.33[47]

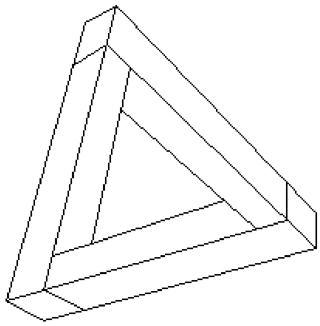


Рис.34. «Трикутник Пенроуза» [47]

Цікаво, що відомий «трикутник Пенроуза» (рис.34) був зображений Рутерсвардом ще в 1934 році, але у офіційному друці вперше з’явився у 1958 році у статті англійського математика Роджера Пенроуза, на ім’я якого і був у результаті названий.

Імена інших сучасних представників імпосібілізму: Джос де Мей (рис.38), Моніка Буш (рис.37), Сергио Бурато (рис.36) та інші…

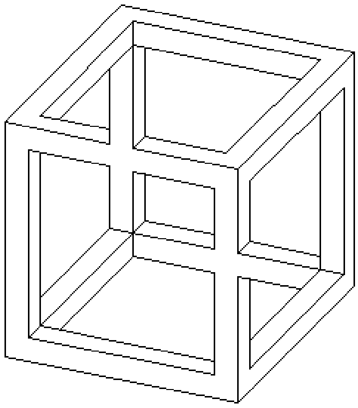


Рис.36 [47]

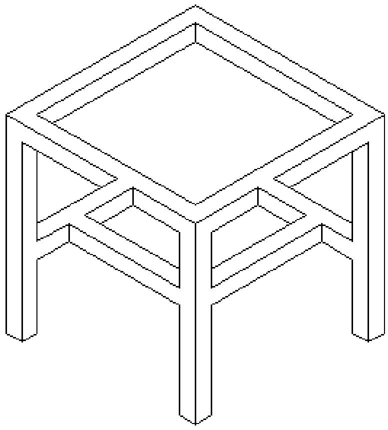


Рис.37 [47]

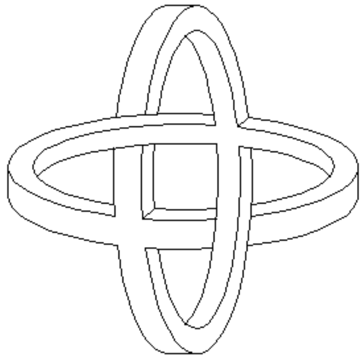


Рис.38 [47]

Наведені вище зображення є більше ніж цікавими для розгляду, проте, реально подібні об′єкти у тривимірному евклідовому просторі існувати не можуть. Отже, ці зображення не відповідають умові вірності.

Вимога вірності є необхідною і цілком природною для зображень просторових фігур евклідової геометрії при застосуванні будь-яких методів.

Зображення також мають бути **наочними** [8],[32]**.** Наочним вважають таке зображення, яке справляє на глядача те ж саме враження, що і оригінал. Як відомо — найбільш наочним для людини є метод центрального проектування. Але він не розрахований на велику аудиторію, де у кожного з глядачів є своя точка зору. При викладанні евклідової геометрії цей метод використовується лише зрідка, головним чином – для рисунків у підручниках.

Третьою вимогою є вимога **простоти** зображення [22]**.** Зображення вважається тим більш простим, чим менше часу витрачено на його безпосередню побудову і на обґрунтування її правильності [22]**.** При викладанні евклідової геометрії фактор часу є більш ніж важливим, на уроці у школі або протягом лекції неможливо виконувати зображення одного об′єкту та обґрунтувати вірність цього зображення впродовж декількох годин, днів, тижнів і навіть років, як це є можливим, наприклад, для художників або архітекторів.

Ще однією вимогою є вимога **інформативності** зображення [22]**.** Зображення вважається тим більш інформативним чим більше властивостей зображеної просторової фігури можна за цим зображенням встановити. Найбільш інформативними, зрозуміло, є зображення за якими можна відновити оригінал з точністю до положення у просторі. Проте, подібна точність, зазвичай, є зайвою при викладанні евклідової геометрії. Достатньо мати можливість визначити лише певні, найбільш важливі, геометричні властивості зображених фігур.

Виявилося, що у комплексі всі визначені чотири основні вимоги до зображень на площині геометричних фігур при викладанні евклідової геометрії найкращим чином задовольняє **метод паралельного проектування** [22]**.** Теоретичні аспекти цього методу, у першу чергу ті, які відносяться саме до побудови зображень геометричних фігур при викладанні евклідової геометрії, були розроблені у минулому столітті М. Ф. Четверухіним, його учнями і послідовниками [11], [17], [18], [20], [22], [23], [29], [31], [32], [33], [34].

Знайомству з основними положеннями методу паралельного проектування і будуть присвячені наступні розділи даного навчального посібника.

Питання і завдання для самоконтролю до §2.

2.1. Назвіть відомі Вам методи зображень просторових фігур на площині.

2.2. Що Вам відомо про Гаспара Монжа?

2.3. Охарактеризуйте апарат методу Монжа побудови зображень просторових фігур на площині?

2.4. Що називається зображенням точки за методом Монжа? Як будується таке зображення?

2.5. Чи дозволяє метод Монжа при фіксованому апараті побудувати зображення довільної точки простору?

2.6. Чи можна за зображенням геометричної фігури за методом Монжа однозначно відновити оригінал?

2.7. Що можна стверджувати про степінь повноти зображення, отриманого за методом Монжа?

2.8. Фахівці яких професій використовують метод Монжа у своїй практичній діяльності? З якою метою і за яких обставин?

2.9. У якому випадку зображення геометричних фігур називають наочними?

2.10. Який метод забезпечує найбільшу наочність зображень? Чим це можна пояснити?

2.11. Охарактеризуйте апарат методу центрального проектування побудови зображень просторових фігур на площині.

2.12. Що називається зображенням точки за методом центрального проектування? Як будується таке зображення?

2.13. Чи дозволяє метод центрального проектування при фіксованому апараті побудувати зображення довільної точки простору?

2.14. Чи можна, при фіксованому згідно методу центрального проектування апараті, за зображенням точки однозначно відновити оригінал?

2.15. Фахівці яких професій використовують метод центрального проектування у своїй практичній діяльності?

2.16. Який вчений розробив метод лінійної перспективи зображення просторових фігур на площині?

2.17. Охарактеризуйте апарат метода лінійної перспективи побудови зображень.

2.18. Що називається зображенням точки за методом лінійної перспективи? Як будується таке зображення?

2.19. Чи дозволяє метод лінійної перспективи при фіксованому апараті, побудувати зображення довільної точки простору?

2.20. Чи можна, при фіксованому згідно методу лінійної перспективи апараті, за зображенням точки однозначно відновити оригінал?

2.21. Що можна стверджувати про степінь повноти зображення, отриманого за методом лінійної перспективи?

2.22. Фахівці яких професій використовують метод лінійної перспективи у своїй практичній діяльності?

2.23. Що Вам відомо про Є. С. Федорова?

2.24. Охарактеризуйте апарат метода Федорова побудови зображень просторових фігур на площині.

2.25. Що називається зображенням точки за методом Федорова? Як будується таке зображення?

2.26. Чи дозволяє метод Федорова при фіксованому апараті побудувати зображення довільної точки простору?

2.27. Чи можна за зображенням геометричної фігури за методом Федорова однозначно відновити оригінал?

2.28. Що можна стверджувати про степінь повноти зображення, отриманого за методом Федорова?

2.29. Чи можна стверджувати, що метод Федорова зображення просторових фігур на площині є наочним?

2.30. Фахівці яких професій використовують метод Федорова у своїй практичній діяльності?

2.31. Які основні вимоги висуваються до зображень геометричних фігур на площині при викладанні евклідової геометрії?

2.32. У якому випадку зображення геометричної фігури на площині називають вірним?

2.33. Який напрямок живопису називається «імпосибіліонізмом»?

2.34. Які роботи представників імпосибіліонізму Вам відомі?

2.35. Що розуміють під простотою зображення геометричної фігури на площині?

2.36. Що розуміють під інформативністю зображення геометричної фігури на площині?

2.37. Які зображення геометричних фігур на площині мають найбільший степінь інформативності?

2.38. Який метод зображення геометричних фігур на площині у комплексі найкращим чином задовольняє всі чотири основні вимоги до зображень на площині геометричних фігур при викладанні евклідової геометрії?

2.39. Який вчений розробив основні теоретичні аспекти методу паралельного проектування?

2.40. Які роботи М. Ф. Четверухіна, присвячені теорії зображень просторових фігур на площині, Вам відомі?

§3. Метод паралельного проектування зображення на площині фігур евклідової геометрії та його основні характеристики

3.1. Основні означення

Апарат методу паралельного проектування складають картинна площина α і пряма l, яка не лежить у площині α і не є паралельною до площини α $(l \not\subset \alpha \; і \; l \not\parallel \alpha)$. Про пряму l говорять, що вона задає **напрямок проектування** (рис. 39).

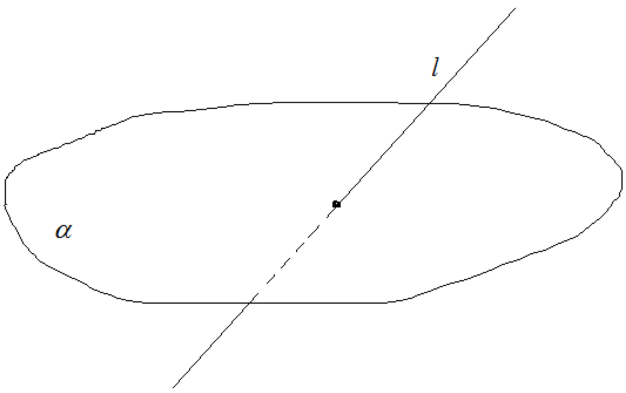


Рис.39

Якщо пряма l є перпендикулярною до площини $\alpha (l \perp \alpha)$, то проектування називається **ортогональним** (рис. 40) [32], [34].

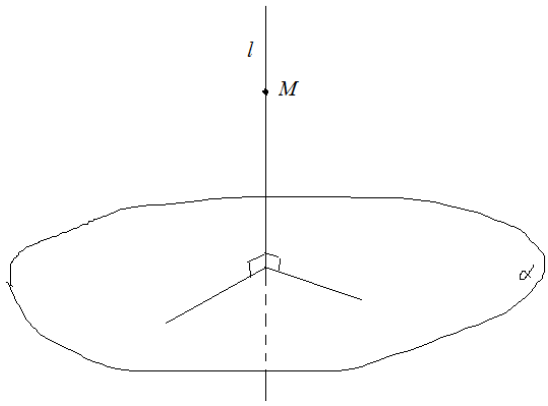


Рис.40

Для побудови проекції довільної точки M на площину α у напрямку прямої l через точку M, паралельно до прямої l, проводять пряму l' до перетину з площиною α у певній точці M' (рис.41). Точку M' і називаються **проекцією точки M на площину α у напрямку прямої** l. У випадку ортогонального проектування говорять просто про **проекцію M' точки M на**

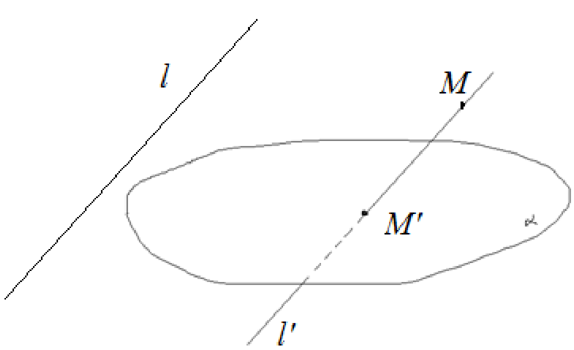


Рис.41

площину α.

Проекцією фігури F, як і у загальному випадку, називають сукупність F' проекцій всіх точок даної фігури. Зображенням фігури F при паралельному проектуванні називають кожну фігуру Φ, подібну до проекції F' цієї фігури.

Таким чином**, при зображенні на площині фігур за допомогою паралельного проектування,** як і при застосуванні інших методів зображень, **закон відображення** φ представляє собою композицію безпосередньо паралельного проектування f на картинну площину α і перетворення подібності h евклідового простору: $\varphi = h \circ f$.

Тотожне перетворення площини є тривіальним прикладом її перетворення подібності. Це означає, що при зображенні геометричних фігур за допомогою паралельного проектування, як і у випадку інших методів зображень, проекція кожної фігури є зображенням цієї фігури. Але не тільки. Апарат паралельного проектування f для кожної фігури F евклідового простору однозначно визначає її проекцію $F' = f(F)$ на картинну площину α. Зображення G фігури F при паралельному проектуванні h на площину α однозначно визначається законом відображення $\varphi\,(G = \varphi(F))$, який залежить ще й від відповідного перетворення подібності φ.

Теорема 3.1. *Якщо зображення фігури* F *евклідового простору при паралельному проектуванні* f *на площину* α *у напрямку прямої* l *є певна фігура* G*, фігура* Φ *евклідового простору є подібною до фігури* F*, то існує паралельне проектування* $\tilde{f}$ *фігури* Φ *на певну площину* α *у напрямку певної прямої при якому зображення фігури* Φ *також буде фігура* G *зображення відповідних точок фігур* Φ *і* F *при проектуваннях* f *і* $\tilde{f}$ *будуть співпадати.*

Доведення. ☐ Нехай образом фігури F при паралельному проектуванні f на площину α у напрямку прямої l є фігура F'.

За умови теореми, фігура є подібною до фігури . Отже, існує таке перетворення подібності g евклідового простору , що $g(\varPhi)=F$. З теорії перетворень подібності відомо, що перетворення g^{-1}, обернене до перетворення подібності g також є перетворення подібності $g^{-1}(F)=\varPhi$.

З теорії перетворень подібності евклідового простору відомо, що при таких перетвореннях образом кожної прямої є пряма, образом кожної площини – є площина, зберігається характер взаємного розташування двох прямих,, прямої і площини. Значить, $g^{-1}(\alpha)=\tilde{\alpha}$, де $\tilde{\alpha}$ - певна площина,

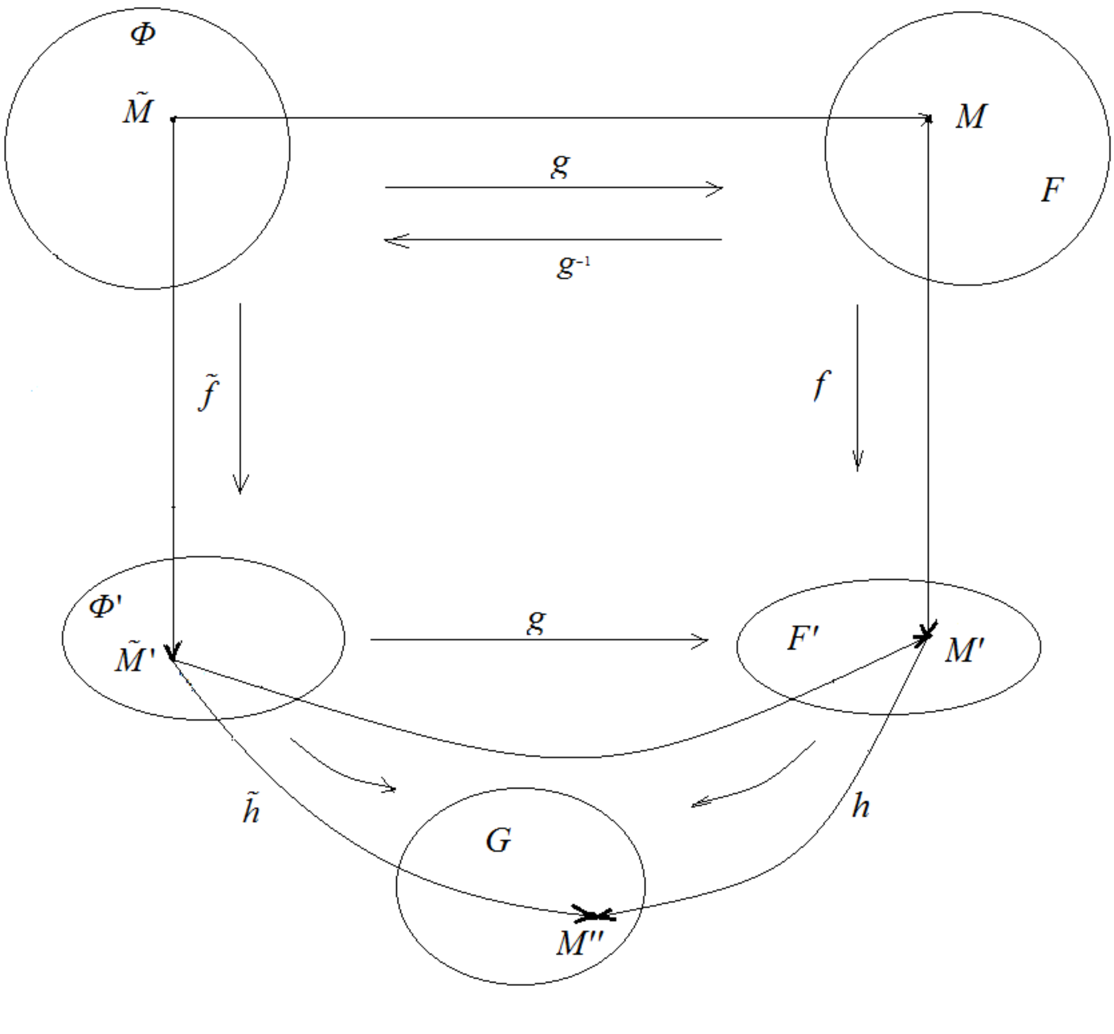


Рис.42

$g^{-1}(l)=\tilde{l}$, де $\tilde{l}$ - певна пряма, з того, що $l \not\subset \alpha, l \nparallel \alpha$, випливає, що $\tilde{l} \not\subset \tilde{\alpha}, \tilde{l} \nparallel \tilde{\alpha}$, площина $\tilde{\alpha}$ і пряма $\tilde{l}$ утворюють апарат певного паралельного проектування $\tilde{f}$.

Нехай фігура Φ' є паралельною проекцією фігури Φ на площину $\tilde{\alpha}$ у напрямку прямої $\tilde{l}$: $\Phi' = \tilde{f}(\Phi)$. Покажемо, що $\Phi' = g^{-1}(F')$.

Розглянемо довільну точку M' фігури F'. $M' \in \alpha$. При паралельному проектуванні f у точки M' існує оригінал – така точка M фігури F, що $MM' \| l$. Нехай $g^{-1}(M) = \tilde{M}$. $\tilde{M} \in \Phi$. Нехай $g^{-1}(M') = \tilde{M}'$, $g^{-1}(l) = \tilde{l}$. Тоді $\tilde{M}' \in \tilde{\alpha}$, $\tilde{M}'\tilde{M} \| \tilde{l}$. $\tilde{M}' = \tilde{f}(\tilde{M})$. $\tilde{M}' \in \Phi'$, $g^{-1}(F') \subset \Phi'$.

І навпаки. Розглянемо довільну точку $\tilde{N}'$ фігури Φ' при паралельному проектуванні $\tilde{f}$ у неї існує прообраз $\tilde{N}' \in \Phi$. $\tilde{N}\tilde{N}' \| \tilde{l}$. Нехай $g(\tilde{N}) = N$. $N \in F$. Якщо $N' = f(N)$, то $NN' \| l$, $N' \in F'$. $g^{-1}(N) = \tilde{N}$. $N' \in \alpha$, $g^{-1}(\alpha) = \tilde{\alpha}$, отже, $g^{-1}(N') \in \tilde{\alpha}$, $g^{-1}(l) = \tilde{l}$, $NN' \| l$ отже, $g^{-1}(NN')$ – це пряма, яка проходить через точку $\tilde{N} = g^{-1}(N)$, паралельно до прямої $\tilde{l}$. Значить, це пряма $\tilde{N}\tilde{N}'$, $\tilde{N}' = \tilde{N}\tilde{N}' \cap \alpha$. $N' = NN' \cap \alpha$; $g^{-1}(NN') = \tilde{N}\tilde{N}'$, $g^{-1}(\alpha) = \tilde{\alpha}$. Отже, $g^{-1}(N') = \tilde{N}\tilde{N}' \cap \tilde{\alpha} = \tilde{N}'$.

Таким чином, обґрунтовано, що $g^{-1}(F') = \Phi'$. Це означає, що фігури F' і Φ' є подібними між собою, $\tilde{f} = g^{-1} \circ f \circ g$, $f = g^{-1} \circ \tilde{f} \circ g$.

З умови теореми випливає, що фігура F' є подібною до фігури G, фігура G є зображенням фігури Φ при паралельному проектуванні $\tilde{f}$ на площину $\tilde{\alpha}$ у напрямку прямої $\tilde{l}$. Перетворення подібності евклідового простору, яке переводить фігуру F' у фігуру G, позначимо через h. Закон зображення φ фігури F у вигляді фігури G за допомогою паралельного проектування f має вигляд $\varphi = h \circ f$. Відповідне перетворення подібності $\tilde{h}$, яке переводить фігуру Φ' у G буде мати вигляд $\tilde{h} = h \circ g$, закон зображення φ фігури Φ у вигляді фігури G за допомогою паралельного проектування $\tilde{f}$ дорівнюватиме

$$\tilde{\varphi} = \tilde{h} \circ \tilde{f} = (h \circ g) \circ \tilde{f} = (h \circ g) \circ (g^{-1} \circ f \circ g) =$$
$$= (h \circ f) \circ g = \varphi \circ g.$$

Отримана рівність означає, що довільної точки $\tilde{M} \in \Phi$ і для відповідної до неї за перетворенням подібності g точки $M = g(\tilde{M})$, $M \in F$, справедливо, що

$$\tilde{\varphi}(\tilde{M}) = (\varphi \circ g)(\tilde{M}) = \varphi\Big(g(\tilde{M})\Big) = \varphi(M).$$

Теорему доведено. Схематично відношення між відповідними множинами і відображеннями продемонстровано на рис. 42. ■

Наслідок 1. *Якщо за умови задачі відомо, що задана фігура F' є зображенням заданої фігури F при певному паралельному проектуванні, процес розв'язання задачі вимагає явного використання оригіналу, то замість фігури F можна розглядати довільну фігуру Φ евклідового простору, подібну до фігури F.*

Доведення є очевидним.

Наслідок 2. *Якщо умовою задачі для зображення, отриманого за допомогою паралельного проектування, оригінал визначено з точністю до перетворення подібності, то для розв'язання задачі за оригінал можна прийняти будь-яку фігуру із відповідної сукупності подібних між собою фігур.*

Доведення є очевидним.

Межові точки фігур F' і Φ на площині α називають, відповідно, **обрисом проекції фігури** F та **обрисом зображення фігури** F (рис. 43). При паралельному проектуванні розрізняють так звані видні і невидні точки геометричних фігур. Картинна площина α поділяє простір на два півпростори. Розглянемо, спочатку, той випадок, коли всі точки фігури належать одному з цих півпросторів або самій площині α.

Нехай проектування здійснюється у напрямку прямої l, фігура F при цьому проектується у фігуру F' площини α (рис. 44). Якщо точки M, N, P фігури F лежать на одній прямій, яка є паралельною до прямої l, всі вони проектуються у одну точку M' фігури F'. Точка M називається видною точкою фігури F при даному паралельному проектуванні, якщо фігура F

не містить таких точок K , що точка M лежить між точками K і M' . ($K - M - M'$) Якщо ж, навпаки, така точка K існує, то точка M називається невидною. Так, на рис. 44 точка M фігури F є видною, точка N - невидною (бо існує така точка $M \in F$ (або $N \in F$), що $M - P - M'$ ($N - P - M'$)).

При паралельному проектуванні розрізняють так звані **видні** і **невидні** точки геометричних фігур. Картинна площина α поділяє простір на два півпростори. Розглянемо, спочатку, той випадок, коли всі точки фігури F належать одному з цих півпросторів або самій площині α. Нехай

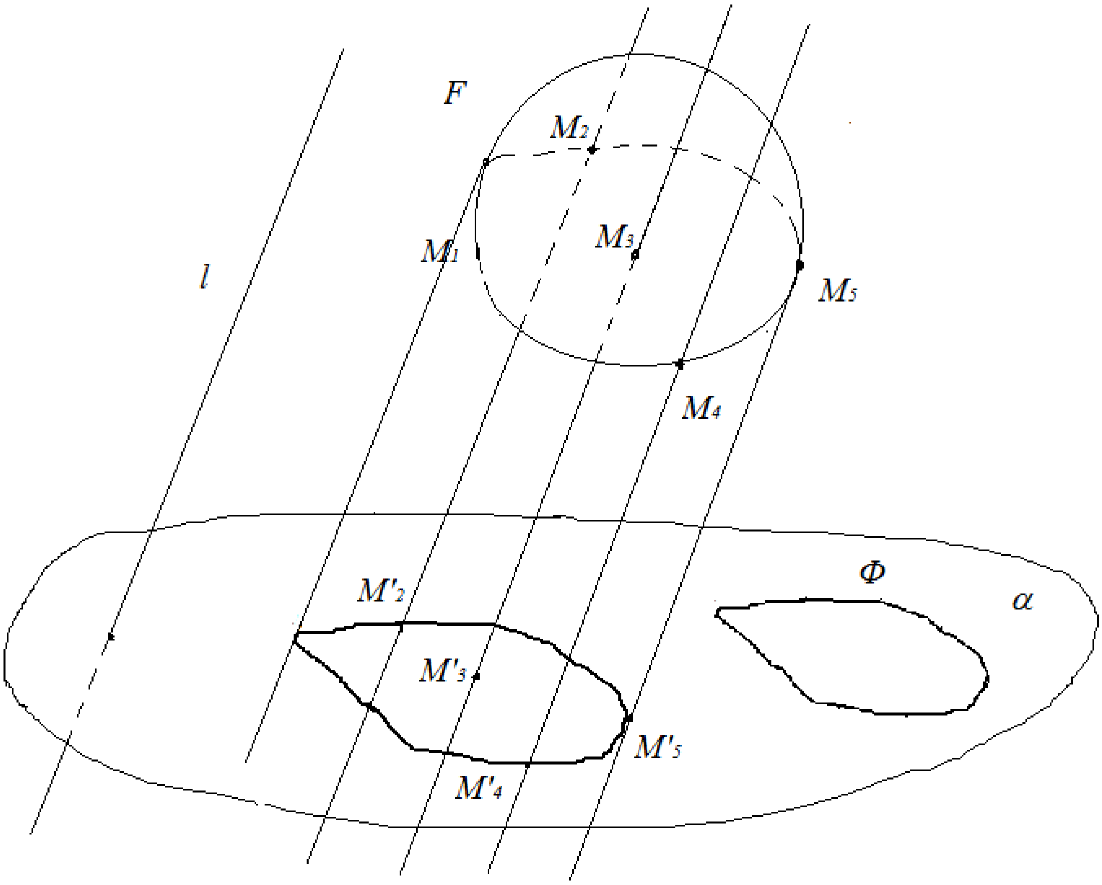


Рис.43

проектування здійснюється у напрямку прямої l, фігура F при цьому проектується у фігуру F' площини α (рис. 44). Якщо точки M, N, P фігури F лежать на одній прямій, яка є паралельною до прямої l, всі вони проектуються у одну точку M' фігури F'. Точка M називається **видною** точкою фігури F при даному паралельному проектуванні, якщо фігура F не містить таких точок K, що точка M лежить між точками K і M'

$(K - M - M')$. Якщо ж, навпаки, така точка K існує, то точка M називається **невидною**. Так, на рис. 44 точка M фігури F є видною, точка N - невидною (бо існує така точка $M \in F$, що $M - N - M'$), точка P - невидною (бо існує

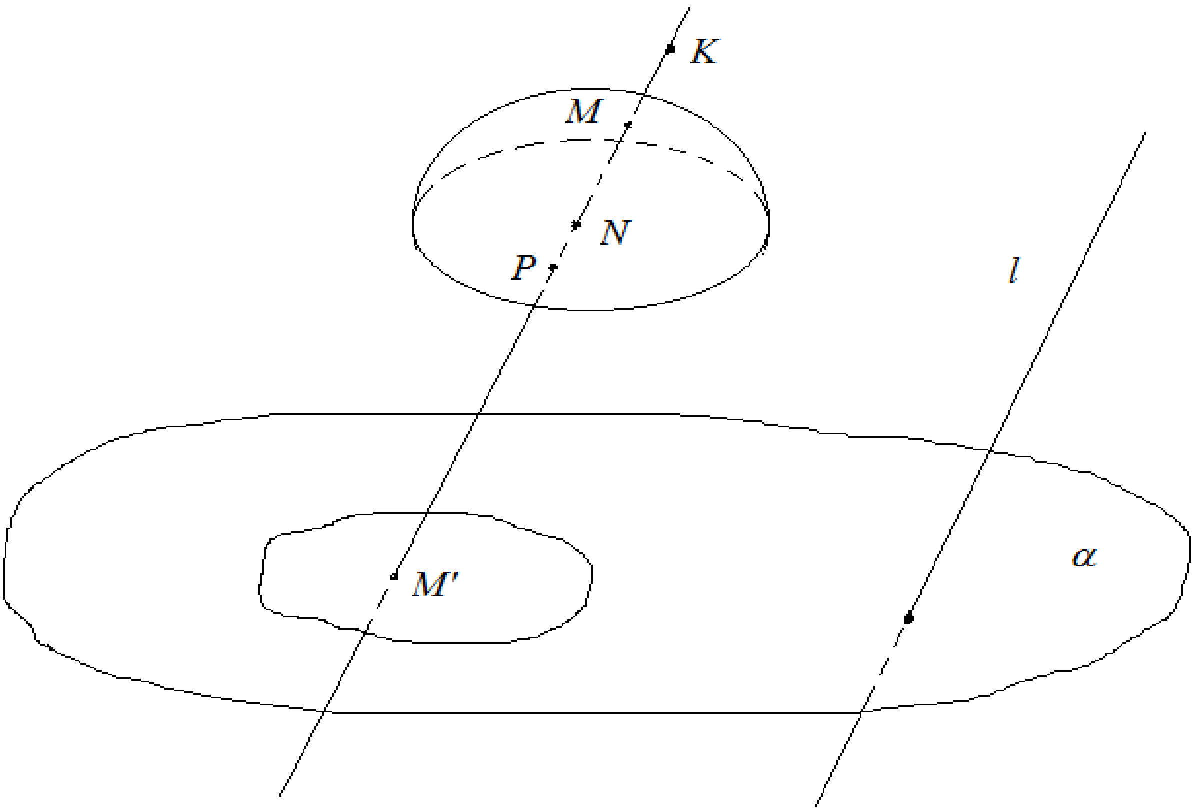
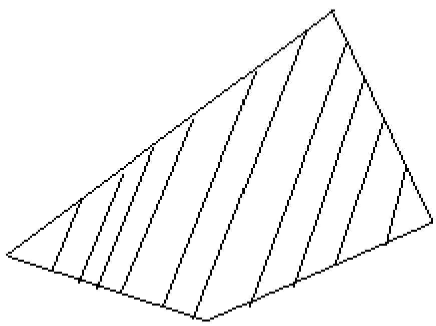


Рис.44

така точка $M \in F$ (або $N \in F$), що $M - P - M'$ $(N - P - M')$).



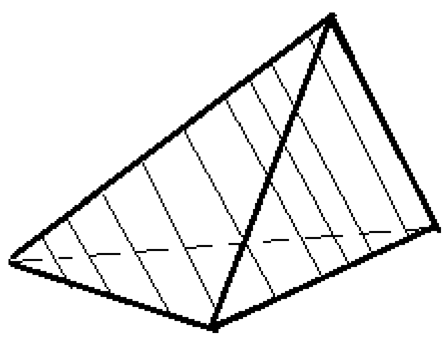


Рис.45 Рис.46

Якщо точки фігури F розташовані по обидві сторони від картинної площини α , то для точок, розміщених по певну сторону від площини α і на самій площині α , застосовують наведені вище означення, всі точки фігури F , розміщені по іншу сторону від площини α, вважають невидними.

Під час застосування паралельного проектування при викладанні евклідової геометрії за позначенням проекції (і зображення) окремих видних і невидних точок фігур, як правило, не розрізняють. Але часто, для більшої наочності, одночасно з проекцією (зображенням) фігури відтворюють проекції (зображення) певних ліній, що належать цій фігурі. Лінії, які складаються з невидних точок, найчастіше, зображають пунктиром. Іноді, для цього, використовують інші кольори.

Наприклад, треба побудувати зображення тетраедра-оболонки при паралельному проектуванні. (Як відомо, тетраедр-оболонка – це геометрична фігура, утворена плоским трикутником, точкою, яка не лежить у площині цього трикутника, і всіма відрізками, що сполучають цю точку з точками даного плоского трикутника). Доведено ([10], [14]), що обрисом зображення тетраедра-оболонки може бути довільний плоский чотирикутник (рис. 45). Але за подібним рисунком взагалі не зрозуміло, просторову чи плоску фігуру на ньому зображено. Тому при побудові зображень тетраедра вважають за необхідне будувати і зображення всіх ребер даного тетраедра. Якщо обрисом зображення тетраедра є чотирикутник, то при цьому одне з ребер тетраедра буде невидним (рис. 46).

3.2. **Найпростіші властивості зображення на площині фігур евклідової геометрії за методом паралельного проектування**

До найпростіших властивостей зображення на площині фігур евклідової геометрії за допомогою паралельного проектування відносяться закономірності зображення точок, прямих, променів, відрізків, площин та півплощин, а також деяких комбінацій цих геометричних фігур.

У всіх розглянутих випадках відповідна властивість буде притаманною як для проекції фігури, так і для будь-якого іншого зображення цієї фігури.

Обґрунтування даного факту базується на відомих властивостях перетворень подібності евклідового простору і є тривіальним. Саме тому будемо формулювати і доводити справедливість наступних найпростіших властивостей паралельного проектування лише для паралельних проекцій відповідних геометричних фігур.

Теорема 3.2. *При кожному паралельному проектуванні проекцією будь-якої точки є однозначно визначена точка картинної площини.*

Доведення. $\sqcup$ Нехай паралельне проектування задане картинною площиною α і прямою l. Пряма l не лежить у площині α і не є паралельною до площини α. Отже, пряма l перетинає площину α у певній точці K. Нехай M – довільна точка простору. За відомою теоремою шкільного курсу

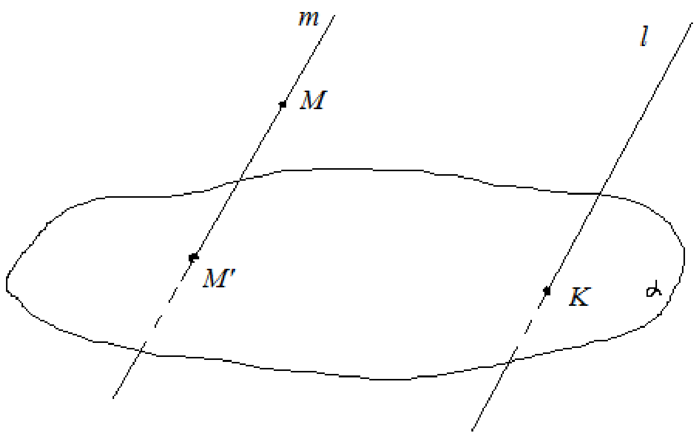


Рис.47

геометрії через точку M паралельно до прямої l проходить єдина пряма m, або точка M лежить на прямій l. У шкільному курсі геометрії доведено також, що, якщо пряма перетинає площину у певній точці, то пряма, паралельна до цієї прямої, має таке саме розташування відносно даної площини. Отже, існує єдина точка M', у якій пряма m перетинає площину α. (Якщо $M \in l$, то точка M' співпадає з точкою K).

За означенням, точка M' є проекцією точки M на площину α у напрямку прямої l (рис. 47) ■

Наслідок. *Довільна точка картинної площини може бути зображенням довільної точки евклідового простору при будь-якому паралельному проектуванні на дану площину.*

Доведення. □ Згідно теореми 3.2. при будь-якому паралельному проектуванні на будь-яку картинну площину проекцією кожної точки евклідового простору є певна точка даної площини. Існує перетворення подібності площини, яке довільну задану точку M' цієї площини переводить у довільну задану точку K' цієї ж площини. За таке перетворення можна прийняти, наприклад, паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{M'K'}$ (кожне паралельне перенесення площини є рухом цієї площини, кожний рух площини є її перетворенням подібності). ■

Теорема 3.3. *Проекцією прямої при паралельному проектуванні є або точка, або пряма. Пряма проектується у точку тоді та тільки тоді, коли ця пряма є паралельною до прямої, що задає напрямок даного паралельного проектування, або коли ці обидві прямі співпадають. У випадку, коли проекцією прямої є пряма, закон проектування встановлює взаємно однозначну відповідність між прямою оригіналом і прямою-проекцією.*

Доведення. □ Нехай паралельне проектування задане картинною площиною α і прямою l ($l \not\subset \alpha$, $l \nparallel \alpha$, пряма l перетинає площину α у певній точці K). Розглянемо пряму $m \parallel l$. Зрозуміло, що пряма m, як і пряма l, перетинає площину α у певній точці M', всі точки прямої m при даному проектуванні проектуються саме у цю точку M' (рис. 48). Якщо пряма m співпадає з прямою l, то роль точки M' виконує точка K.

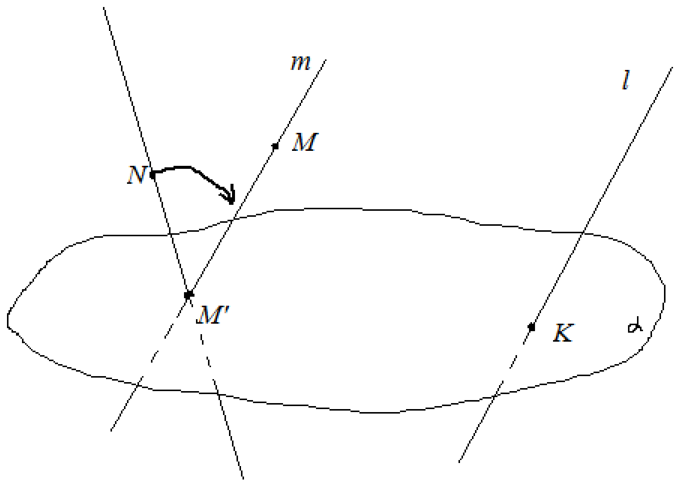


Рис.48

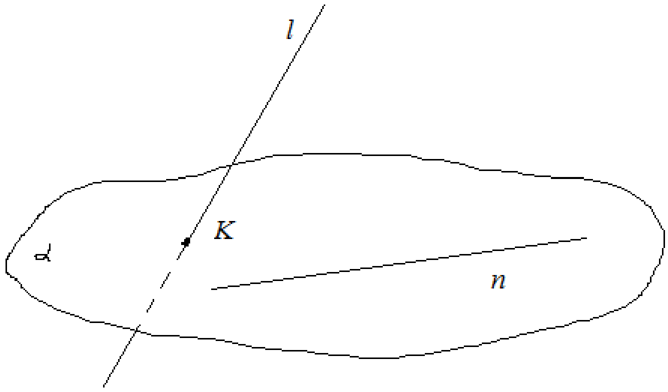


Рис.49

Припустимо тепер, що при даному паралельному проектуванні пряма m проектується у певну точку M' картинної площини. Це означає, що всі точки прямої m проектуються у точку M'. Розглянемо точки $M, N \in m, \quad M \not\equiv N, \quad M \not\equiv M'$ $N \not\equiv M'$. Згідно закону проектування, пряма $MM' \parallel l$ і пряма $NM' \parallel l$. Але через точку M' проходить єдина пряма, паралельна до прямої l. Отже, прямі MM' і NM' співпадають між собою, кожна з них утворює пряму MN. Але через точки M і N проходить єдина пряма, такою прямою є пряма m. Значить, саме пряма m є паралельною до прямої l (рис. 48). Зрозуміло, що , якщо точка M' співпадає з точкою K, то пряма m просто співпадає з прямою l.

Розглянемо пряму $n \nparallel l$. Така пряма може 1) лежати у площині α: $n \subset \alpha$; 2) бути паралельною до площини α: $n \parallel \alpha$; 3) перетинати площину α у певній точці буде існувати така точка A , що $n \cap \alpha$. Якщо $n \subset \alpha$ (рис. 49), то при даному паралельному проектуванні кожна точка прямої n проектується сама у себе. Це означає, що пряма n при цьому проектуванні тотожно проектується на себе. Тотожна відповідність є взаємно однозначною відповідністю (рис. 49).

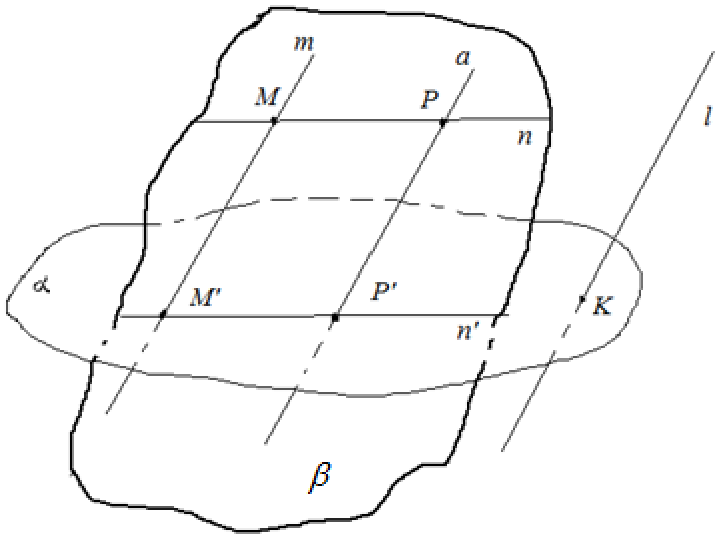


Рис.50

Нехай $n \parallel \alpha$ (рис. 50). Оберемо довільну точку $M \in n$. Проведемо через цю точку пряму $m \parallel l$. Нехай $m \cap \alpha = M'$. Прямі m і n перетинаються у точці M. Існує єдина площина β, що ці прямі містить. Площина β перетинає площину α по певній прямій n', яка проходить через точку M'. Зрозуміло, що $n' \parallel n$, бо інакше пряма n перетинала би пряму n' і, одночасно, перетинала би площину α, що суперечило би умові $n \parallel \alpha$. Покажемо, що пряма n' і є проекцією прямої n при даному паралельному проектуванні.

За відомою теоремою евклідової геометрії, всі прямі, що проходять через точки прямої n паралельно до прямої l, так звані, проектуючі прямі, належать одній площині. І цією площиною є площина β, бо саме площина β містить одну з таких прямих – пряму m. $\beta \cap \alpha = n'$. Отже, проекції всіх точок прямої n лежать на прямій n'.

Розглянемо довільну точку $P' \in n'$. Проведемо через неї пряму $a \parallel l$. Пряма a належатиме площині β, бо всі прямі, що проходять через точки прямої n' паралельно до прямої l, лежать на одній площині, пряма m є однією з таких прямих, площина β є єдиною площиною, що одночасно містить прямі n' і m. Прямі a і m є паралельними між собою прямими площини β.

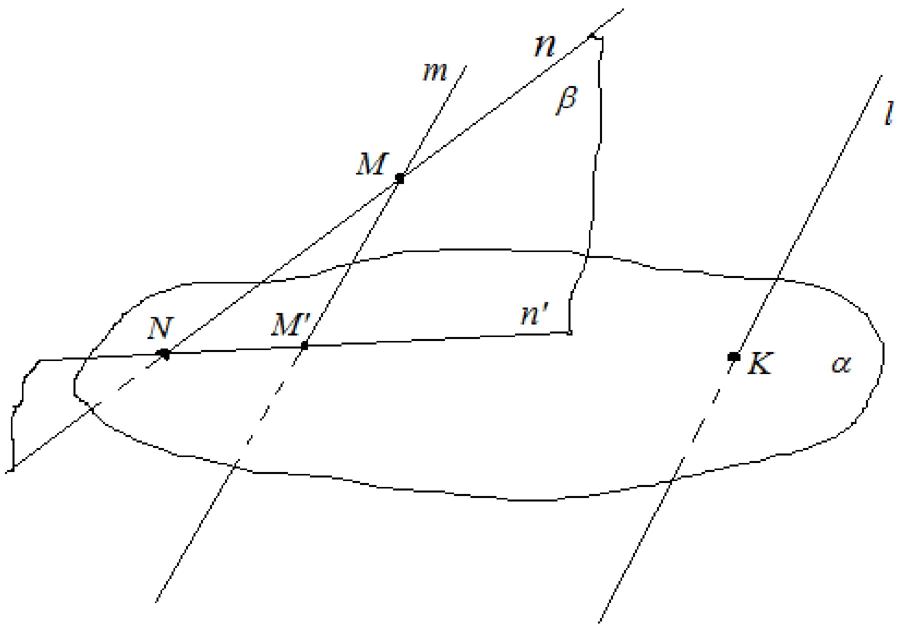


Рис.51

Пряма m перетинає пряму n у точці M. Отже, пряма a перетинає пряму n у певній точці P. Але тоді точка P' є проекцією точки P на площину α у напрямку прямої l, $P \in n$.

Таким чином, ми довели , що при даному паралельному проектуванні проекцією прямої n є пряма n', яка є паралельною до прямої n. Одночасно ми обґрунтували, що при цьому відбувається сюр’єктивне відображення прямої n на пряму n'. Нехай M і P - різні точки прямої n, які, відповідно, проектуються у точки M' і P' прямої n'. Згідно закону проектування $MM' \parallel l$, $PP' \parallel l$. Тому $MM' \parallel PP'$. Точки M' і P', як точки паралельних прямих, співпадати не можуть, розглянуте паралельне проектування реалізує і ін’єктивне відображення прямої n на пряму n'. Отже, це взаємно однозначне відображення, що й треба було обґрунтувати.

Нехай тепер пряма n перетинає картинну площину α у певній точці N, але $n \nparallel l$. Оберемо на прямій n довільну точку M, відмінну від точки N. $M \notin \alpha$. Проведемо через точку M пряму $m \parallel l$. Нехай $m \cap \alpha = M'$. Площина β, що містить прямі m і n, перетинає площину α по прямій NM'. Позначимо цю пряму через n' (рис. 51).

Так само, як і при розгляданні попереднього випадку, легко довести, що при даному паралельному проектуванні проекцією прямої n є пряма n', дане паралельне проектування встановлює між прямими n і n', взаємно однозначну відповідність. ■

Паралельне проектування, при якому **пряма** проектується у точку, для даної прямої вважається **виродженим**. Паралельне проектування, при якому **пряма** проектується у пряму, для даної прямої вважається **невиродженим**.

Теорема 3.4. *При невиродженому для даної прямої паралельному проектуванні зберігається порядок точок, що належать цій прямій.*

Доведення. □ Нехай паралельне проектування задане картинною площиною α і прямою l ($l \not\subset \alpha$, $l \nparallel \alpha$), проекцією прямої n при даному проектуванні є пряма $n'(n' \subset \alpha)$. Треба довести, що, якщо попарно різні точки M, N, K прямої n проектуються, відповідно, у точки M', N', K' прямої n' (зрозуміло, також попарно різні), точка N лежить між точками M і K ($M-N-K$), то точка N'на прямій n'лежить між точками $M' \, i \, K'$ ($M'-N'-K'$).

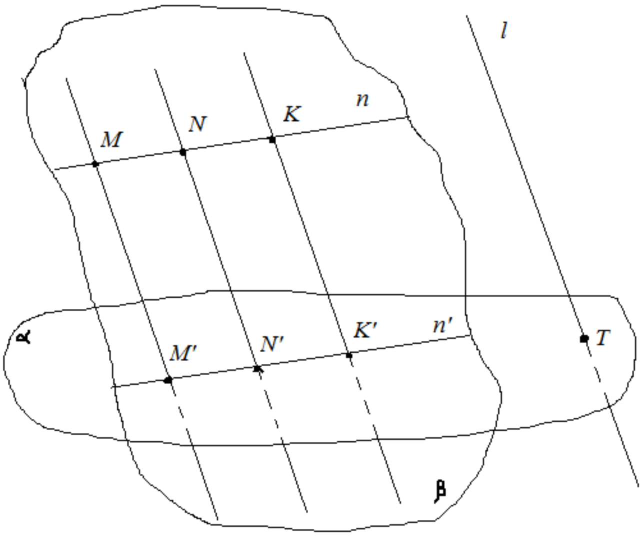


Рис.52a

Якщо пряма $n \subset \alpha$, то $n' \equiv n$, для довільних точок M, N, K прямої l $M' \equiv M$, $N' \equiv N$, $K' \equiv K$ і твердження теореми 3.4. є очевидним.

Нехай пряма $n \| \alpha$ (рис. 52a) або пряма n перетинає площину α у певній точці P (рис. 52b).

Якщо β - площина, що проходить через пряму n паралельно до прямої l, то, як було показано при доведенні теореми 3.3., $n' = \alpha \cap \beta$, прямі $MM' \| NN' \| KK'$ лежать у площині β.

За теоремою Фалеса паралельні прямі, що належать одній площині, відтинають на двох прямих цієї площини пропорційні відрізки. Тому

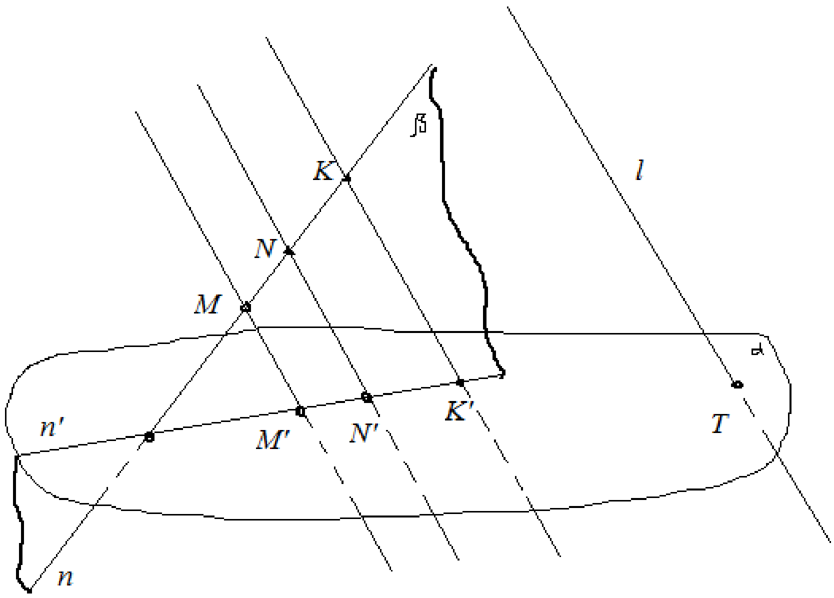


Рис.52b

$\dfrac{M'N'}{MN} = \dfrac{N'K'}{NK} = \dfrac{M'K'}{MK} = t$, де t - певне дійсне число. Тоді $M'N' = t \cdot MN$; $N'K' = t \cdot NK$; $M'K' = t \cdot MK$. Якщо точка N на прямій n лежить між точками M і

K $(M-N-K)$, то $MK=MN+NK$. (Довжина кожного відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається своєю довільною точкою.)

Але тоді $M'K'=t\cdot MK=t\cdot(MN+NK)=t\cdot MN+t\cdot NK=M'N'+N'K$ (1)

Серед трьох різних точок M',N',K' прямої n' одна і тільки одна лежить між двома іншими. Якщо припустити, що точка M' лежить між точками N' і K', то буде справедливою рівність $M'N'+M'K'=N'$K', або, з урахуванням (1)

$$M'N'+M'N'+N'K'=N'K',\quad 2M'N'=0,\quad M'N'=0,$$

Що означає протиріччя. Аналогічним чином, до протиріччя приводить і припущення того, що точка K' лежить між точками M' і N'. Отже, саме точка N' лежить між точками M' і K', що й треба було довести. ■

Теорема 3.5. *Проекцією відрізка при паралельному проектуванні є або точка, або відрізок. Відрізок проектується у точку тоді та тільки тоді, коли пряма, що цей відрізок містить, є паралельною до прямої, яка задає напрямок паралельного проектування, або з цією прямою співпадає. У випадку, коли відрізок проектується у відрізок, кінці відрізка-оригінала проектуються у кінці відрізка-проекції, внутрішні точки відрізка-оригінала проектуються у внутрішні точки відрізка-проекції, закон проектування встановлює взаємно однозначну відповідність між відрізком-оригіналом і відрізком-проекцією.*

Доведення. □ Нехай паралельне проектування задане картинною площиною

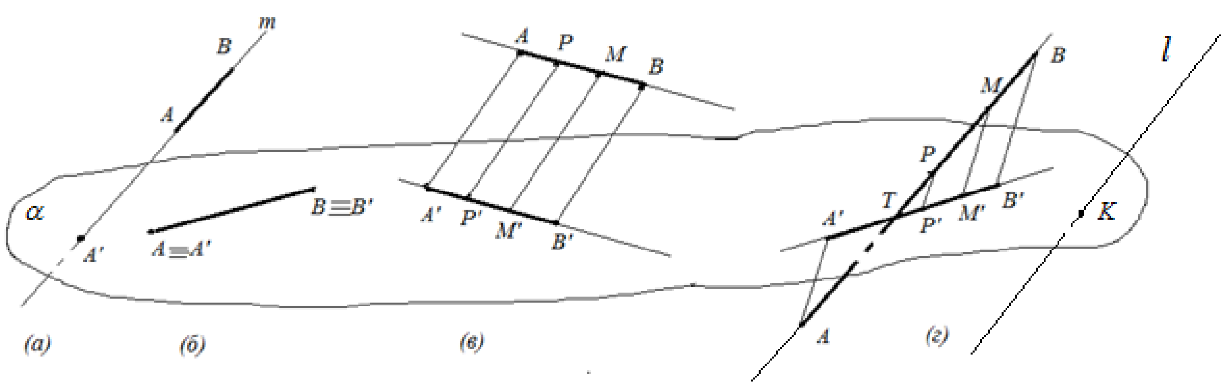


Рис.53

α і прямою l $(l \not\subset \alpha,\ \ l \nparallel \alpha)$, пряма l перетинає площину α у точці K.

Розглянемо спочатку такий відрізок AB, що пряма AB є паралельною до прямої l (рис. 53, випадок (а)). Нехай $AB \cap \alpha = A'$. Як було доведено у теоремі 3.2., при даному паралельному проектуванні всі точки прямої AB, у тому числі і точки відрізка AB, проектуються у точку A'. Нехай, навпаки, відомо, що паралельною проекцією відрізка AB є точка A'. Зокрема, це означає, що проекцією точки A є точка A' і проекцією точки B є та ж сама точка A'. Згідно закону проектування тоді пряма AA' є паралельною до прямої l $(AA' \| l)$, і пряма BA' є паралельною до прямої l $(BA' \| l)$. Але у евклідовій геометрії через точку A' проходить єдина пряма, паралельна до прямої l. Отже, прямі AA' і BA' співпадають, точки A і B лежать на прямій, яка проходить через точку A' паралельно до прямої l. (Якщо $A \equiv A'$ або $B \equiv A'$, то подібний висновок є очевидним.) Це пряма AB $(AB \| l)$ (У евклідовій геометрії через будь-які дві різні точки проходить єдина пряма),

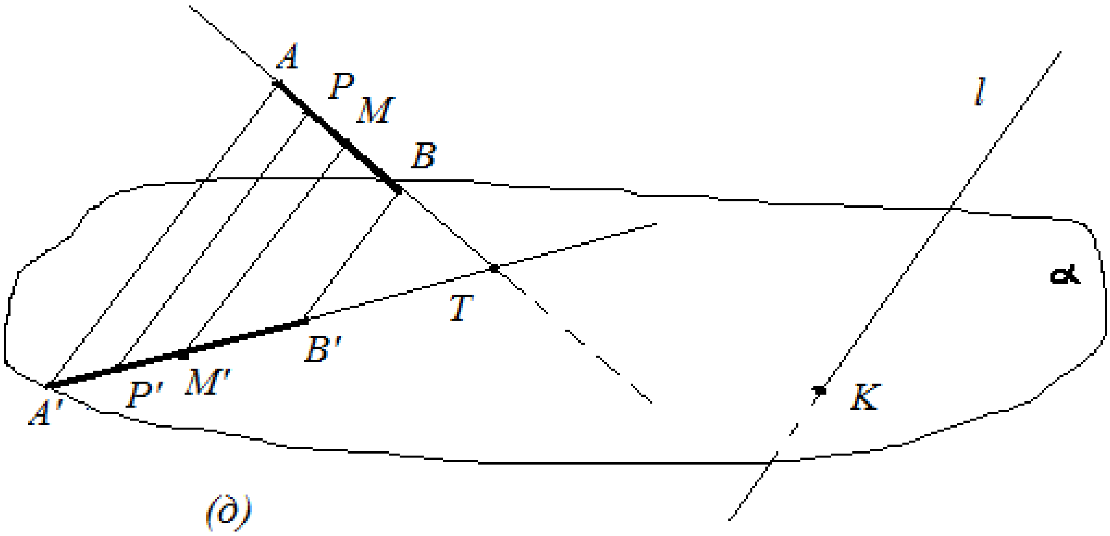


Рис.53

вона, за означенням відрізка AB, містить відрізок AB.

Якщо пряма AB співпадає з прямою l (відрізок AB належить прямій l), є справедливими аналогічні міркування, роль точки A' виконує точка K.

У випадку, коли відрізок AB належить картинній площині α (рис. 53, випадок ($б$)), цей відрізок співпадає зі своєю проекцією, кожна точка відрізка

AB проектується сама у себе, другий висновок теореми 3.5., очевидно, є справедливим.

Розглянемо тепер випадок, коли пряма AB, що містить відрізок AB, не є паралельною до прямої l і не належить картинній площині α (рис. 53, випадки (*в*), (*г*), (*д*)). Нехай точка A проектується у точку A', точка B - у точку B' $(A', B' \in \alpha,\ \ AA' \| l,\ \ BB' \| l)$, або, можливо, $A' \equiv A$ чи $B' \equiv B$). Тоді, за теоремою 3.3., пряма AB проектується у пряму $A'B'$ $(A'B' \subset \alpha)$, згідно теореми 3.4., кожна внутрішня точка M відрізка AB $(A - M - B)$ проектується у внутрішню точку M' відрізка $A'B'$ $(A' - M' - B')$. Отже, відрізок AB проектується у відрізок $A'B'$. Оскільки при цьому проектуванні вся пряма AB взаємно однозначно відображається на пряму $A'B'$, для відрізка AB таке проектування є ін'єктивним відображенням. Розглянемо довільну внутрішню точку P' відрізка $A'B'$ $(A' - P' - B')$. На прямій AB існує єдина точка P, яка проектується у точку P'. $P \not\equiv A,\ P \not\equiv B$, бо проектування є взаємно однозначним відображенням і $P' \not\equiv A'$, $P' \not\equiv B'$. Тоді справедливою є одна з трьох можливих умов: або $P - A - B$, або $A - P - B$, або $A - B - P$. Але, згідно теореми 3.4., припущення справедливості першої чи третьої із даних умов, означає, що відповідно, або $P' - A' - B'$, або $A' - P' - B'$. А це виключає можливість вірності твердження $A' - P' - B'$, яке за вибором точки P' є справедливим, і тому означає отримання протиріччя. Отже, насправді, вірно, що $A - P - B$, точка P, оригінал точки P' при даному паралельному проектуванні, є внутрішньою точкою відрізка AB, дане паралельне проектування є не тільки ін'єктивним, а й сюр'єктивним, тобто, взаємно однозначним відображенням відрізка AB на відрізок $A'B'$, що й треба було довести. ■

Паралельне проектування, при якому **відрізок** проектується у точку, для даного відрізка вважається **виродженим**. Паралельне проектування, при якому **відрізок** проектується у відрізок, для даного відрізка вважається **невиродженим**. Зрозуміло, що паралельне проектування для відрізка є виродженим тоді та тільки тоді, коли воно є виродженим для прямої, що цей відрізок містить.

Теорема 3.6. *Проекцією променя при паралельному проектуванні є або точка, або промінь. Промінь проектується у точку тоді та тільки тоді, коли пряма, що цей промінь містить, є паралельною до прямої, яка задає напрямок паралельного проектування, або з цією прямою співпадає. У*

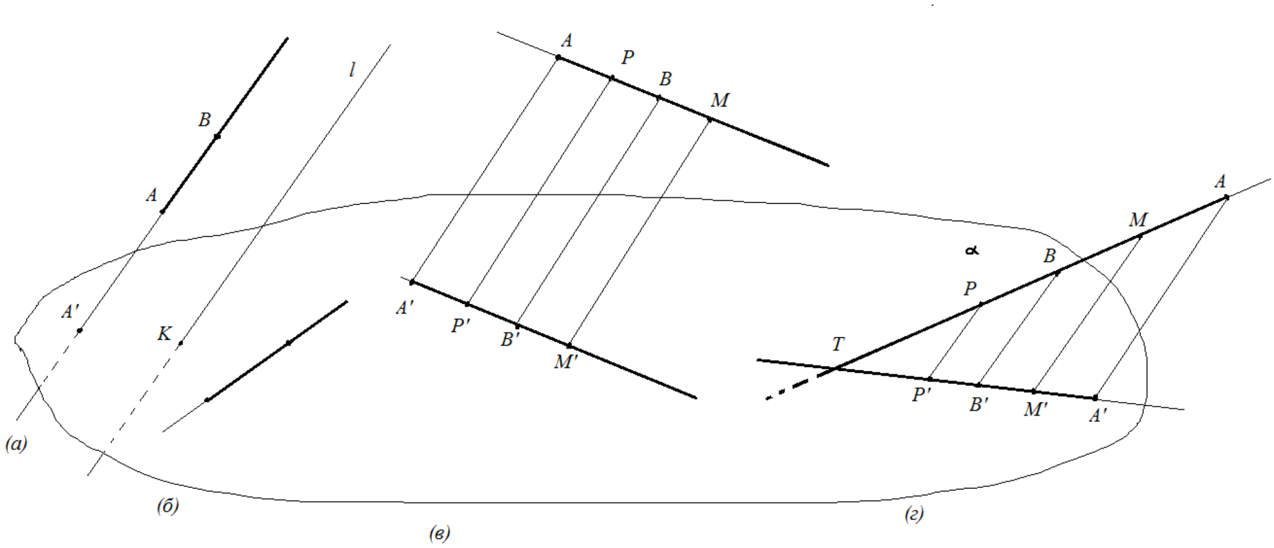
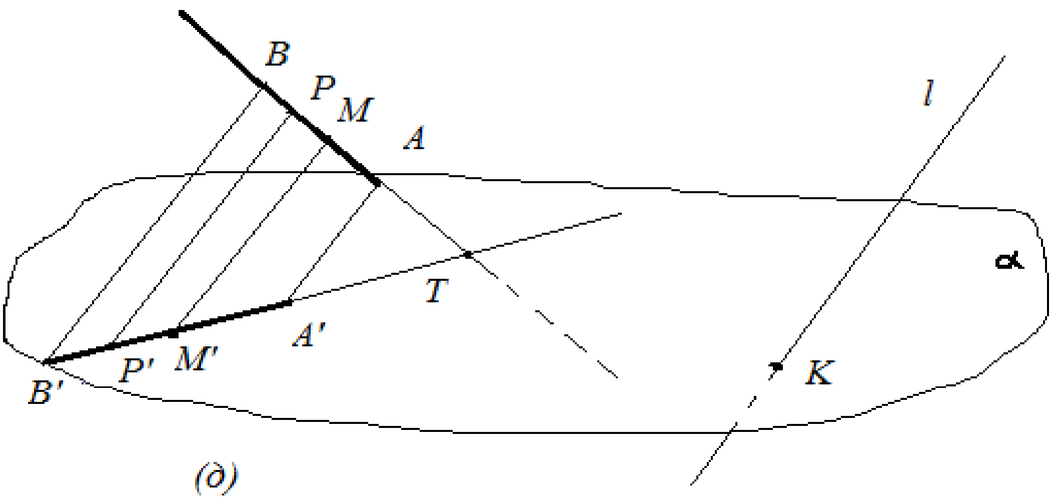


Рис.54



випадку, коли промінь проектується у промінь, початок променя-оригінала проектується у початок променя-проекції, внутрішні точки променя-оригінала проектуються у внутрішні точки променя-проекції, закон проектування встановлює взаємно однозначну відповідність між променем-оригіналом і променем-проекцією

Доведення. □ Нехай паралельне проектування задане картинною площиною α і прямою $l \quad (l \not\subset \alpha, \ \ l \nparallel \alpha)$, пряма l перетинає площину α у певній точці K.

Розглянемо такий промінь AB, що пряма AB є паралельною до прямої l (рис. 54, випадок (*а*)). Нехай $AB \cap \alpha = A'$. Як було доведено у теоремі 3.3., при даному паралельному проектуванні всі точки прямої AB, у тому числі і точки променя AB, проектуються у точку A'. Отже, у даному випадку, проекцією променя AB, є точка A'. Нехай навпаки, відомо, що паралельною проекцією променя AB є точка A'. Зокрема, це означає, що проекцією точки A є точка A' і проекцією точки B променя AB є та ж сама точка A'. Згідно правила про проектування , тоді пряма AA' є паралельною до прямої l $(AA' \| l)$, і пряма BA' є паралельною до прямої l $(BA' \| l)$. Але у евклідовій геометрії через точку A' проходить єдина пряма, паралельна до прямої l. Отже, прямі AA' і BA' співпадають, точки A і B лежать на одній прямій, що проходить через точку A' паралельно до прямої l, це пряма AB. За означенням променя AB, він є підмножиною прямої AB.

Якщо промінь AB є підмножиною прямої l, всі міркування є аналогічними, роль точки A' виконує точка K.

У випадку, коли промінь AB належить картинній площині α (рис. 54, випадок (*б*)), він співпадає зі своєю проекцією, кожна точка променя AB проектується сама у себе, другий висновок теореми 3.6., очевидно, є справедливим.

Розглянемо тепер випадок, коли пряма AB, що містить промінь AB, не є паралельною до прямої l і не належить картинній площині α (рис. 54, випадки (*в*), (*г*), (*д*)). Нехай точка A проектується у точку A', певна точка B променя AB - у точку B' $(A', B' \in \alpha, \ \ AA' \| l, \ \ BB' \| l$, або, можливо, $A' \equiv A$ чи $B' \equiv B)$. Тоді, за теоремою 3.3., пряма AB проектується у пряму $A'B'$ ($A'B' \subset \alpha$). Нехай точка M прямої AB, яка проектується у точку M' прямої $A'B'$, є внутрішньою точкою променя AB.

Якщо точка M співпадає з точкою B, то точка M' співпадає з точкою B' і, зрозуміло, належить променю $A'B'$. Якщо $M \not\equiv B$, то справедливе твердження $A - M - B$ (точка M лежить між точками A і B), або твердження $A - B - M$ (точка B лежить між точками A і M). Згідно теореми 3.4. тоді, відповідно, або $A' - M' - B'$, або $A' - B' - M'$, і точка M' належить променю $A'B'$. Отже, промінь AB проектується у промінь $A'B'$. Оскільки, при цьому проектуванні вся пряма AB взаємно однозначно відображається на пряму $A'B'$, для променя AB таке проектування є ін'єктивним відображенням. Розглянемо довільну внутрішню точку P' променя $A'B'$. На прямій AB існує єдина точка P, проекцією якої є точка P' . Якщо $P' \equiv B'$, то $P \equiv B$, P належить променю AB. Якщо $P' \not\equiv B'$, то $P \not\equiv B$, $P \not\equiv A$, бо $P' \not\equiv A'$, і справедливою є одна з трьох можливих умов: або $P - A - B$, або $A - P - B$, або $A - B - P$.

Але, згідно теореми 3.4., припущення справедливості першої умови означає, що справедливим є твердження $P' - A' - B'$. Це означає, що точка P' не лежить на промені $A'B'$ і суперечить її вибору. Оте, насправді, або $A - P - B$, або $A - B - P$, точка P є внутрішньої точкою променя AB, дане паралельне проектування є не тільки ін'єктивним, а й сюр'єктивним відображенням , тобто, взаємно однозначним відображенням променя AB на промінь $A'B'$, що й треба було довести. ■

Паралельне проектування, при якому **промінь** проектується у точку, для даного променя вважається **виродженим**. Паралельне проектування, при якому **промінь** проектується у промінь, для даного променя вважається **невиродженим**. Зрозуміло, що паралельне проектування для променя є виродженим тоді та тільки тоді, коли воно є виродженим для прямої, що цей промінь містить.

Теорема 3.7. *Проекцією площини при паралельному проектуванні є або пряма, або площина. Площина проектується у пряму тоді та тільки тоді, коли ця площина є паралельною до прямої, що задає напрямок паралельного проектування, або цю пряму містить. Пряма-проекція є прямою перетину площини оригіналу з картинною площиною. У випадку, коли проекцією* *площини є площина, це саме картинна площина, закон проектування встановлює взаємно однозначну відповідність між площиною-оригіналом і картинною площиною.*

Доведення.

□ Нехай паралельне проектування задане картинною площиною α і

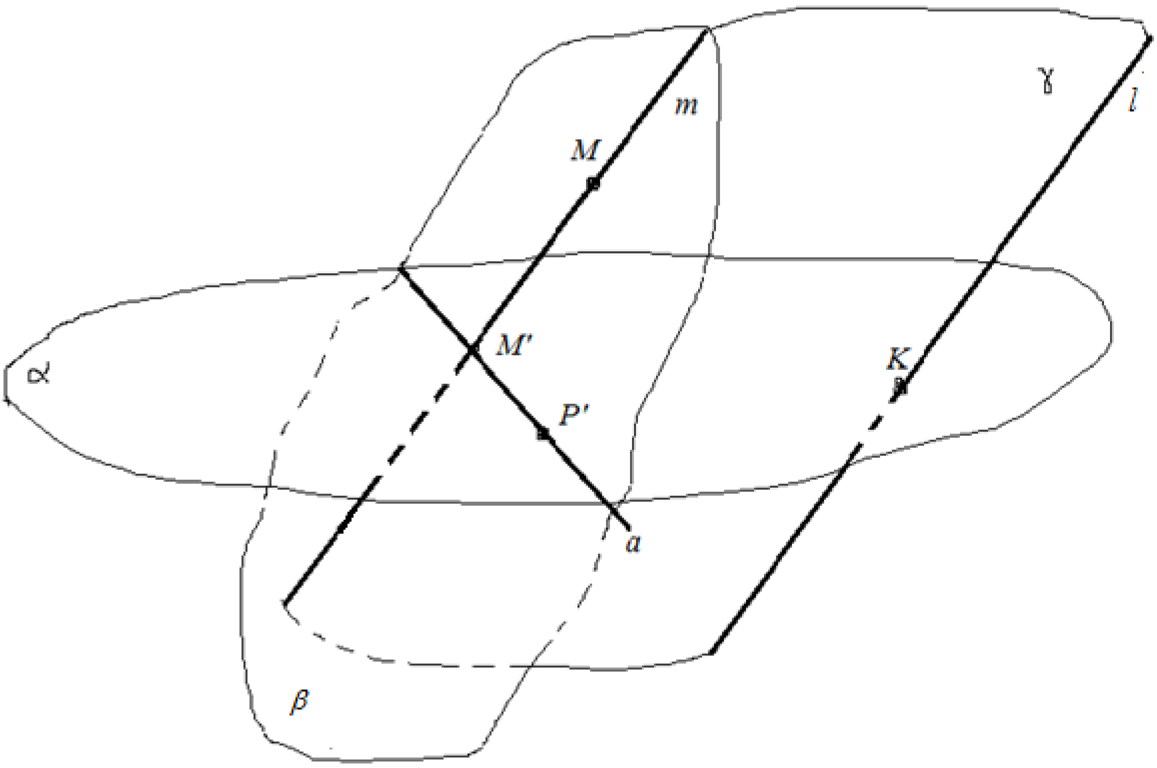


Рис.55

прямою l $(l \not\subset \alpha,\ \ l \nparallel \alpha)$, пряма l перетинає площину α у певній точці K.

Розглянемо площину β, яка є паралельною до прямої l, або містить цю пряму. Зрозуміло, що така площина β не може співпадати з картинною площиною α або бути паралельною до неї, бо $l \not\subset \alpha,\ \ l \nparallel \alpha$. Отже, площина β перетинає площину α по певній прямій a: $a = \alpha \cap \beta$. Прямі l і a не є паралельними ($l \nparallel a$), бо у супротивному випадку, згідно ознаки паралельності прямої до площини, виявилося би, що $l \parallel \alpha$. Оскільки пряма a лежить у площині α, кожна точка площини β, що знаходиться на прямій a, проектується сама у себе. Розглянемо точку M площини β, яка не лежить на прямій a. Якщо $M \in l$, то це той випадок, коли площина β містить пряму l (інакше $l \| \beta$, пряма l і площина β не мають спільних точок) $\alpha \cap l = K,\ \ K \in a$, бо $K \in \alpha \cap \beta = a$, проекцією точки M є точка прямої a. Якщо $M \notin l$, через точку M проходить пряма $\mathrm{m} \| l$ (рис. 55), існує єдина площина γ, що містить прямі m і l. Точка $M \in \gamma \cap \beta$.

Отже, або площина γ співпадає з площиною β, і тоді, $m \subset \beta$, або площина γ перетинає площину β по певній прямій q $(q = \gamma \cap \beta)$, $M \in q$. У останньому випадку пряма l є паралельною до площини β (Якщо пряма l лежала би у площині β, то площини β і γ співпадали би.) Але тоді $l \| q$ (дві прямі лежать і одній площині γ і не мають спільних точок). Але у евклідовій геометрії через точку M проходить єдина пряма, паралельна до прямої l. Це

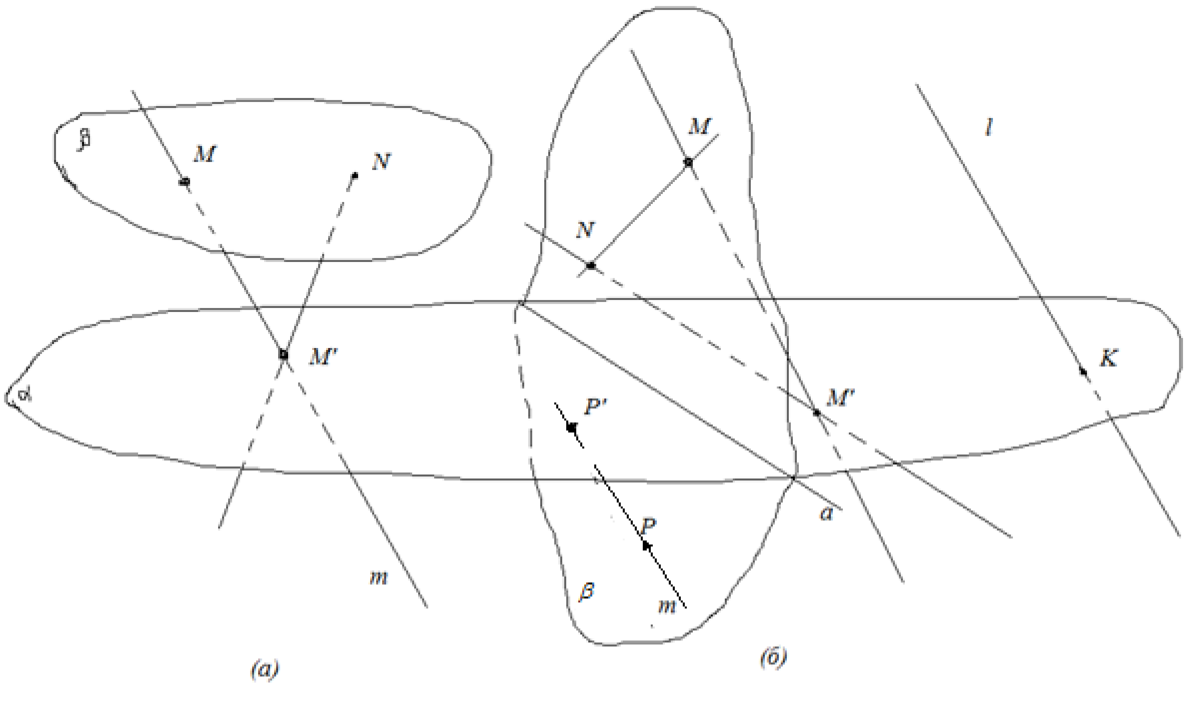


Рис.56

означає, що прямі q і m співпадають, пряма m лежить у площині β. Оскільки $l \square a$, то $m \square a$, існує точка $M' = m \cap a$, саме точка M' є проекцією точки M на площину α у напрямку прямої l, $M' \in a$. Таким чином, якщо $\beta \| l$ або $l \subset \beta$, кожна точка площини β проектується у точку, що лежить на прямій $a=\alpha\cap\beta$. Це означає, що площина β, як геометрична фігура, проектується у пряму a.

Розглянемо тепер довільну точку $P'\in a$. $P'\in\alpha\cap\beta$. Отже, це точка площини β, яка при даному паралельному проектуванні проектується сама у себе, кожна точка прямої a є проекцією певної точки площини β (насправді, безлічі точок площини β), у даному випадку пряма $a=\alpha\cap\beta$ є проекцією площини β.

Нехай тепер площина β не є паралельною до прямої l і не містить цю пряму.

Якщо при цьому площина β співпадає з площиною *α,* то кожна точка площини β проектується сама у себе, проекцією площини β є вся площина *α*, закон проектування встановлює тотожну взаємно однозначну відповідність між площинами β і *α.*

У супротивному випадку або $\alpha\parallel\beta$ (рис. 56 (*а*)), або площина β перетинає площину α по певній прямій a ($a=\alpha\cap\beta$), але $l\nparallel\beta$, $l\not\subset\beta$ (рис. 56 (*б*)).

Розглянемо спочатку випадок, коли $\alpha\parallel\beta$ (рис. 56 (*а*)). Зрозуміло, що проекція кожної точки площини β, як і проекція взагалі кожної точки евклідового простору, є однозначно визначеною і належить площині *α.* Нехай точка $M'\in\alpha$. Через точку M' проходить єдина пряма $m\parallel l$ (або $M'\in l$). У евклідовій геометрії, якщо пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає і іншу. Отже, існує точка $M=m\cap\beta$. Зрозуміло, що проекцією точки $M\in\beta$ при даному паралельному проектуванні є саме точка M', дане паралельне проектування є сюр'єктивним відображенням площини β на площину *α.* Припустимо, що точки $M,N\in\beta$, $M\neq N$, точки M і N проектуються у ту ж саму точку M'. Тоді обидві прямі MM' і NM' є паралельними до прямої l (або одна з них співпадає з прямою l). Але через точку M' проходить єдина пряма, паралельна до прямої l (або такою прямою є сама пряма l). Це означає, що точки M, N, M' лежать на одній прямій, яка перетинає площину α у одній точці M'. Але $\alpha \| \beta$, отже, ця пряма і площину β перетинає у одній точці, точка M співпадає з точкою N. Отримали протиріччя, яке означає ін'єктивніть відповідного проектування. Отже, при паралельному проектуванні на площину *α* площини *β,* яка є паралельною до площини *α,* закон проектування встановлює між площинами β і *α* взаємно однозначну відповідність, що й треба було довести.

Нехай тепер площина β перетинає площину α по певній прямій a: $a = \alpha \cap \beta$, $l \nparallel \beta$, $l \not\subset \beta$ (рис. 56(*б*)). За теоремою 3.2. проекція кожної точки площини β, як і, взагалі, проекція кожної точки простору на площину *α* у напрямку прямої l визначається однозначно, паралельне проектування є відображенням площини β у картинну площину *α.* Припустимо, при даному проектуванні різні точки M і N площини β проектуються у одну точку $M' \in \alpha$. Оскільки через точку M' проходить єдина пряма, паралельна до прямої l $MN \| l$ або $MN \equiv l$. Але тоді пряма l є паралельною до площини *β,* або належить площині β. Обидві можливості означають протиріччя. Отже, припущення є невірним, якщо точки M і N площини β не співпадають, то їх проекції на площину α не співпадають також, відображення проектування площини β у площину *α* є ін'єктивним.

Ми розглядаємо випадок, коли $l \nparallel \beta$, $l \not\subset \beta$. Отже, пряма l перетинає площину β у певній точці T. Оберемо на площині *α* довільну точку P'. Або $P' \in l$, або існує пряма m, що проходить через точку P' паралельно до l. У першому випадку точка P' є проекцією точки T. У другому випадку пряма m перетинає площину β у певній точці P і точка P' є проекцією саме точки P. Все це доводить сюр'єктивність даного відображення. Значить, у даному випадку паралельне проектування здійснює бі`єктивне (тобто, взаємно однозначне) відображення площини β на картинну площину α , що й треба було довести.

Таким чином, ми довели, що 1) якщо площина β є паралельною до прямої l, що задає напрямок паралельного проектування, або містить цю пряму, то площина β проектується у пряму $a=\alpha\cap\beta$; 2) у супротивному випадку $(l\|\beta)$ площина β взаємно однозначно проектується на картинну площину α. Оскільки, можливими є тільки два несумісних між собою випадки взаємного розміщення прямої l і площини β, а висновки тверджень 1) і 2) також є несумісними, за відповідною теоремою математичної логіки справедливими є і обернені твердження: 1) якщо площина β проектується у пряму, то площини β є паралельною до прямої l, що задає напрямок паралельного проектування, або містить пряму l; 2) якщо точки площини β проектуються у точки площини α, не всі з яких лежать на одній прямій, то площина β не є паралельною до прямої l і не містить цю пряму. Тепер теорему повністю доведено. ■

Проектування, при якому **площина** проектується у пряму, для даної площини вважається **виродженим**. Проектування, при якому **площина** проектується на всю картинну площину, для площини-оригінала вважається **невиродженим**.

Теорема 3.8. *Проекцією півплощини при паралельному проектуванні є або промінь, або пряма, або півплощина. Проекцією півплощини є промінь тоді та тільки тоді, коли межа цієї півплощини є паралельною до прямої* l*, що задає напрямок паралельного проектування, або співпадає з прямою* l*. Проекцією півплощини є пряма тоді та тільки тоді, коли площина, що цю півплощину містить, є паралельною до прямої* l*, що задає напрямок паралельного проектування, або цю пряму містить, але межа даної півплощини не є паралельною до прямої* l *і не співпадає з прямою* l*. Коли проекцією півплощини є півплощина, проекцією межи півплощини-оригіналу є межа півплощини-проекції, закон проектування встановлює взаємно однозначну відповідність між межею півплощини-оригіналу і межею* *півплощини-проекції, взагалі між півплощиною-оригіналом і півплощиною-проекцією.*

Доведення. □ Нехай паралельне проектування задане картинною

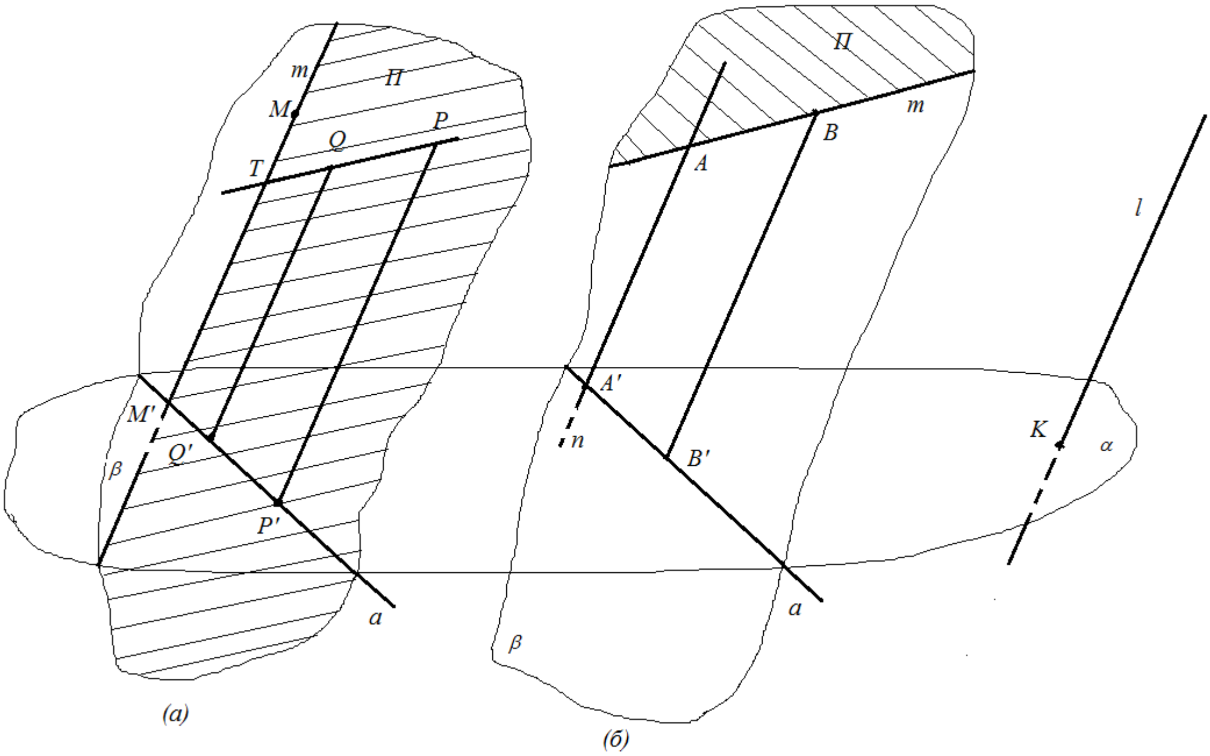


Рис.57

площиною α і прямою l $(l \not\subset \alpha,\ l \nparallel \alpha)$, пряма l перетинає площину α у точці K (рис. 57).

Нехай півплощина *П*, межею якої є пряма m, складає частинну площини β. Розглянемо випадок, коли $m \| l$ (рис. 57 (*а)*) або $m \equiv l$. Зрозуміло, що тоді $l \parallel \beta$ або $l \subset \beta,\ \beta \nparallel \alpha$, площина β перетинає картинну площину α по певній прямій a, згідно теореми 3.7., пряма a є проекцією площини β на картинну площину α у напрямку прямої l. Оскільки $m \| l$ або $m \equiv l,\ m \subset \beta$, за теоремою 3.3., проекцією прямої m є певна точка $M' \in a$ (якщо $m \equiv l$, то $M' \equiv \mathrm{K}$). Проекції всіх внутрішніх точок півплощини *П,* зрозуміло, також належать прямій a, бо $П \subset \beta$. Нехай внутрішня точка P півплощини *П* проектується у певну точку $P' \in a$ (При цьому, очевидно, що $P' \not\equiv M'$, бо $P' \notin m$). Покажемо, що тоді всі внутрішні точки півплощини *П* проектуються у внутрішні точки променя $M'P'$. Розглянемо довільну внутрішню точку Q півплощини *П*, відмінну від точки P. Точки Q і P лежать у площині β по один бік відносно прямої m, відрізок QP не перетинає пряму m. Якщо пряма QP є паралельною до прямої m, то вона є паралельною і до прямої l, або співпадає з нею, і тому всі точки прямої QP проектуються у точку P'. Якщо пряма QP не є паралельною до прямої m, то вона перетинає пряму m у певній точці T (рис. 57, (a)). Оскільки T,Q і P є різними точками однієї прямої, одна та тільки одна з них лежить між двома іншими. Але випадок Q–T–P є неможливим, бо відрізок PQ не перетинає пряму m. Отже, або точка Q є внутрішньою точкою відрізка TP ($T-Q-$P), або точка P є внутрішньою точкою відрізка TQ ($T-P-Q$). Проекцією прямої TP, за теоремою 3.3., є пряма $M'P'$. Точка Q проектується у певну точку Q' прямої $M'P'$. За теоремою 3.4., при такому паралельному проектуванні зберігається порядок точок прямої TP. Отже, або $M'-Q'-$P', або $M'-P'-Q'$. У обох випадках точка Q' лежить на промені $M'P'$.

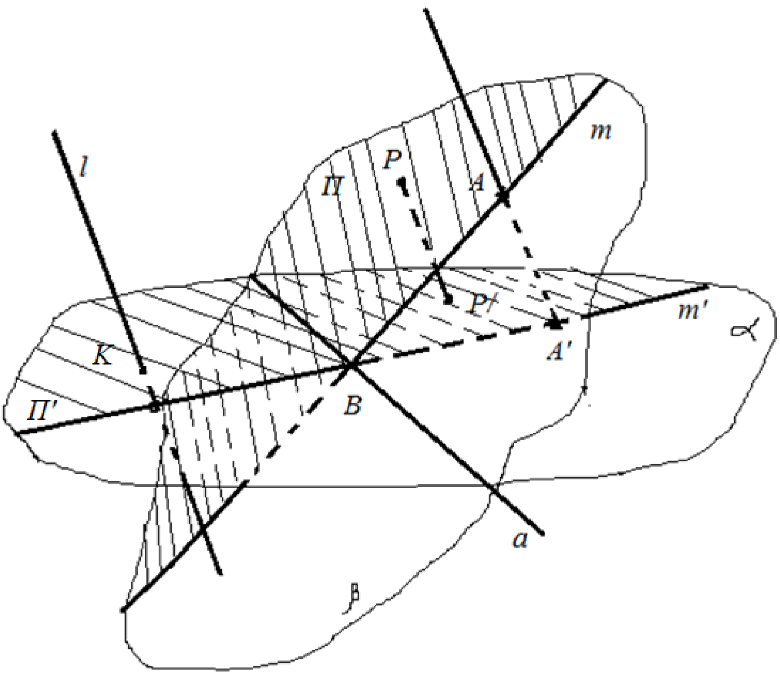


Рис.58(а) ; $\beta \cap \alpha = a$, $m \cap a = B$

Таким чином, ми довели, що у розглянутому випадку всі точки півплощини *П* проектуються на промінь $M'P'$ прямої a. Зрозуміло також, що кожна точка променя $M'P'$ є проекцією певної точки (навіть безлічі точок) півплощини *П,* бо всі точки променя $M'P'$ одночасно належать і картинній площині α, і півплощині Π площини β. Отже, у розглянутому випадку проекцією півплощини Π є промінь $M'P'$.

Дослідимо тепер випадок, коли $l \parallel \beta$, або $l \subset \beta$, але $m \nparallel l$ (рис. 57 (*б*)). У цьому випадку також $\beta \nparallel \alpha$, площина β перетинає картинну площину α по певній прямій a, за теоремою 3.7., пряма a є проекцією площини β на картинну площину α у напрямку прямої l. Оскільки, $m \nparallel l$, то, за теоремою 3.3., проекцією прямої m є пряма. Але $m \subset \beta$, проекцією площини β є пряма a. Звідси випливає, що проекцією прямої m є сама пряма a. Зрозуміло, що всі точки півплощини Π проектуються у точки прямої a, бо $\Pi \subset \beta$. Розглянемо довільну точку $A' \in a$. Проведемо через неї пряму $n \parallel l$. Зрозуміло, що $n \subset \beta$, бо $l \parallel \beta$ або $l \subset \beta$, коли $l \subset \beta$, можливим є випадок, що $n \equiv l$. Оскільки, $m \nparallel l$, прямі n і m лежать у площині β і не є паралельними, ці прямі перетинаються у певній точці A. Точка A поділяє пряму n на два взаємно доповняльних променя, точки одного з цих променів належать півплощині *П.* Точка A' є проекцією на картинну площину α у напрямку прямої l всіх точок прямої n, у тому числі точок обох променів і, тому, безлічі точок півплощини *П.* Таким чином, у даному випадку проекцією півплощини Π є пряма a, пряма a є і проекцією межі m цієї півплощини.

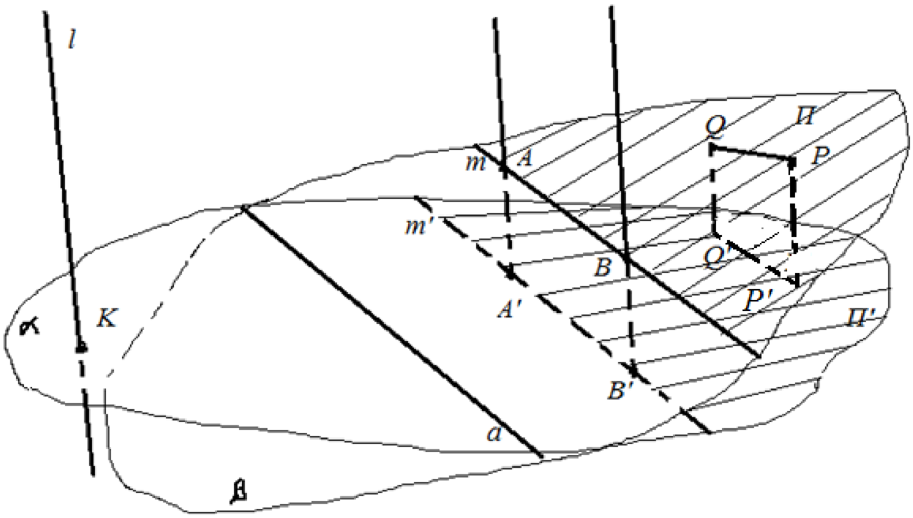


Рис.58(б); $\beta \cap \alpha = a$, $m \parallel a$

Нехай тепер площина β, що містить півплощину *П,* не є паралельною до прямої l і не містить дану пряму (рис. 58). За теоремою 3.7. у цьому випадку проекцією площини β є картинна площина α, закон проектування встановлює між площинами β і α взаємно однозначну відповідність. Пряма $m \subset \beta$, що є межею півплощини $П$ проектується у певну пряму $m' \subset \alpha$ ($l \nparallel m$, $l \not\equiv m$). За теоремою 3.3. закон проектування встановлює між прямими m та m' взаємно однозначну відповідність. Розглянемо довільну внутрішню точку P півплощини $П$ ($P \notin m$). Нехай проекцією точки P є точка P' площини α. $P' \notin m'$ тому що у точки прямої m' проектуються лише точки прямої m. Отже, точка P' є внутрішньою точкою однієї з двох півплощин, визначених на площині α прямою m'. Позначимо таку півплощину через $П'$. Обґрунтуємо, що проекцією півплощини $П$ є саме півплощина $П'$. Нехай точка $Q \in П$, $Q \not\equiv P$. Відрізок PQ не перетинає пряму m. Якщо точка Q проектується у точку Q', то відрізок $P'Q'$ не перетинає пряму m' (відрізок PQ проектується у відрізок $P'Q'$, пряма m' містить проекції лише точок прямої m). Це означає, що точки Q' і P' на площині α*,* лежать по один бік відносно прямої m', тобто, $Q' \in П'$. Таким чином, кожна точка півплощини $П$ проектується у точку півплощини $П'$. Різні точки півплощини $П$ проектуються у різні точки півплощини $П'$ тому що взагалі площина β взаємно однозначно проектується на площину α. З іншого боку, кожна внутрішня точка T' півплощини $П'$ при даному проектуванні має єдиний прообраз T на площині β. При цьому $\mathrm{T} \notin \mathrm{m}$, відрізок TP не перетинає пряму m, бо інакше відрізок T'P' перетинав би пряму m' і точка T' не належала би півплощині $П'$. Отже, точки T і P на площині β лежать по один бік відносно прямої m, $\mathrm{T} \in П$, при проектуванні між півплощинами $П$ *і* $П'$ встановлюється взаємно однозначна відповідність.

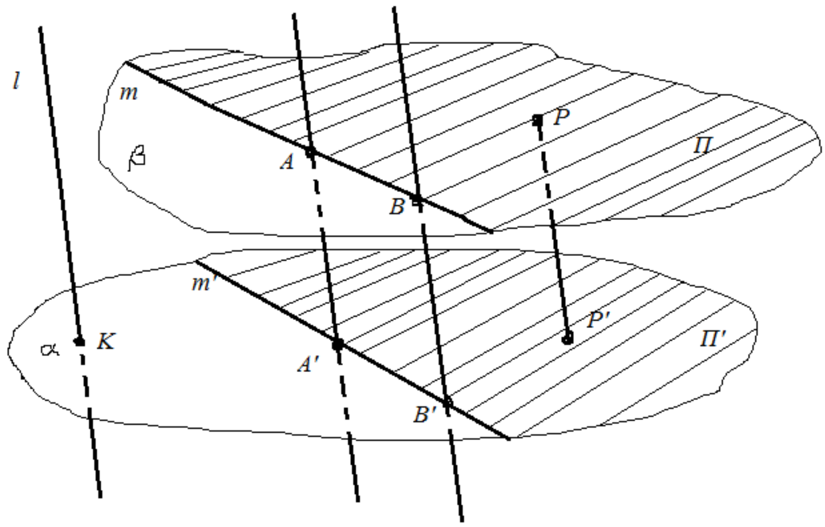


Рис.58(в) ; $\beta \parallel \alpha$

Таким чином, ми довели, що 1) якщо межа півплощини *П* є паралельною до прямої l, яка задає напрямок паралельного проектування, або з цією прямою співпадає, то півплощина *П* проектується у промінь; 2) якщо площина, що містить півплощину *П* є паралельною до прямої l, яка задає напрямок паралельного проектування, або цю пряму містить, але межа даної півплощини не є паралельною до прямої l і не співпадає з l, то півплощина *П* проектується у пряму; 3) якщо площина, що місить півплощину *П* не є паралельною до прямої l і не містить цю пряму, то півплощина *П* проектується у півплощину. Оскільки можливими і, одночасно, попарно не сумісними, є лише такі три випадки, взаємного розміщення півплощини *П* і прямої l, які вказані у твердженнях (1)-(3), висновки тверджень (1)-(3) також є попарно не сумісними, за відомою теоремою математичної логіки, справедливими є ї обернені твердження. Теорему доведено. ■

Проектування, при якому **півплощина** проектується у пряму або у промінь, для даної півплощини вважається **виродженим**. Проектування, при якому **півплощина** проектується на півплощину, для півплощини-оригінала вважається **невиродженим**.

Теорема 3.9. *Проекцією пари паралельних прямих при паралельному проектуванні є або пара точок, або пряма, або пара паралельних прямих. Пара паралельних прямих проектується у пару точок тоді та тільки тоді, коли дані прямі є паралельними до прямої* l*, яка задає напрямок паралельного проектування , або одна з них з прямою співпадає. Пара паралельних прямих* *проектується у одну пряму тоді та тільки тоді, коли дані прямі не є паралельними до прямої l але паралельною до прямої l є площина, що ці прямі містить або пряма l належить такій площині. У випадку, коли проекцією пари паралельних прямих є пара паралельних прямих, встановлюється взаємно однозначна відповідність між прямими-проекціями і прямими-оригіналами.*

Доведення. W Нехай паралельне проектування задане картинною площиною α і прямою l $(l \not\subset \alpha,\ l \nparallel \alpha)$, пряма l перетинає площину α у точці K.

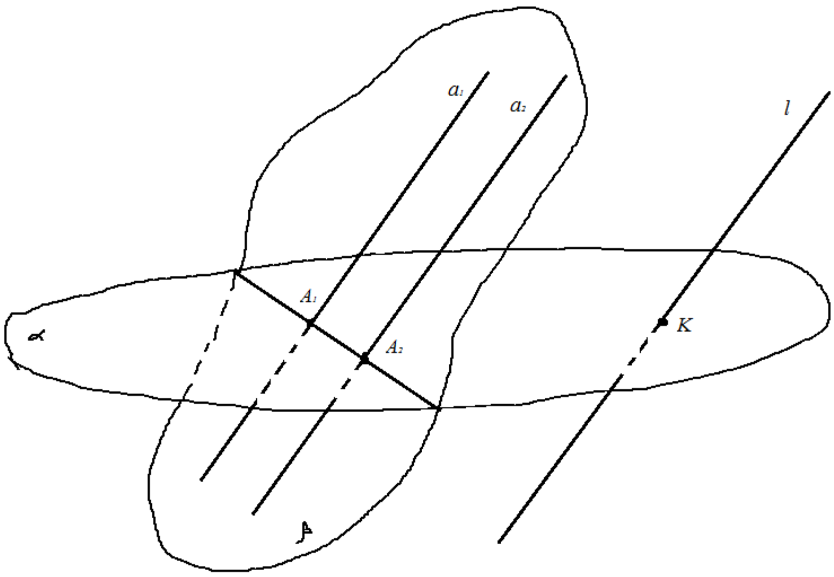


Рис.59

Розглянемо такі прямі a_1 і a_2, що $a_1 \| a_2 \| l$. За теоремою 3.3. для кожної з прямих a_1 і a_2 проектування є виродженим, кожна з них проектується у точку свого перетину з картинною площиною α: $a_1 \cap \alpha = A_1$, пряма a_1 проектується у точку A_1, $a_2 \cap \alpha = A_2$, пряма a_2 проектується у точку A_2 (рис. 59), $A_1 \not\equiv A_2$, тому що ці точки належать різним паралельним прямим. Отже, у даному випадку проекцією пари прямих a_1 і a_2 є пара точок A_1 і A_2.

Нехай β - площина, що містить паралельні прямі a_1 і a_2, $l \| \beta$ або $l \subset \beta$, але $l \nparallel a_1$, площина β перетинає площину α за певною прямою a (рис. 60). За теоремою 3.7., пряма a є проекцією площини β на площину α у напрямку прямої l, всі точки площини β, у тому числі і точки прямих a_1 і a_2, проектуються у пряму a. З іншого боку, за теоремою 3.3., проектування

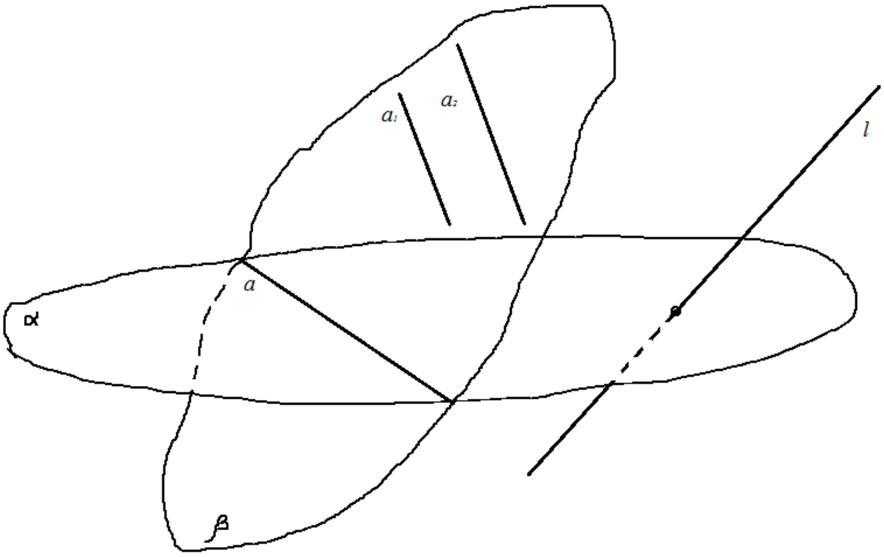


Рис.60

для прямих a_1 і a_2 є не виродженим, кожна з них проектується у пряму і саме на пряму a. Отже, пряма a є у даному випадку проекцією пари паралельних прямих a_1 і a_2.

Нехай тепер площина β, що містить паралельні прямі a_1 і a_2, не є паралельною до прямої l, яка задає напрямок паралельного проектування, і не містить пряму l (наприклад, рис. 61). Тоді $l \nparallel a_1$, $l \nparallel a_2$, за теоремою 3.3. проектування для кожної з прямих a_1 і a_2 є не виродженим, кожна з них проектується у певну пряму: пряма a_1 - у пряму a_1', пряма a_2 - у пряму a_2', закон проектування встановлює взаємно однозначні відповідності між прямими a_1 і a_1', та між прямими a_2 і a_2'. Припустимо, прямі a_1' і a_2' мають спільну точку M'. Тоді, саме завдяки наявності цих взаємно однозначних відповідностей, на прямій a_1 для точки M' існує оригінал M_1, і, одночасно, на прямій a_2 для точки M' існує оригінал M_2. Зрозуміло, що $M_1 \in \beta$, $M_2 \in \beta$, $M_1 \neq M_2$, бо $a_1 \| a_2$. Але, за теоремою 3.7, у даному випадку ($l \nparallel \beta$), закон проектування встановлює взаємно однозначну відповідність між площиною β і картинною площиною α, у точки M' не може бути два прообрази. Отримане протиріччя свідчить про те, що зроблене припущення є невірним, прямі a_1' і a_2' картинної площини α спільних точок не мають, $a'_1 \| a'_2$.

Таким чином, доведено, що 1) якщо дві паралельні прямі є паралельними до прямої l, що задає напрямок паралельного проектування, або одна з них з прямою l співпадає, то проекцією цих паралельних прямих є дві

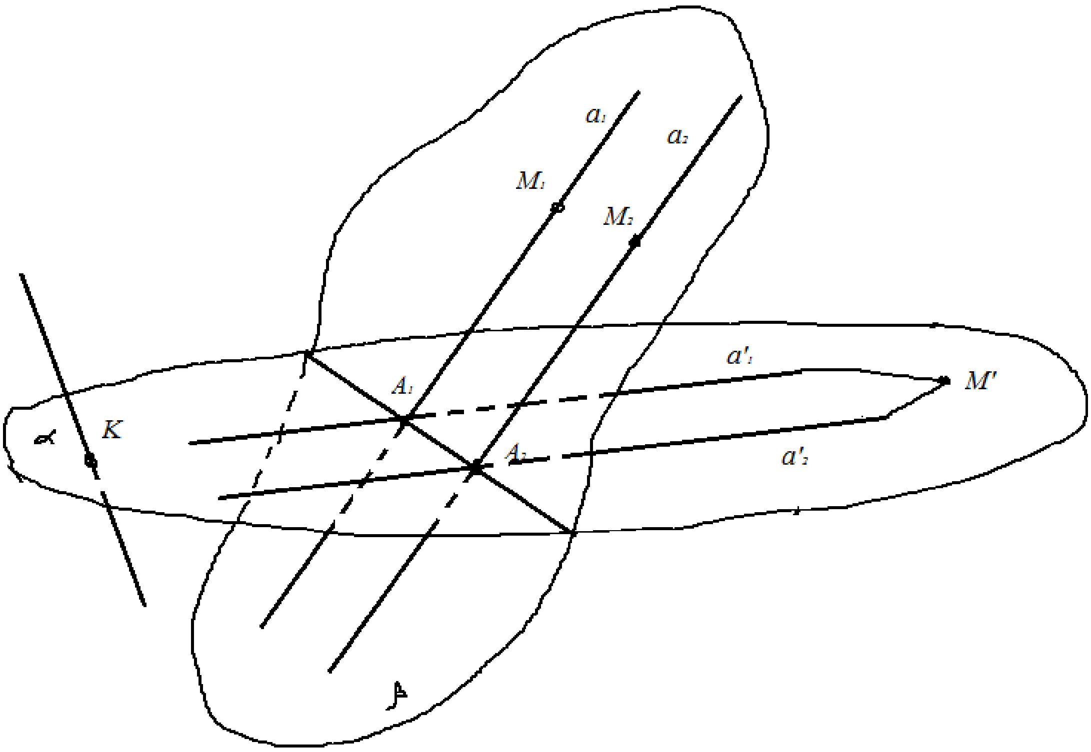


Рис.61

точки; 2) якщо жодна з двох паралельних прямих не є паралельною до прямої l, що задає напрямок паралельного проектування, але площина, що ці прямі містить, є паралельною до прямої l, або містить пряму l, то проекцією даних паралельних прямих є одна пряма; 3) якщо площина, що містить дані паралельні прямі, не є паралельною до l і не містить l, то проекцією даних прямих є пара паралельних прямих. Оскільки можливими, і, одночасно, попарно несумісними, є лише такі три випадки взаємного розміщення пари паралельних прямих і прямої l, які вказані у твердженнях (1)-(3), висновки тверджень (1)-(3) також є попарно не сумісними, за відомою теоремою математичної логіки справедливими є і обернені твердження.

Теорему доведено. ■

Проектування, при якому **пара паралельних прямих** проектується у пару точок або у одну пряму, для даної пари паралельних прямих вважається

виродженим. Проектування, при якому **пара паралельних прямих** проектується у пару паралельних прямих, для пари-оригіналу вважається **невиродженим**.

Теорема 3.10. *При паралельному проектуванні зберігається відношення довжин відрізків, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих у випадках, коли проекціями прямих-оригіналів не є точки.*

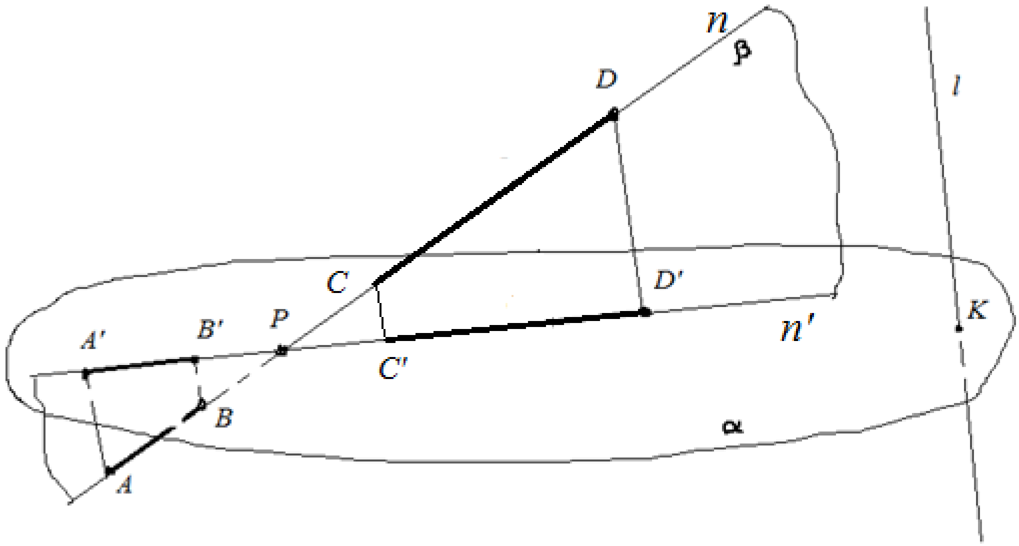


Рис.62

Доведення. Нехай паралельне проектування задане картинною площиною α і прямою l $(l \not\subset \alpha,\ l \not\parallel \alpha)$, пряма l перетинає площину α у точці K.

Нехай при даному проектуванні пряма n проектується у пряму $n' \subset \alpha$. Зрозуміло, що прямі n і n' належать одній площині β, що проходить через пряму n паралельно до прямої l ($n' = \beta \cap \alpha$, випадок, коли пряма n перетинає площину α у певній точці P зображено на рис. 62). Нехай відрізки AB і CD належать прямій n, точка A проектується у точку A', точка B - у точку B', точка C - у точку C', точка D - у точку D'. $A', B', C', D' \in n'$, $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD' \parallel l$. За теоремою 3.4., відрізок AB проектується у відрізок $A'B'$, відрізок CD - у відрізок $C'D'$, відрізки $A'B'$ і $C'D'$ лежать на прямій n'. За узагальненою теоремою Фалеса паралельні прямі, що перетинають дві прямі однієї площини (n і n'), відтинають на цих прямих пропорційні відрізки. Тобто, у розглянутому випадку, $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD}$, що й треба було довести.

Нехай тепер відрізок AB лежить на прямій a_1, відрізок CD - на прямій a_2, $a_1 \| a_2$, прямі a_1 і a_2, проектуються у одну пряму a картинної площини α. За теоремою 3.9. це відбувається тоді і тільки тоді, коли площина β, що містить паралельні прямі a_1 і a_2, є паралельною до прямої l, але $a_1 \nparallel l$, $a=\alpha \cap \beta$. На рис. 63 зображено випадок, коли $a_1 \nparallel a$. Нехай точка A проектується у точку A' , точка B - у точку B', точка C - у точку C', точка

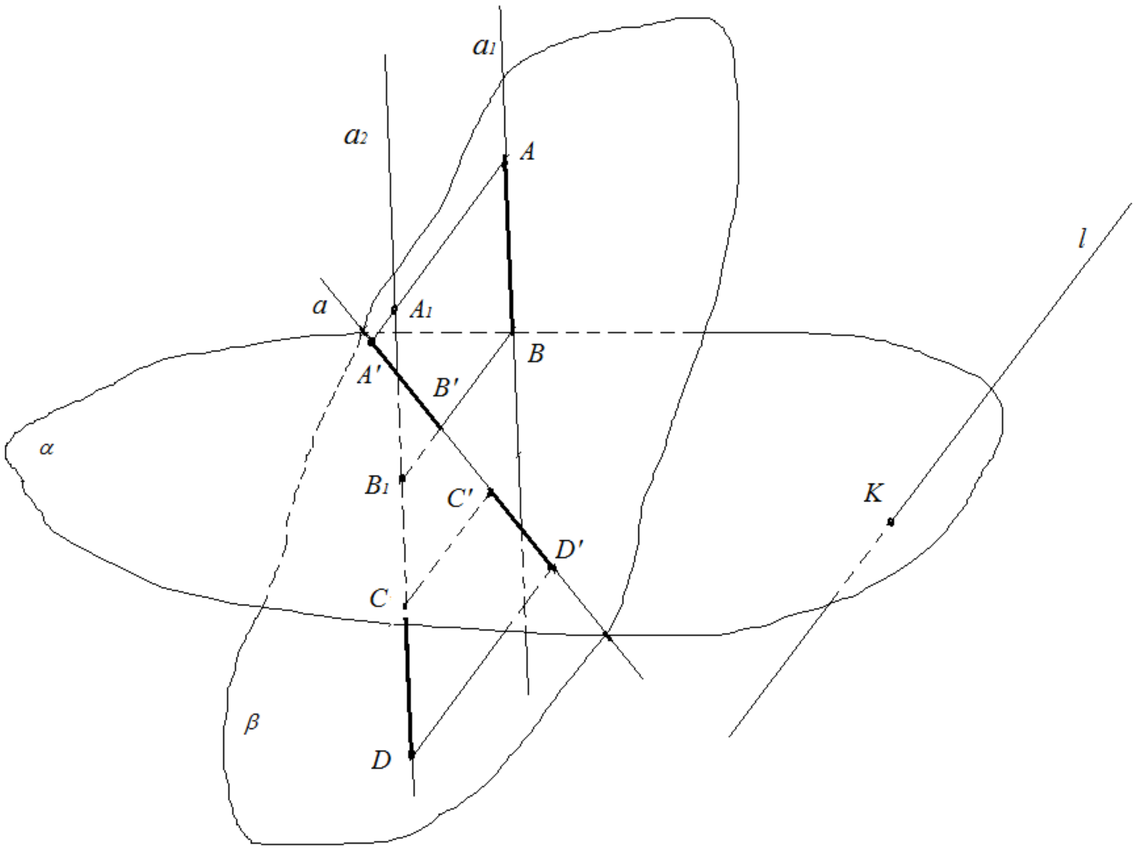


Рис.63

D - у точку D' прямої a, $AA' \| BB' \| CC' \| DD' \| l$. За теоремою 3.5., відрізок AB проектується у відрізок $A'B'$, відрізок CD - у відрізок $C'D'$, $AA' \| BB'$, $a_1 \| a_2$ - всі чотири прямі лежать у площині β, $A \in a_1$, $B \in a_2$. Звідси випливає, що прямі AA' і BB' перетинають пряму a_2, відповідно, у точках A_1 і B_1, чотирикутник A_1ABB_1 є паралелограмом, $AB = A_1B_1$. Але тоді при даному паралельному проектуванні точка A_1, як і точка A, проектується у точку A', точка B_1, як і точка B, проектується у точку B', відрізок A_1B_1 проектується у відрізок $A'B'$. Відрізки A_1B_1 і CD належать прямій a_2, і проектуються у відрізки $A'B'$ і $C'D'$ прямої a. За доведеним раніше, $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{A_1B_1}{CD}$. Але $AB = A_1B_1$, і тому $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$, що й треба було довести.

Тепер розглянемо той випадок, коли відрізок AB лежить на прямій a_1, відрізок CD - на прямій a_2, $a_1 \| a_2$ але площина β, що містить паралельні прямі a_1 і a_2, не є паралельною до прямої l, яка задає напрямок паралельного проектування. За теоремою 3.9., у цьому випадку прямі a_2 проектуються, відповідно, у прямі a_1' і a_2', $a_1' \| a_2'$. Нехай точка A проектується у точку A', точка B - у точку B', точка C - у точку C', точка

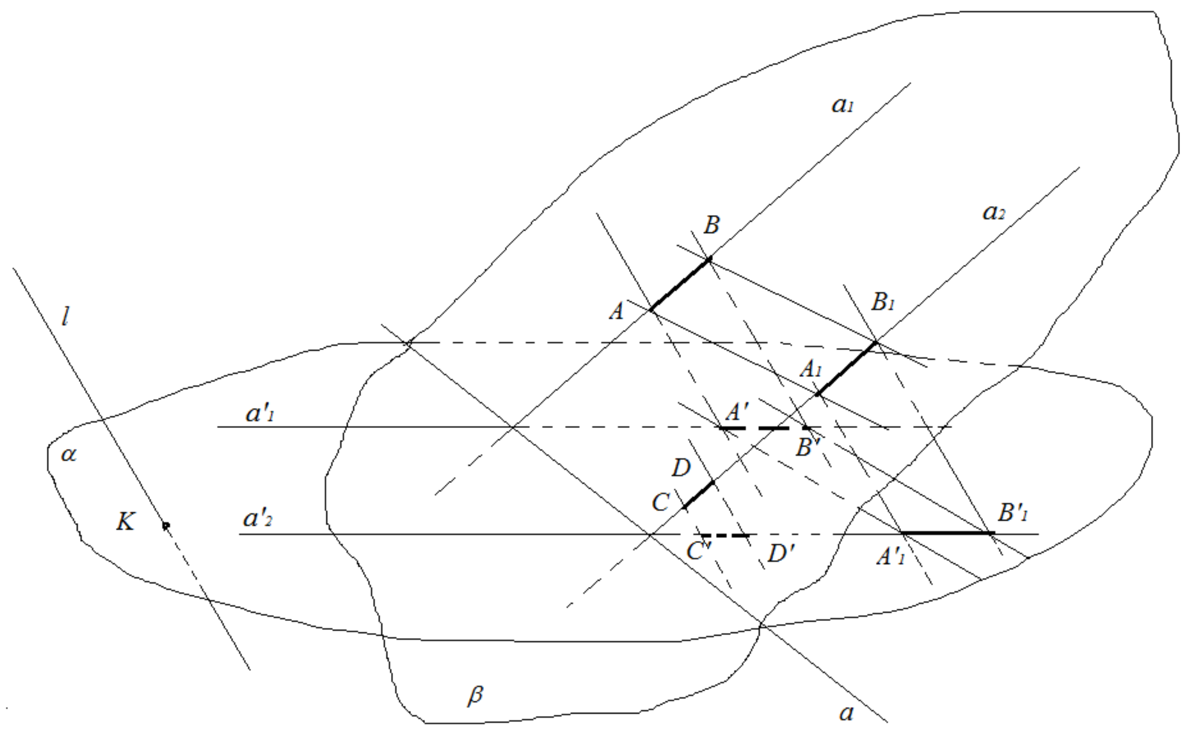


Рис.64

D - у точку D', відрізок AB проектується у відрізок $A'B'$, відрізок CD - у відрізок $C'D'$. Зрозуміло, що $A' \in a'_1$, $B' \in a'_1$, $C' \in a'_2$, $D' \in a'_2$. У площині β через точки A і B проведено паралельні прямі b_1 і b_2 $(b_1 \| b_2)$. Ці прямі перетнуть пряму a_2, відповідно у точках A_1 і B_1, чотирикутник ABB_1A_1 буде паралелограмом, $AB = A_1B_1$. Нехай точка A_1 проектується у точку A_1', а точка B_1 - у точку B_1'. Зрозуміло, що $A_1' \in a'_2$, $B_1' \in a'_2$, пряма b_1 проектується у пряму $A'A_1'$, пряма b_2 - у пряму $B'B_1'$, відрізок A_1B_1 проектується у відрізок $A_1'B_1'$, чотирикутник $A'B'B_1'A_1'$ є паралелограмом, $A'B' = A'_1B'_1$. Відрізки A_1B_1 і CD належать прямій a_2 і проектуються, відповідно, у відрізки $A'_1B'_1$ і $C'D'$ прямої a'_2. За доведеним раніше, $\dfrac{A_1'B_1'}{C'D'} = \dfrac{A_1B_1}{CD}$. Але $A_1'B_1' = A'B'$, $A_1B_1 = AB$. Тому $\dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{AB}{CD}$, що й треба було довести. Рис. 64 ілюструє проведені міркування у випадку, коли площина β перетинає площину *α*. ■

Гомотетія є окремим видом перетворення подібності евклідового простору (див., наприклад, [14]). Найчастіше гомотетія задається точкою, яку називають **центром гомотетії** і, як правило, позначають буквою О, і відмінним від нуля числом k $(k \neq 0)$, яке називають **коефіцієнтом гомотетії**. «На мові векторів» при гомотетіїї h з центром у точці О і коефіцієнтом k кожна точка M евклідового простору переходить у таку точку M_1 цього простору $(h(M) = M_1)$, що $\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}$. Із останньої рівності миттєво випливає, що при будь-якій гомотетії h точки O, M і M_1 лежать на одній прямій, якщо $k > 0$, то точки M і M_1 належать одному променю з початком у точці О, якщо $k < 0$, то ці точки належать взаємно доповняльним променям з початком у точці О (рис. 65*a* і 65*b*).

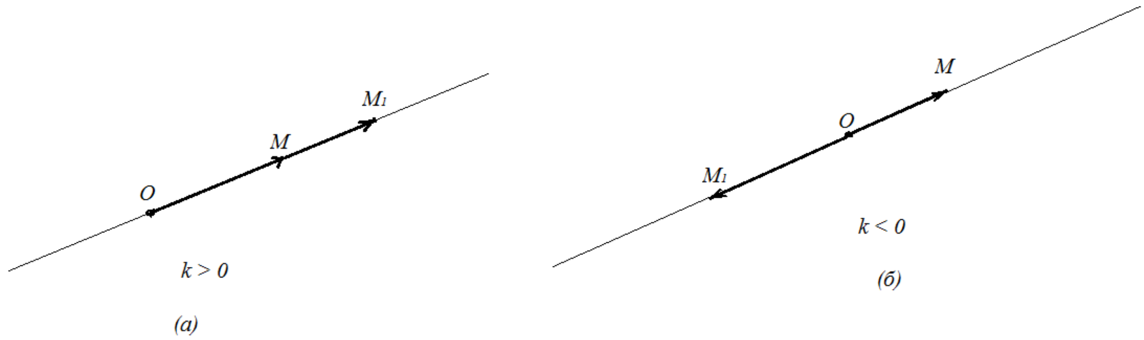


Рис.65

Якщо точка O належить певній площині β, то звуження гомотетії h на множину точок площини β утворює гомотетію h_1 площини β. Гомотетію h

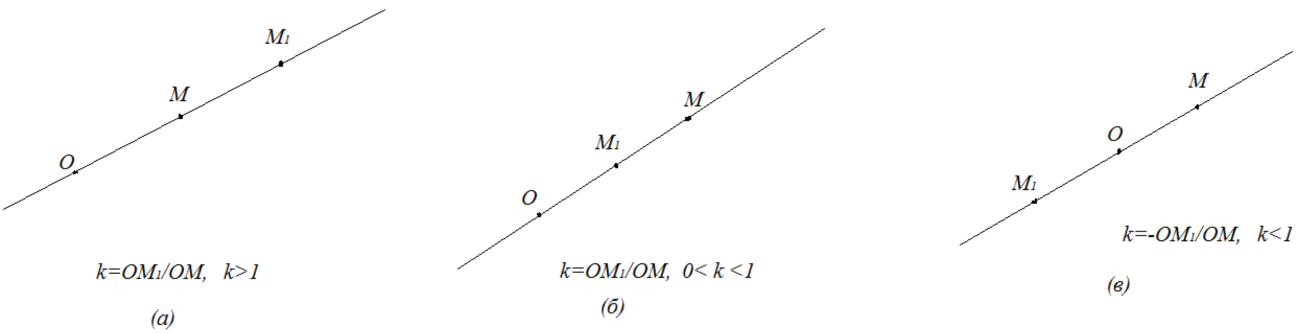


Рис.66

можна задати і геометрично, за допомогою центра гомотетії O і такої пари точок M і M_1, що жодна з них не співпадає з точкою O ($M \neq 0$, $M_1 \neq 0$). Точки O, M і M_1 повинні лежати на одній прямій. Якщо точка M_1 співпадає з точкою M, то вважають, що гомотетія h є тотожнім перетворенням евклідового простору. Якщо точки M і M_1 є різними, на прямій MM_1 розташовані по один бік від точки O, за коефіцієнт гомотетії h приймають додатнє число $k = \dfrac{OM_1}{OM}$. Так, на рис. 66a $k > 1$, на рис. 66b $0 < k < 1$. Якщо точки M і M_1 на прямій MM_1 розташовані по різні сторони від точки 0, за коефіцієнт гомотетії h приймають від'ємне число $k = -\dfrac{OM_1}{OM}$ (рис. 66*в*).

Зрозуміло, що векторний і геометричний способи задання гомотетії h є цілком рівносильними.

У випадку, коли гомотетію h задано геометрично, за допомогою центра O і пари відповідних точок M і M_1 ($h(M) = M_1$), образ при гомотетії h довільної точки N простору можна знайти геометрично наступним чином.

Якщо точка не лежить на прямій MM_1, проводять прямі ON, MN і

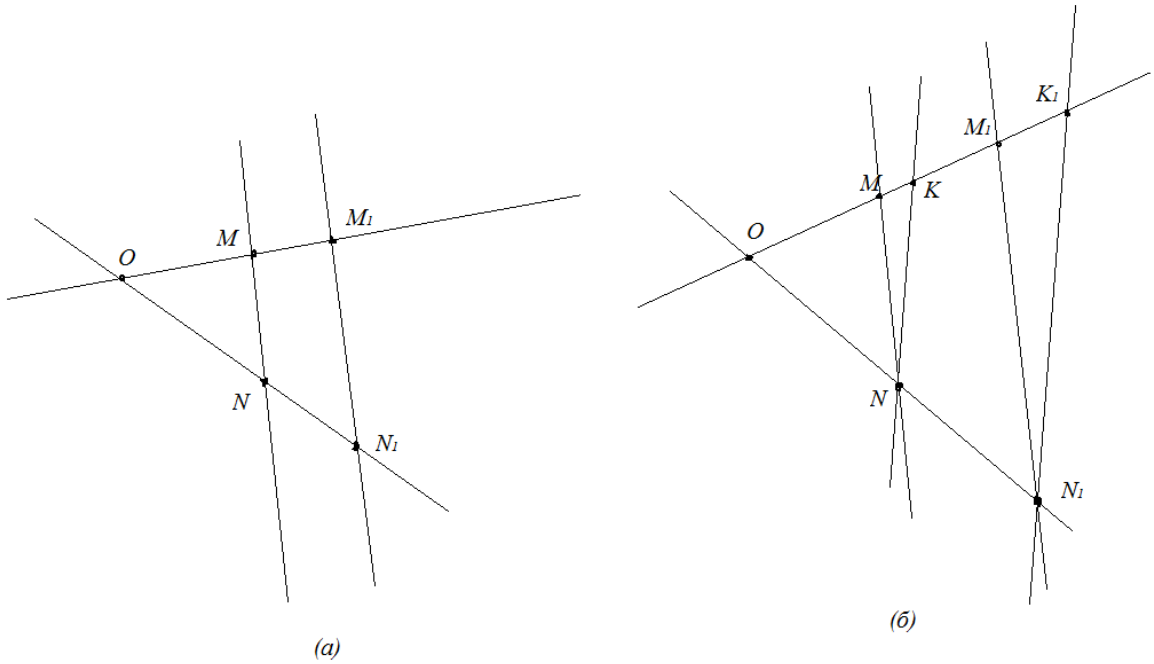


Рис.67

$M_1N_1 \parallel MN$ (рис. 67*а,* наприклад). Точка $N_1 = ON \cap M_1N_1$. За теоремою Фалеса, $\dfrac{ON_1}{ON} = \dfrac{OM_1}{OM}$ і тому $h(N) = N_1$. Якщо точка K лежить на прямій MM_1, то спочатку будують образ N_1 довільної точки $N \notin MM_1$, а вже потім, за допомогою точок N і N_1, точку $K_1 = h(K)$ ($K \notin NN_1$) (рис. 67*б,* наприклад).

Теорема 3.11. *При паралельному проектуванні гомотетичні фігури проектуються у гомотетичні фігури з тим же самим значенням коефіцієнта гомотетії.*

Доведення. □ Нехай для геометричних фігур F і F_1 евклідового простору існує така гомотетія h з центром у точці О і коефіцієнтом k, що $h(F) = F_1$. Розглянемо паралельне проектування f на картинну площину α у напрямку прямої $l(l \not\subset \alpha,\ l \nparallel \alpha)$. Нехай $f(O) = O'$, $f(F) = F'$, $f(F_1) = F_1'$.

На площині α розглянемо гомотетію h' з центром у точці O' і коефіцієнтом k. Якщо точка $M' \in F'$, то існує принаймні одна точка M фігури F, що $f(M) = M'$, $h(M) = M_1$, $M_1 \in F_1$, $f(M_1) = M_1'$, $M_1' \in F_1'$. Покажемо, що $M_1' = h'(M')$ (див. на схему рис. 66). Якщо точка M співпадає з точкою О, то $M' \equiv O'$, $M_1 \equiv O$, $f(M_1) = f(O) = O'$, $h'(M') = h'(O') = O' = M_1'$.

Нехай точка M не співпадає з точкою O. Тоді існує пряма OM. Якщо $OM \parallel l$, то $M' = f(M) = f(O) = O'$, $M_1 = h(M) \in OM$; $f(M_1) = f(O) = O'$; $h'(M') = h'(O') = O' = M_1'$. Розглянемо тепер випадок, коли пряма OM не є

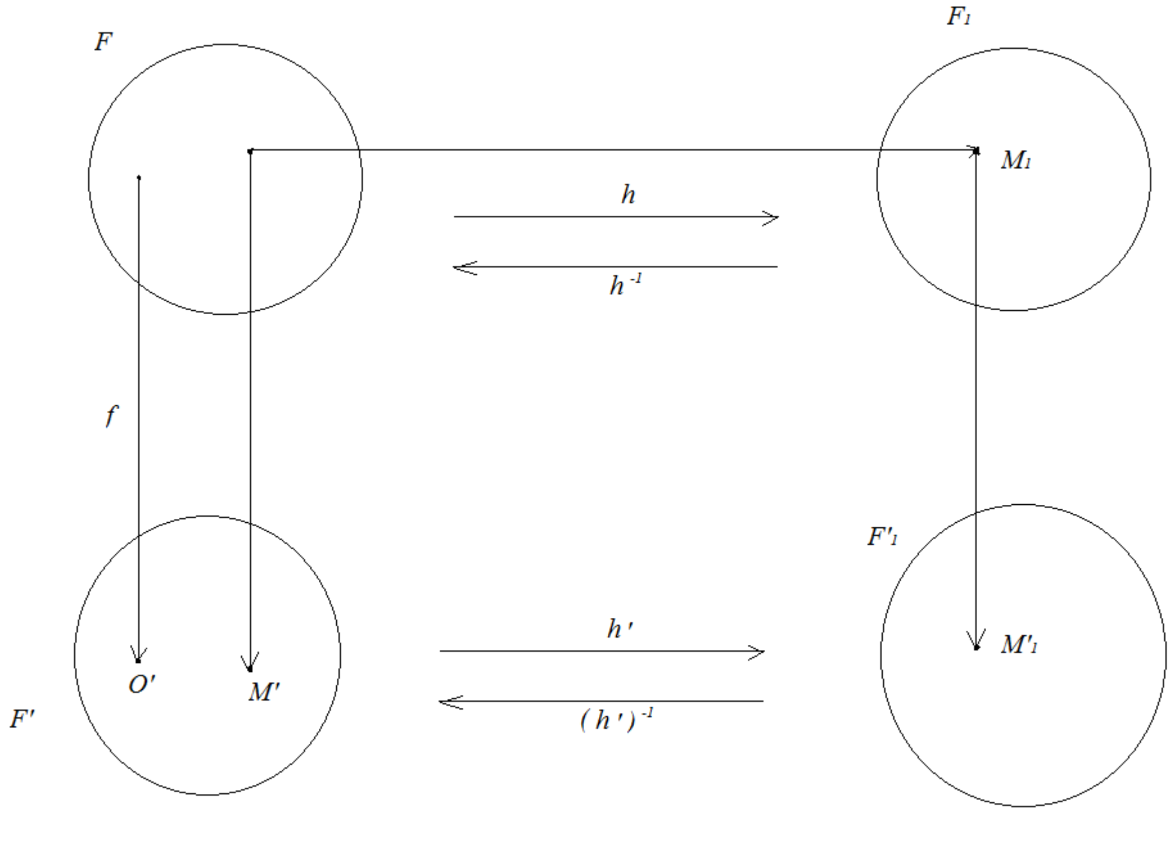


Рис.68

паралельною до прямої l. У випадку, коли $0 < k$, $h(M) = M_1$, точка M_1

належить променю OM , $OM_1 = k \cdot OM$. З іншого боку $f(O) = O'$, $f(M) = M'$, промінь OM проектується у промінь $O'M'$, проектування для променя OM є невиродженим. $f(M_1) = M_1'$. Оскільки при невиродженому паралельному проектуванні проекцією променя є промінь, точка M_1' належить променю $O'M'$. Згідно теореми 3.9, зберігається відношення довжин відрізків, які належать одній прямій. Тому $\dfrac{O'M_1'}{O'M'} = \dfrac{OM_1}{OM} = k$, $O'M' = k \cdot O'M'$, $h'(M') = M_1'$. У випадку $0 > k$ міркування є аналогічними. Тільки треба розглядати промінь, доповняльний до променя OM. Таким чином, обґрунтовано, що $h'(F') \subset F_1'$.

З іншого боку, гомотетія має той самий центр О, коефіцієнт $q = \dfrac{1}{k}$, $h^{-1}(F_1) = F$. Тому за допомогою аналогічних міркувань легко отримати, що гомотетія h^{-1} на картинній площині α індукує гомотетію з центром у точці O' і коефіцієнтом $q = \dfrac{1}{k}$, тобто, гомотетію $\left(h'\right)^{-1}$ обернену до гомотетії h' і $\left(h'\right)^{-1}\left(F_1'\right) \subset F'$. Але це означає, що для кожної точки $P_1' \in F_1'$ точка $P' = \left(h'\right)^{-1}\left(P_1'\right)$, для якої $h'(P') = P_1$, належить фігурі F', гомотетія h' відображає фігуру F' на фігуру F_1', що й треба було довести. ■

Справедливість теорем 3.2, 3.3, 3.4 і 3.10 свідчить про те, що паралельне проектування евклідового простору на картинну площину у напрямку прямої є **лінійним відображенням евклідового простору** на площину [26]. Невироджене паралельне проектування площини на площину є бієктивним **лінійним відображенням площини на площину**, тобто, **афінним відображенням площини на площину**. Невироджене паралельне проектування прямої на картинну площину є бієктивним лінійним відображенням прямої на пряму, що є образом прямої при даному проектуванні, **афінним відображенням прямої**. Отже, всі властивості

лінійних відображень евклідового простору та його відповідних підмножин є властивостями і паралельного проектування.

У даному параграфі доведення теорем 3.3 – 3.11 проведені методами елементарної геометрії. Застосування методу координат та методів векторної алгебри дозволило би скоротити відповідні міркування принаймні завдяки зменшенню кількості випадків, що підлягають розгляданню. При цьому, як правило, при застосуванні методу координат, у евклідовому просторі доцільно обирати афінну систему координат так, щоб координатна площина співпадала би з картинною площиною, а вісь була би паралельною до прямої, яка задає напрямок проектування.

Виключне використання методів елементарної геометрії для проведення вищевказаних доведень пояснюється бажанням того, щоб відповідні доведення виявилися би доступними вже для учнів десятих класів старшої середньої школи.

Питання і завдання для самоконтролю до §3.

3.1. Охарактеризуйте апарат методу паралельного проектування зображення на площині фігур евклідової геометрії.

3.2. Яка геометрична фігура задає напрямок проектування за методом паралельного проектування?

3.3. У випадку, якого апарату паралельне проектування називається ортогональним?

3.4. Що називається проекцією точки M на площину α у напрямку прямої l? Як знаходиться така проекція?

3.5. Що називається проекцією геометричної фігури F на площину α у напрямку прямої l? Як знаходиться така проекція?

3.6. Що називається зображенням геометричної фігури F на площині α при паралельному проектуванні у напрямку прямої l?

3.7. Наведіть означення обрису проекції геометричної фігури та обрису зображення геометричної фігури.

3.8. Наведіть означення та приклади видних і невидних точок геометричних фігур при паралельному проектуванні.

3.9. Чи розрізняють при паралельному проектуванні проекції (і зображення) видних і невидних точок геометричних фігур?

3.10. Як при паралельному проектуванні розрізняють проекції (і зображення) тих ліній геометричних фігур, які складаються виключно з невидних, або виключно з видних точок?

3.11. Які властивості зображення геометричних фігур на площині за методом паралельного проектування вважають найпростішими?

3.12. Чому справедливість кожної з найпростіших властивостей зображення геометричних фігур на площині за методом паралельного проектування достатньо обґрунтувати лише для паралельної проекції відповідної геометричної фігури?

3.13. Які геометричні фігури можуть бути проекціями прямої при паралельному проектуванні? За яких умов утворюється та чи інша проекція?

3.14. Яке паралельне проектування для прямої вважається виродженим, а яке – невиродженим?

3.15. Що можна стверджувати про збереження порядку точок, які належать одній прямій, при невиродженому для даної прямої паралельному проектуванні?

3.16. Які геометричні фігури можуть бути проекціями відрізка при паралельному проектуванні? За яких умов утворюється та чи інша проекція?

3.17. Яке паралельне проектування для відрізка вважається виродженим, а яке – невиродженим?

3.18. Що можна стверджувати про проекції кінців відрізка та внутрішніх точок відрізка при невиродженому для даного відрізка паралельному проектуванні? Відповідь обгрунтуйте.

3.19. Які геометричні фігури можуть бути проекціями променя при паралельному проектуванні? За яких умов утворюється та чи інша проекція?

3.20. Яке паралельне проектування для променя вважається виродженим, а яке – невиродженим?

3.21. Що можна стверджувати про проекції початка променя та внутрішніх точок променя при невиродженому для даного променя паралельному проектуванні? Відповідь обгрунтуйте.

3.22. Які геометричні фігури можуть бути проекціями площини при паралельному проектуванні? За яких умов утворюється та чи інша проекція?

3.23. Яке паралельне проектування для площини вважається виродженим, а яке – невиродженим?

3.24. Які геометричні фігури можуть бути проекціями півплощини при паралельному проектуванні? За яких умов утворюється та чи інша проекція?

3.25. Яке паралельне проектування для півплощини вважається виродженим, а яке – невиродженим?

3.26. Що можна стверджувати про проекції точок межи півплощини та внутрішніх точок півплощини при різних варіантах паралельного проектування півплощини? Відповідь обгрунтуйте.

3.27. Які геометричні фігури можуть бути проекціями пари паралельних прямих при паралельному проектуванні? За яких умов утворюється та чи інша проекція?

3.28. Яке паралельне проектування для пари паралельних прямих вважається виродженим, а яке – невиродженим?

3.29. Що при паралельному проектуванні відомо про відношення довжин проекцій відрізків, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих?

3.30. Яке перетворення евклідового простору називається гомотетією?

3.31. Чи є гомотетія евклідового простору перетворенням подібності евклідового простору? Відповідь обгрунтуйте.

3.32. Яке перетворення евклідової площини називається гомотетією?

3.33. Як пов’язані між собою гомотетія евклідового простору і гомотетія площини у евклідовому просторі?

3.34. Як гомотетія евклідового простору задається геометрично? Відповідь обгрунтуйте.

3.35. У якому випадку дві геометричні фігури евклідового простору називаються гомотетичними?

3.36. Що можна стверджувати про зображення гомотетичних між собою фігур евклідового простору при паралельному проектуванні?

3.37. Яке відображення евклідового простору називається лінійним?

3.38. Чому невироджене паралельне проектування площини β на площину α є афінним відображенням площини β на площину α?

Практичні завдання для самостійного розв’язання до розділу І

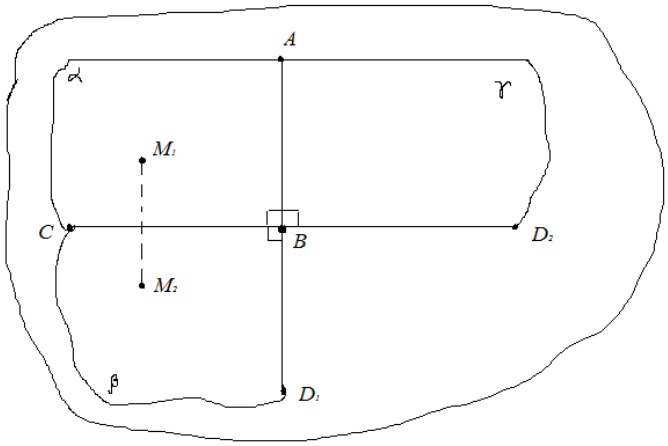


Рис.69

1. На картинній площині за методом Монжа побудовані ортогональні проекції M_1 і M_2 певної точки M евклідового простору, відповідно, на вертикальну площину α і на горизонтальну площину β (рис. 69).

Спираючись на рис. 70:

1) доведіть, що пряма M_1M_2 картинної площини є паралельною до прямої AB перетину вертикальної площини α і профільної площини γ;

2) обґрунтуйте правильність виконаної на рис. 71 побудови ортогональної проекції M_3 точки M на профільну площину γ: проводимо $M_1P \perp AB$, $M_2Q \perp AB$; на BD_2 відкладаємо відрізок $BK = BQ$; проводимо $TK \perp BD_2$; знаходимо $M_3 = M_1P \cap KT$.

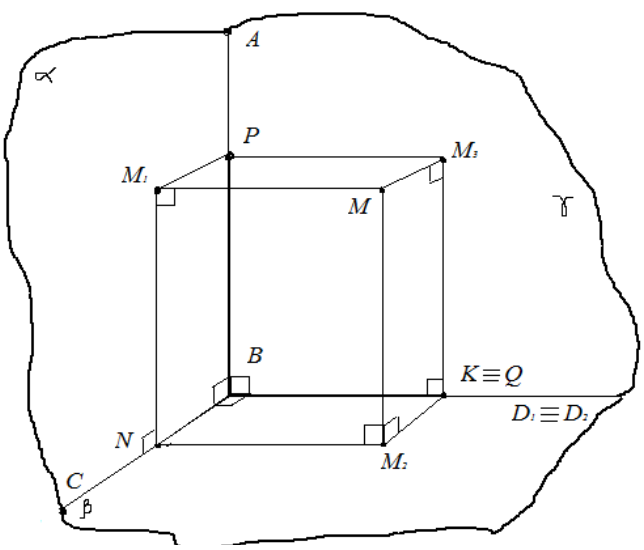


Рис.70

2. На картинній площині за методом Монжа побудовані ортогональні проекції M_1 і M_3 певної точки M евклідового простору відповідно на вертикальну площину α і на горизонтальну площину β (рис. 72).

Спираючись на рис. 66:

1) доведіть, що пряма M_1M_3 картинної площини є паралельною до прямої BC перетину вертикальної площини α і горизонтальної площини β;

2) обґрунтуйте правильність виконаної на рис. 73 побудови ортогональної проекції M_2 точки M на горизонтальну площину β: проводимо

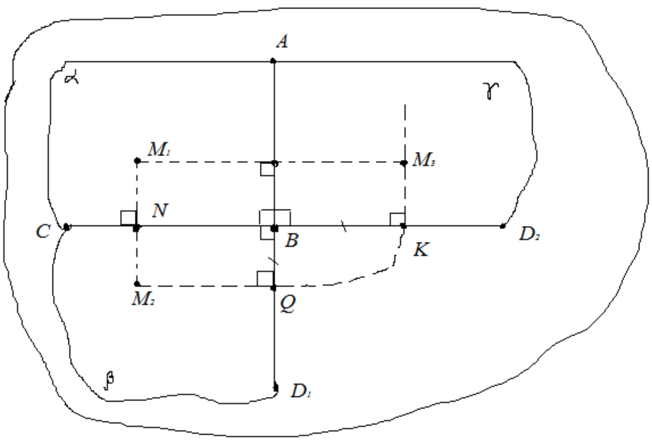


Рис.71

$M_1N \perp BC$, $M_3K \perp BD_2$; на BD_1 відкладаємо відрізок $BQ = BK$; проводимо $QT \perp BD_1$; знаходимо $M_2 = M_1N \cap QT$.

3. На картинній площині за методом Монжа побудовані ортогональні проекції M_2 і M_3 певної точки M евклідового простору, відповідно, на горизонтальну площину β і на профільну площину γ (рис. 74).

Позначимо через AB пряму перетину вертикальної площини і профільної площини γ, через BC — пряму перетину вертикальної площини α і горизонтальної площини β. Проведемо $M_2Q \perp AB$, $M_3K \perp BC$. Спираючись на рис. 70:

1) доведіть, що $BQ = BK$;

2) обґрунтуйте правильність виконаної на рис. 71 побудови ортогональної проекції M_1 точки M на вертикальну площину α: проводимо $M_2N \perp BC$, $M_3P \perp AB$; знаходимо $M_1 = M_2N \cap M_3P$.

4. Обґрунтуйте, що за зображенням $\{M_1;\ M_2;\ M_3\}$ точки M евклідового простору за методом Монжа

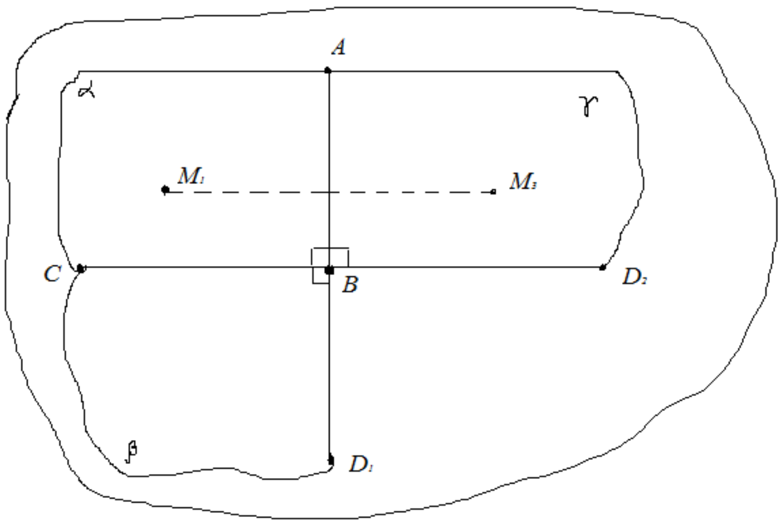


Рис.72

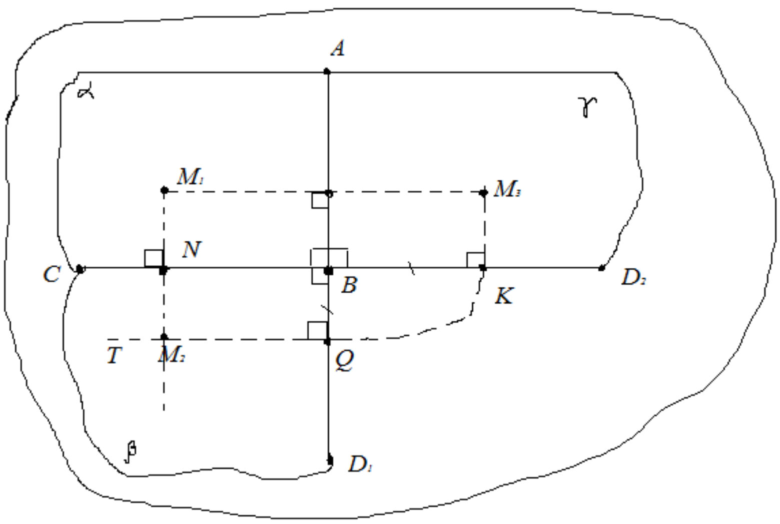


Рис.73

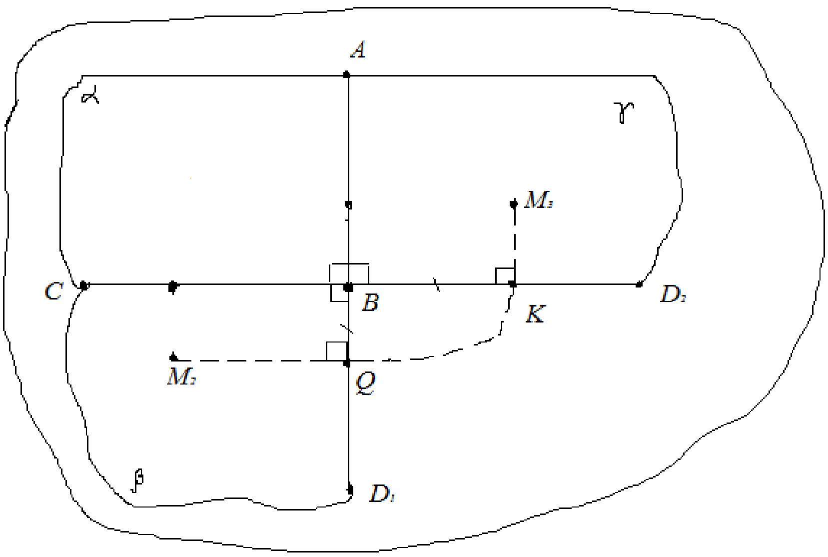


Рис.74

(рис. 75) можна однозначно відновити оригінал.

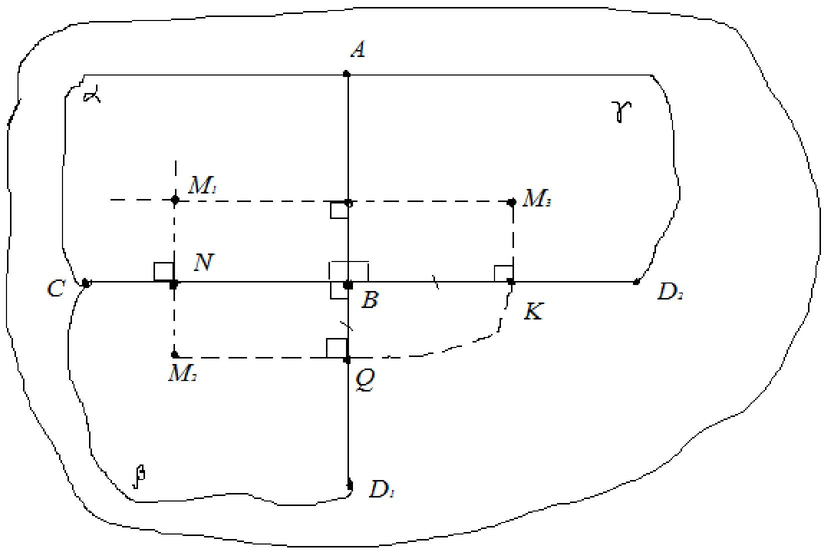


Рис.75

5. Центральне проектування задане за допомогою точки зору A і картинної площини α $(A \notin \alpha)$, точки M і N та точка зору A розташовані по різні сторони відносно картинної площини *α*, пряма *MN* є паралельною до площини *α*, точка M' є проекцією точки M на площину α із точки A, точка N' — аналогічною проекцією точки N (рис. 76). Доведіть, що: 1) пряма $M'N'$ є паралельною до прямої MN; 2) відрізок $M'N'$ є меншим за відрізок MN.

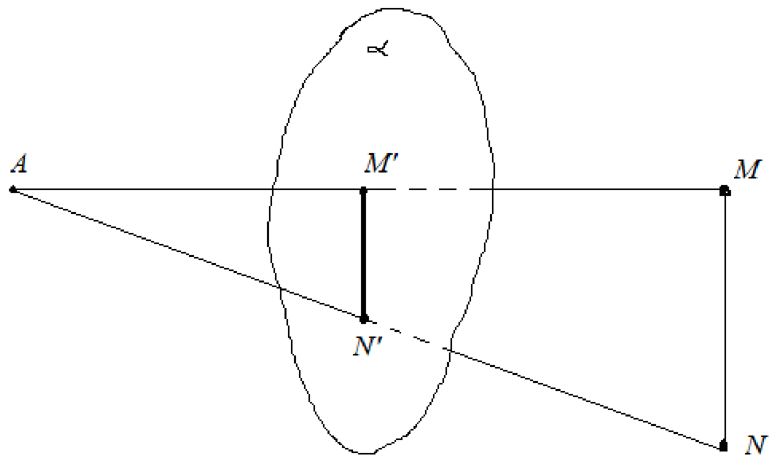


Рис.76

6. Нехай пара точок $\{M'; M_1'\}$ на картинній площині α утворює зображення певної точки M евклідового простору за методом лінійної перспективи. Обґрунтуйте, що пряма $M'M_1'$ є перпендикулярною до основи картини.

7. Обґрунтуйте, що за зображенням $\{M'; M_1'\}$ точки M евклідового простору за методом лінійної перспективи можна однозначно відновити оригінал з точністю до симетрії відносно картинної площини α. (Зрозуміло, що картинна площина α, одночасно з точками M' і M_1', містить основу картини h, лінію горизонту h' і головну точку B' картини, $M_1' \notin h'$).

8. Обґрунтуйте, що за зображенням точки M евклідового простору за методом Федорова можна однозначно відновити оригінал.

9. Опишіть вид зображення за методом Федорова 1) прямої, паралельної до картинної площини; 2) прямої, що перетинає картинну площину; 3) кола, площина якого є паралельною до картинної площини.

10. Чи можна вважати довільну задану точку M' картинної площини паралельною проекцією довільної заданої точки M евклідового простору при певному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

11. Чи можна вважати довільну задану точку M' картинної площини паралельною проекцією довільної заданої точки, яка не належить картинній площині при певному паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

12. Чи можна вважати довільну задану точку M' картинної площини зображенням довільної заданої точки евклідового простору при певному паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

13. Визначіть і обґрунтуйте, які геометричні фігури і за яких обставин можуть бути паралельними проекціями пари точок.

14. Визначить і обґрунтуйте, які геометричні фігури і за яких обставин можуть бути паралельними проекціями трьох різних точок, що 1) лежать на одній прямій; 2) не лежать на одній прямій.

15. Чи можна вважати довільну задану точку M' картинної площини паралельною проекцією довільної заданої прямої при певному паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

16. Чи можна вважати довільну задану точку M' картинної площини зображенням довільної заданої прямої при певному паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

17. Апарат паралельного проектування фіксовано. Вкажіть множину тих та тільки тих точок евклідового простору, які при даному паралельному проектуванні проектуються у певну точку M' картинної площини. Відповідь обґрунтуйте.

18. Картинну площину фіксовано. Напрямок паралельного проектування є невідомим. Про які прямі евклідового простору наперед відомо, що їх паралельні проекції на дану площину не є виродженими? Відповідь обґрунтуйте.

19. Апарат паралельного проектування фіксовано. Знайдіть критерій того, що задана пряма a' картинної площини є паралельною проекцією заданої прямої a евклідового простору при певному паралельному проектуванні. Відповідь обґрунтуйте.

20. Картинну площину фіксовано. Чи можна вважати довільну задану пряму a' цієї площини зображенням довільної заданої прямої a евклідового простору при певному паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

21. Пряма a' є паралельною проекцією прямої a на площину α у напрямку прямої l. Вкажіть всі можливі апарати паралельного проектування, при яких пряма a буде паралельною проекцією прямої a'.

22. Задано пряму a, точку $A \in a$ і пряму a'. Відомо, що пряма a' є зображенням прямої a при певному паралельному проектуванні. Вкажіть можливі положення зображення A' точки A при даному паралельному проектуванні.

23. Апарат паралельного проектування фіксовано. Знайдіть критерії того, що при цьому паралельному проектуванні заданий промінь h' картинної площини є паралельною проекцією заданого променя h евклідового простору. Відповідь обґрунтуйте.

24. Картинну площину фіксовано. Чи можна вважати довільний заданий промінь h' цієї площини зображенням довільного заданого променя h евклідового простору при певному паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

25. Картинну площину фіксовано. Чи можна вважати довільну фіксовану точку цієї площини зображенням довільного заданого променя евклідового простору при певному паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

26. Знайдіть критерій того, що при паралельному проектуванні проекцією двох різних променів є один промінь. Відповідь обґрунтуйте.

27. Задано пряму a, промінь h, що лежить на цій прямій, і пряму a'. Відомо, що пряма a' є зображенням прямої a при певному паралельному проектуванні. Вкажіть можливі варіанти зображення променя h при даному паралельному проектуванні.

28. Обрано довільні відрізки AB і $A'B'$. Чи можна стверджувати, що відрізок $A'B'$ є проекцією відрізка AB при певному паралельному проектуванні?

29. Картинну площину фіксовано. Чи є справедливим твердження про те, що будь-який відрізок $A'B'$ цієї площини може бути зображенням будь-якого відрізка AB евклідового простору при певному паралельному проектуванні на дану площину? Відповідь обґрунтуйте.

30. Задано пряму a, точки $A \in a$, $B \in a$, $A \neq B$, пряму a' і точку $A' \in a'$. Відомо, що пряма a' і точка A' є зображеннями, відповідно, прямої a і точки A при певному паралельному проектуванні. Вкажіть можливі зображення B' точки B при даному паралельному проектуванні.

31. Апарат паралельного проектування фіксовано. Відомо, що відрізок $A'B'$ картинної площини при даному паралельному проектуванні є проекцією відрізка AB евклідового простору. Що можна стверджувати про співвідношення між довжинами відрізків AB і $A'B'$? Відповідь обґрунтуйте.

32. Картинну площину α і відрізок $A'B'$ на ній фіксовано. Відомо, що оригіналом для відрізка $A'B'$ при паралельному проектуванні на площину α є відрізок AB. Що можна стверджувати про можливу довжину відрізка AB і його розташування у евклідовому просторі? Відповідь обґрунтуйте.

33. Відомо, що при певному паралельному проектуванні паралельні прямі a і b проектуються у паралельні прямі a' і b' картинної площини. Як при такому проектуванні може змінитися відстань між прямими a і b? Відповідь обґрунтуйте.

34. Які геометричні фігури можуть бути паралельними проекціями на картинну площину двох прямих, що перетинаються? Відповідь обґрунтуйте. У кожному з можливих випадків вкажіть відповідні особливості розташування даних прямих відносно апарату проектування.

35. Які геометричні фігури можуть бути паралельними проекціями на картинну площину двох мимобіжних прямих? Відповідь обґрунтуйте. У кожному з можливих випадків вкажіть відповідні особливості розташування даних прямих відносно апарату проектування.

36. Прямі $a\,i\,b$ є мимобіжними. Чи можна обрати картинну площину α так, щоб при будь-якому виборі прямої l, що задає напрямок проектування, проекції $a'\,i\,b'$ цих прямих перетиналися би у одній точці?

37. Обґрунтуйте, що зображення прямої у вигляді прямої при паралельному проектуванні є подібно повним.

38. Обґрунтуйте, що зображення прямої у вигляді прямої при паралельному проектуванні не є метрично повним.

39. Відомо, що задана пряма a' картинної площини є зображенням заданої прямої a при певному паралельному проектуванні. Точки A, B, M є точками прямої a, точка M лежить між точками $A\,i\,B$. Точки $A'\,i\,B'$ є зображеннями, відповідно, точок $A\,i\,B$ при даному паралельному проектуванні. Обґрунтуйте, як за допомогою циркуля і лінійки побудувати зображення M' точки M.

40. Відомо, що задана пряма a' картинної площини є зображенням заданої прямої a при певному паралельному проектуванні. Точки A, B, M є точками прямої a, точка B лежить між точками $A\,i\,M$. Точки $A'\,i\,B'$ є зображеннями, відповідно, точок $A\,i\,B$ при даному паралельному проектуванні. Обґрунтуйте, як за допомогою циркуля і лінійки побудувати зображення M' точки M.

Тестові завдання для самоконтролю до розділу I

1. Серед наведених тверджень вкажіть **вірні**

I. Вчені не є одностайними у тому, який зміст несли зображення предметів оточуючого середовища на початку існування людства.

II. Всі вчені вважають, що на початку існування людства зображення предметів оточуючого середовища носили суто релігійний характер.

III. Бажаність використання зображень у навчально-виховному процесі була усвідомлена людством ще у далекій давнині.

IV. Використання зображень у навчально-виховному процесі є однією з нових інформаційних технологій XXI століття.

А	Б	В	Г
I і IV	I, III і IV	I і III	II, III, IV

2. Серед наведених тверджень вкажіть **невірні**

I. Евклідова геометрія – це аксіоматична теорія, розробку якої започаткував давньогрецький вчений Евклід.

II. Евклідову геометрію як аксіоматичну теорію у повному обсязі розробив давньогрецький вчений Евклід.

III. До недавнього часу у середніх школах України найбільш поширеною була аксіоматика О. В. Погорелова евклідової геометрії.

IV. До недавнього часу у середніх школах України найбільш поширеною була аксіоматика Г.П. Бевза евклідової геометрії.

А	Б	В	Г
I і III	II і IV	Лише IV	Лише III

3. Під геометричною фігурою у евклідовій геометрії як правило розуміють

А	Б	В	Г
Довільну підмножину точок евклідового простору	Довільну замкнену підмножину точок евклідового простору	Довільну обмежену підмножину точок евклідового простору	Довільний многокутник.

4. Серед наведених тверджень вкажіть **вірні**

I. У шкільному курсі геометрії вивчають лише певні «геометричні» властивості оточуючого середовища.

II. Шкільний курс геометрії носить двоїстий характер.

III. Шкільний курс геометрії представляє собою досконалу аксіоматичну теорію.

IV. На прикладі шкільного курсу геометрії у учнів формують уяву про аксіоматичну теорію.

А	Б	В	Г
II і IV	I і IV	III і IV	Лише I

5. Серед наведених тверджень вкажіть **невірне**

I. Процес зображення фігури – це процес побудови зображень всіх її точок.

II. Геометричну фігуру F для її зображення F' називають оригіналом.

III. Кожний метод зображення геометричних фігур характеризується своїм апаратом та законом відображення.

IV. При будь-якому методі зображень зображенням точки є точка

А	Б	В	Г
IV	II	I	III

6. Для кожного початку речення доберіть вірне закінчення

I. Використання того чи іншого методу зображень…	**А**. … не обумовлено нічим
II. Слова «зображення фігури» і «проекція фігури»…	**Б.** … залежить від мети зображення.
III. Зображення фігури…	**В.** …мають різний зміст.
IV. Проекція фігури…	**Г.** …мають однаковий зміст.
	Д. …ніколи не співпадає з її проекцією
	Е. …подібне до її проекції.
	Ж. …завжди є і її зображенням.
	З.…не може бути її зображенням.

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З
I								
II								
III								
IV								

7. Серед наведених тверджень вкажіть **вірні**

I. За подібно повним зображенням можна однозначно визначити відстань між будь-якими двома точками зображеної фігури.

II. За метрично повним зображенням можна однозначно визначити відстань між будь-якими двома точками зображеної фігури.

III. За подібно повним зображенням можна однозначно визначити величину будь-якого зображеного кута.

IV. За позиційно повним зображенням можна однозначно визначити відношення довжин довільних зображених відрізків.

А	Б	В	Г
I і III	Лише IV	II і IV	II і III

8. Серед наведених тверджень вкажіть **невірне**

I. За афінно повним зображенням можна однозначно визначити характер взаємного розташування двох прямих, для кожної з яких зображено по дві точки.

II. За позиційно повним зображенням можна однозначно визначити характер взаємного розташування прямої і площини, якщо на прямій зображено дві точки, а на площині – три точки, які не належать одній прямій.

III. Метрично повні зображення дозволяють відновити оригінал з точністю до його руху як твердого тіла у просторі.

IV. Існують метрично повні зображення, що не є афінно повними.

А	Б	В	Г
I	IV	III	II

9. Встановіть відповідність між апаратом проектування і використаним методом проектування

I. Площина і точка, що належить цій площині — **А**. Метод Монжа

II. Площина і пряма, що не лежить у цій площині і не є паралельною до неї. — **Б.** Паралельне проектування.

III. Пара перпендикулярних площин і точка, що не належить жодній з них. — **В.** Метод Федорова.

IV. Три попарно перпендикулярні площини — **Г.** Метод лінійної перспективи.

Д. Центральне проектування

	А	Б	В	Г	Д
I					
II					
III					
IV					

10. Встановіть відповідність між можливим зображенням на картинній площині точки, що не належить цій площині, і використаним при цьому методом побудови зображення.

I. Точка — **А**. Метод Федорова

II. Пара точок — **Б.** Паралельне проектування.

III. Орієнтоване коло — **В.** Метод Монжа

IV. Три точки — **Г.** Метод лінійної перспективи.

	А	Б	В	Г	Д
I					
II					
III					
IV					

11. Серед наведених тверджень вкажіть **вірні**

I. При побудові зображень за методом Монжа використовують ортогональне проектування.

II. При використанні центрального проектування для певних точок будуються ортогональні проекції.

III. При побудові зображень за методом лінійної перспективи не використовують ортогональне проектування.

IV. При побудові зображень за методом Федорова використовують ортогональне проектування.

А	Б	В	Г
I, II і IV	II, III, IV	I, III, IV	I, II і III

12. Серед наведених тверджень вкажіть **невірне**

I. Зображення, отримані за методом Монжа, є подібно повними.

II. Зображення, отримані за допомогою центрального проектування, є подібно повними.

III. Зображення, отримані за методом лінійної перспективи, є подібно повними.

IV. Зображення, отримані за методом Федорова, є подібно повними.

А	Б	В	Г
I	II	III	IV.

13. Серед наведених тверджень вкажіть **вірні**

I. При фіксованому апараті проектування за методом Монжа можна побудувати зображення довільної точки простору.

II. При фіксованому апараті центрального проектування за цим методом можна побудувати зображення довільної точки простору.

III. При фіксованому апараті лінійної перспективи за цим методом можна побудувати зображення довільної точки простору.

IV. При фіксованому апараті проектування за методом Федорова можна побудувати зображення довільної точки простору.

А	Б	В	Г
III і IV	II і III	I і II	I і IV

14. Серед наведених тверджень вкажіть **невірні**

I. У апараті методу лінійної перспективи основа картини – це пряма перетину картинної площини і площини другорядних проекцій.

II. У апараті методу лінійної перспективи лінія горизонту – це пряма перетину картинної площини і площини другорядних проекцій.

III. У апараті методу лінійної перспективи лінія горизонту є паралельною до основи картини.

IV. У апараті методу лінійної перспективи головна точка картини належить лінії горизонту.

А	Б	В	Г
I і II	III і IV	II і IV	I і III

15. Серед наведених тверджень вкажіть **вірні**

I. Більшість методів побудови зображень просторових фігур на площині у евклідовій геометрії сформувалися як математичні абстракції відповідних практичних дій людей по зображенню на плоских поверхнях об’єктів оточуючого середовища.

II. Метод Федорова зображень просторових фігур на площині сформувався у зв’язку з потребами кристалографії.

III. Метод Федорова у своїй практичній діяльності використовують лікарі-ренгенологи.

IV. Метод центрального проектування часто використовують художники-натуралісти.

А	Б	В	Г
I, II, IV	II, III, IV	I, III, IV	I, II, III

16. Для кожного початку речення доберіть вірне закінчення

I. Зображення просторової фігури евклідової геометрії є вірним…

II. Напрям живопису, присвячений зображенню «неможливих» фігур, має назву…

III. Зображення просторових фігур називається наочним…

IV. Зображення просторової фігури вважається тим більш простим, чим…

V. Зображення просторової фігури вважається тим більш інформативним, чим…

А. …якщо у евклідовій геометрії для нього існує оригінал.

Б. …імпресіонізм.

В. … імпосібіліонізм.

Г. ... швидше можна побудувати зображення і обґрунтувати його правильність.

Д. … більше властивостей зображеної фігури можна за цим зображенням встановити.

Е. …якщо воно справляє на глядача те ж саме враження, що й оригінал**.**

	А	Б	В	Г	Д	Е
I						
II						
III						
IV						
V						

17. У сукупності вимоги вірності, простоти, наочності і інформативності найкращим чином задовольняє метод

А	Б	В	Г
центрального проектування	паралельного проектування	лінійної перспективи	Монжа

18. Апарат методу паралельного проектування утворюють

А	Б	В	Г
певна площина і пряма, яка не паралельна до цієї площини	довільна площина і довільна пряма	певна площина і пряма, що не лежить у цій площині	певна площина і пряма, яка не лежить у цій площині і не є паралельною до неї.

19. Які з наведених тверджень є **вірними**?

I. Проекцією точки при паралельному проектуванні завжди є точка.

II. Проекцією прямої при паралельному проектуванні завжди є пряма.

III. Проекцією прямої при паралельному проектуванні завжди є точка.

IV. Проекцією прямої при паралельному проектуванні може бути точка.

А	Б	В	Г
I і IV	I і II	I і III	Лише I.

20. Які з наведених тверджень **не є вірними**?

I. Паралельне проектування, при якому пряма проектується у точку, для даної прямої вважається виродженим.

II. Паралельне проектування, при якому пряма проектується у пряму, для даної прямої вважається невиродженим.

III. При кожному паралельному проектуванні прямої зберігається порядок точок, що лежать на цій прямій.

IV. При невиродженому для даної прямої паралельному проектуванні може змінюватися порядок точок, що лежать на цій прямій.

А	Б	В	Г
I і III	I і II	III і IV	II і III

21. Які з наведених тверджень **є вірними**?

I. Паралельною проекцією відрізка може бути точка.

II. При невиродженому для даного відрізка паралельному проектуванні встановлюється взаємно однозначна відповідність між відрізком-проекцією і відрізком-оригіналом.

III. Паралельною проекцією відрізка може бути пряма.

IV. Паралельною проекцією відрізка може бути промінь.

А	Б	В	Г
I і III	I і II	II і IV	III і IV

22. Яка з наступних геометричних фігур може бути паралельною проекцією променя при паралельному проектуванні?

А	Б	В	Г
Точка	Відрізок	Пряма	Пара точок

23.Які з наступних тверджень **не є вірними**?

I. Будь-яка пряма картинної площини може бути проекцією будь-якої прямої простору при певному паралельному проектуванні.

II. Будь-яка пряма картинної площини може бути зображенням будь-якої прямої простору при певному паралельному проектуванні.

III. Будь-яка точка картинної площини може бути зображенням будь-якої прямої при певному паралельному проектуванні.

IV. Будь-яка точка картинної площини може бути проекцією будь-якої прямої при певному паралельному проектуванні.

А	Б	В	Г
I, II, III	II, III, IV	I, III, IV	I, II, IV

24.Які з наступних тверджень **є вірними**?

I. Проекцією площини при паралельному проектуванні може бути лише площина.

II. Проекцією площини при паралельному проектуванні може бути пряма.

III. Проекцією площини при паралельному проектуванні може бути площина.

IV. Проекцією площини при паралельному проектуванні може бути промінь.

А	Б	В	Г
II і IV	II і III	Лише I	III і IV

25.При невиродженому для даної півплощини паралельному проектуванні її проекцією є

А	Б	В	Г
промінь	відрізок	пряма	півплощина

26.Проекцією пари паралельних прямих при паралельному проектуванні **не може бути**

А	Б	В	Г
пара точок	одна точка	одна пряма	пара прямих

27.Які з наступних тверджень **не є вірними**?

I. Паралельною проекцією пари прямих може бути лише пара прямих.

II. Паралельною проекцією пари прямих не може бути пряма і точка, що цій прямій не належить.

III. Паралельною проекцією пари прямих може бути пряма і точка, що цій прямій належить.

IV. Паралельною проекцією пари прямих, що не є паралельними, може бути одна пряма.

А	Б	В	Г
I і II	I і III	II і IV	III і IV

28. Встановіть відповідність між геометричною фігурою і її проекцією при невироджному для даної фігури паралельному проектуванні

I. Пряма
II. Відрізок
III. Промінь
IV. Площина

А. Відрізок
Б. Точка
В. Пряма
Г. Площина
Д. промінь

	А	Б	В	Г	Д
I					
II					
III					
IV					

29. Які з наведених тверджень **є вірними**?

I. При паралельному проектуванні завжди зберігається відношення довжин відрізків.

II. При паралельному проектуванні завжди зберігається відношення довжин відрізків, які лежать на одній прямій.

III. При невиродженому для прямої паралельному проектуванні зберігається відношення довжин відрізків, що цій прямій належать.

IV. Зображення прямої у вигляді прямої при паралельному проектуванні є подібно повним.

А	Б	В	Г
I і III	II і IV	III і IV	I і IV

30. Які з наведених тверджень **не є вірними**?

I. При паралельному проектуванні завжди зберігається відношення довжин відрізків, які лежать на мимобіжних прямих.

II. При паралельному проектуванні завжди зберігається відношення довжин відрізків, які лежать на паралельних прямих.

III. При паралельному проектуванні зберігається відношення довжин відрізків, які лежать на паралельних прямих, і випадку, коли проекцією даних прямих є одна пряма.

IV. При паралельному проектуванні зберігається відношення довжин відрізків, які лежать на паралельних прямих, і випадку, коли проекцією даних прямих є паралельні прямі.

А	Б	В	Г
I і III	II, III, IV	I і IV	I і II

Розділ II.
Зображення плоских геометричних фігур за допомогою паралельного проектування

§ 4. Загальні положення. Зображення трикутників при паралельному проектуванні

Фігуру F евклідової геометрії називають **лінійною**, якщо існує пряма, якій належать всі точки цієї фігури. Для **лінійної геометричної фігури паралельне проектування** вважають **виродженим** у випадку, коли воно є виродженим для прямої, що цю фігуру містить (Тобто, тоді, коли пряма, яка містить фігуру F, є паралельною до прямої, що задає напрямок проектування, проектується у точку). Проекцією лінійної фігури F у даному випадку, зрозуміло, буде ця точка. Тоді ж, коли пряма, що містить лінійну фігуру F, проектується у пряму, проектування для фігури F вважається **невиродженим**.

Геометричну фігуру F називають **плоскою**, якщо існує площина, якій належать всі точки цієї фігури. Зрозуміло, що всі лінійні геометричні фігури є плоскими, всі точки таких фігур належать безлічі площин, кожній площині жмутка площин, що проходять через відповідну пряму.

Безпосередній інтерес представляють такі плоскі геометричні фігури, які містять принаймні три точки, що не лежать на одній прямій. Всі точки подібних фігур належать лише одній площині. Будемо називати такі фігури **нелінійними плоскими**. Для **нелінійної плоскої геометричної фігури** паралельне проектування вважають **виродженим** у випадку, коли воно є виродженим для площини, яка цю фігуру містить. При виродженому паралельному проектуванні нелінійної плоскої геометричної фігури F площина, яка цю фігуру містить, проектується у пряму, фігура F — у підмножину F' цієї прямої, тобто у лінійну фігуру. У випадку, коли

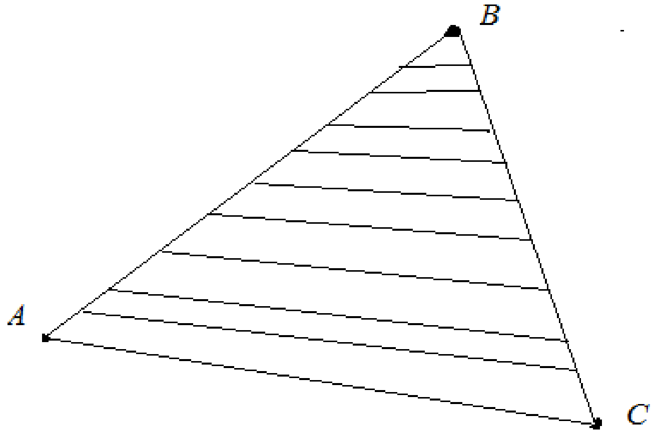


Рис.77

площина, що містить нелінійну плоску фігуру F, взаємно однозначно проектується на картинну площину, проектування для фігури F вважається **невиродженим**.

Зрозуміло, що найпростішою нелінійною плоскою геометричною фігурою є фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій. Але така фігура однозначно визначає трикутник. Саме трикутник традиційно вважається найпростішою нелінійною плоскою фігурою евклідової геометрії. Тому у випадку, коли розглядають зображення нелінійних плоских геометричних фігур за допомогою паралельного проектування, у першу чергу розглядають можливі варіанти зображень трикутника.

При цьому треба мати на увазі, що різні аксіоматичні теорії евклідової геометрії містять різні означення трикутника. Отже, треба уточнити те, що ми будемо мати на увазі.

Більшість сучасних курсів евклідової геометрії для середніх загальноосвітніх навчальних закладів містять два різних поняття про трикутник. Першому поняттю відповідає наступне означення. Трикутником називається геометрична фігура, утворена трьома точками, що не належать одній прямій, і трьома відрізками з кінцями у цих точках. Точки називаються вершинами трикутника, відрізки – його сторонами. Це означення так званого **трикутника-каркаса**. На рис. 77 трикутник-каркас ABC утворено точками A, B і C та відрізками AB, AC і BC. Трикутник-каркас однозначно визначає площину, яка його містить. Так, ∇ABC однозначно визначає площину (ABC). **Внутрішньою областю** трикутника-каркаса ABC називається множина тих та тільки тих точок площини (ABC), які одночасно належать 1) тій півплощині з межею AB, що і точка C; 2) тій півплощині з межею BC, що і точка A; 3) тій півплощині з межею AC, що і точка B. На рис. 77 внутрішню область VABC заштриховано.

Плоским трикутником називається трикутник-каркас разом з його внутрішньою областю. Це означення відповідає другому поняттю про трикутник. Зрозуміло, що трикутник-каркас ABC однозначно визначає плоский трикутник ABC і навпаки.

При побудові зображень трикутника-каркаса або плоского трикутника за методом паралельного проектування обов'язковим вважається побудова зображень всіх вершин даного трикутника та всіх його сторін. Справедливою є наступна.

Теорема 4.1. *Проекцією трикутника-каркаса при паралельному проектуванні може бути 1) відрізок; 2) відрізок з виділеною точкою; 3) трикутник-каркас. Трикутник-каркас проектується у відрізок тоді та тільки тоді, коли проектування для даного трикутника є виродженим, пряма, що задає напрямок проектування, є паралельною або містить одну із сторін даного трикутника. Трикутник-каркас проектується у відрізок з виділеною точкою тоді та тільки тоді, коли проектування для даного трикутника є виродженим, але пряма, що задає напрямок проектування, не є паралельною до жодної із сторін даного трикутника і не містить жодну з цих сторін. Трикутник-каркас проектується у трикутник-каркас тоді та тільки тоді, коли проектування для даного трикутника є невиродженим.*

Доведення. W Розглянемо трикутник-каркас ABC. Нехай, для визначеності, напрямок проектування задається прямою AB або прямою, паралельною до AB. Проектування для відрізка AB у даному випадку є виродженим, точки A і B проектуються у певну одну точку A'. У той же час, у даному випадку для відрізків AC і BC проектування є невиродженим (сторони трикутника не є паралельними між собою), вони проектуються у відрізки, точніше, у один відрізок $A'C'$, якщо точка C' є проекцію точки C. Отже, у даному випадку проекцією трикутника-каркаса ABC є відрізок $A'C'$ (рис. 78а).

Нехай тепер напрямок проектування задається прямою l, $l \parallel (ABC)$ або $l \subset (ABC)$, але $l \nparallel AB, l \nparallel AC, l \nparallel BC$. Для площини (ABC) проектування є виродженим, вона проектується у певну пряму, точки A, B і C проектуються, відповідно, у точки A', B', C' , які лежать на цій прямій. Але для жодного з відрізків AB, AC і BC проектування не є виродженим, вони проектуються у відрізки, отже, точки A', B', C' є різними. Із трьох різних точок однієї прямої одна та тільки одна лежить між двома іншими. Нехай, для визначеності точка B' лежить між точками A' і C'. Тоді проекцією трикутника-каркаса ABC буде відрізок $A'C'$ разом із виділеною точкою B' (рис. 78,б).

Нехай тепер напрямок проектування задається прямою l, яка не лежить у площині (ABC) і не є паралельною до даної площини. У цьому випадку проектування для площини (ABC) є невиродженим, проекцією площини (ABC) є картинна площина, закон проектування встановлює взаємно однозначну відповідність між площиною (ABC) і картинною площиною. Це означає, що точки A, B і C проектуються, відповідно, у попарно різні точки A', B', C' картинної площини. Проектування одночасно є невиродженим для кожної з прямих AB, AC і BC. Кожна з них проектується, відповідно, у пряму $A'B'$, $A'C'$ і $B'C'$. Якщо припустити, що точки A', B', C' лежать на одній прямій, то ми отримали би, що при даному проектуванні точка C', наприклад, мала би два прообрази. Одним прообразом була би точка C, яка не лежить на прямій AB (існує $\triangle ABC$), другий прообраз належав би прямій AB. Це суперечило би факту наявності взаємно однозначної відповідності між площиною (ABC) і картинною площиною. Отже точки A', B', C' не

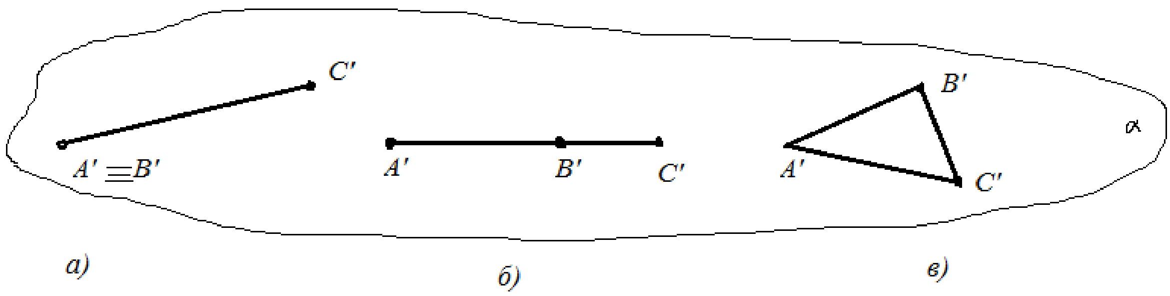


Рис.78

лежать на одній прямій, існує трикутник-каркас $A'B'C'$, який є проекцією трикутника-каркаса ABC, бо відрізок $A'B'$ є проекцією відрізка AB, відрізок $B'C'$ — проекцією відрізка BC, відрізок $A'C'$ — проекцією відрізка AC (рис.78,с).

Таким чином, розглянуті всі три можливі, попарно несумісні, випадки взаємного розташування прямої l, що задає напрямок паралельного проектування, і трикутника-каркаса ABC. Отримані висновки також є попарно несумісними. За відомою теоремою курсу математичної логіки, тоді справедливими є і відповідні твердження, обернені до обґрунтованих. Теорему 4.1 доведено. ■

Наслідок 1. *Проекцією плоского трикутника при паралельному проектуванні може бути 1) відрізок; 2) відрізок з виділеною точкою; 3) плоский трикутник. Плоский трикутник проектується у відрізок тоді та тільки тоді, коли пряма, що задає напрямок проектування, є паралельною, або містить одну із сторін даного трикутника. Плоский трикутник проектується у відрізок з виділеною точкою тоді та тільки тоді, коли проектування для даного трикутника є виродженим, але пряма, що задає напрямок проектування, не є паралельною до жодної з сторін даного трикутника і не містить жодну з цих сторін. Плоский трикутник проектується у плоский трикутник тоді та тільки тоді, коли проектування для даного трикутника є не виродженим.*

Доведення наслідку 1 у більшості тверджень є аналогічним до доведення теореми 4.1 і спирається на той факт, що при невиродженому для півплощини паралельному проектуванні проекцією півплощини є півплощина.

Наслідок 2. *Плоский трикутник* $A'B'C'$ *є проекцією плоского трикутника* ABC *при певному паралельному проектуванні тоді та тільки тоді, коли трикутник-каркас* $A'B'C'$ *є проекцією трикутника-каркаса* ABC *при даному паралельному проектуванні.*

Доведення спирається на ті факти, що при невиродженому для відповідних геометричних фігур паралельному проектуванні проекцією прямої є пряма, проекцією відрізка — відрізок, при цьому кінці відрізка проектуються у кінці відрізка-проекції, проекцією півплощини є півплощина, при цьому межа півплощини проектується у межу півплощини-проекції.

Наслідок 3. *Твердження теореми 4.1 та її наслідків 1 і 2 залишаються справедливими, якщо у них слово «проекція» замінити словом «зображення».*

Справедливість наслідку 3 випливає з означення поняття зображення геометричної фігури і властивостей перетворення подібності площини.

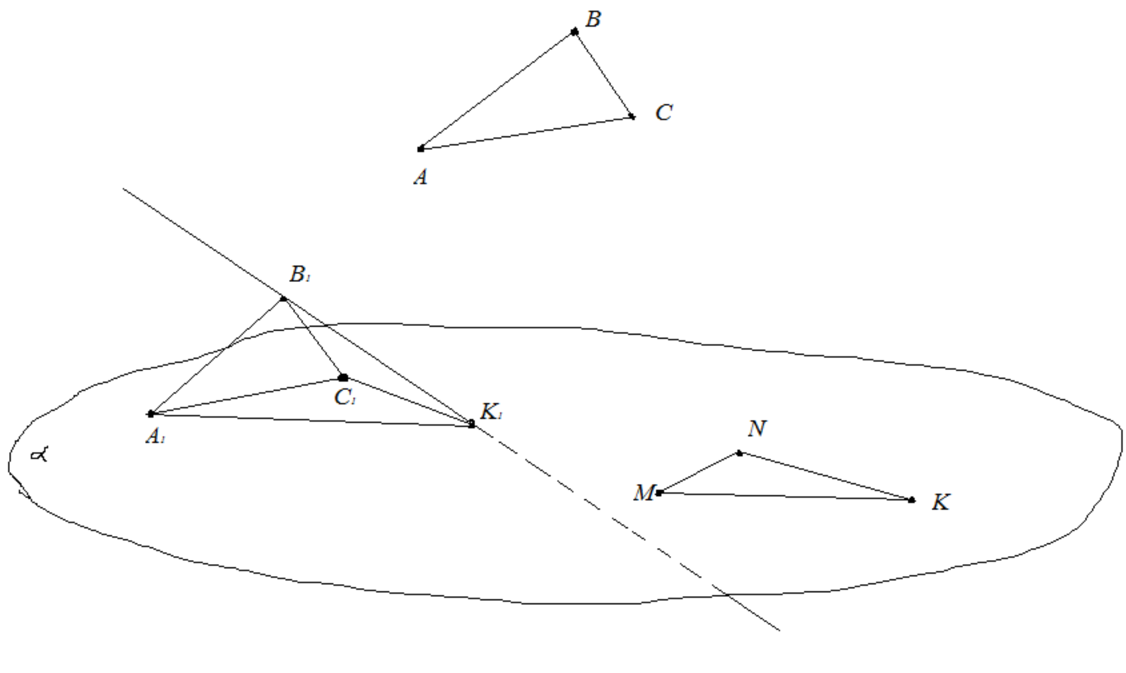


Рис.79

Принципово важливою є наступна

Теорема 4.2. *Довільний трикутник-каркас картинної площини є зображенням довільного трикутника-каркаса евклідового простору при певному паралельному проектуванні.*

Доведення. W Розглянемо довільний трикутник-каркас ABC, картинну площину α і довільний трикутник-каркас MNK площини α (рис. 79). Нехай V $A_1B_1C_1$ =V ABC, точки A_1 і C_1 лежать у площині α, $B_1 \notin \alpha$. Подібних трикутників $A_1B_1C_1$ у евклідовому просторі існує безліч. Нехай φ — перетворення подібності площини α, за допомогою якого V MNK відображається у V $A_1C_1K_1$ так, що $\varphi(M) = A_1$, $\varphi(N) = C_1$, $\varphi(K) = K_1$. Зрозуміло, що при цьому точка $K_1 \in \alpha$, V $A_1C_1K_1$ є подібним до V MNK. (Перетворення подібності φ визначається не однозначно, існування такого перетворення подібності φ є очевидним фактом евклідової планіметрії). За допомогою паралельного проектування у напрямку прямої B_1K_1 трикутник-каркас $A_1B_1C_1$ проектується у трикутник-каркас V $A_1K_1C_1$. Відповідно до наведених означень, V MNK є зображенням V $A_1C_1B_1$ при розглянутому паралельному проектуванні. V ABC =V $A_1B_1C_1$.Отже, V ABC є подібним до V $A_1B_1C_1$. За теоремою 3.1, існує апарат паралельного проектування, згідно якого V MNK є зображенням V ABC.

Теорему 4.2 доведено. ■

Наслідок 1. *Довільний плоский трикутник картинної площини може вважатися зображенням довільного плоского трикутника евклідового простору при певному паралельному проектуванні.*

Доведення даного наслідку співпадає з доведенням теореми 4.2, якщо замість трикутників-каркасів ABC і MNK розглядати плоскі трикутники ABC і MNK. Справедливість даного наслідку також безпосередньо випливає із справедливості теореми 4.2 і наслідку 2 теореми 4.1.

Наслідок 2. *Якщо трикутник-каркас $A'B'C'$ площини α є зображенням трикутника-каркаса ABC площини β при паралельному проектуванні на площину α напрямку прямої l, то трикутник-каркас ABC є зображенням* *трикутника-каркаса* $A'B'C'$ *при паралельному проектуванні на площину* β *у напрямку прямої* l.

Доведіть самостійно.

Питання і завдання для самоконтролю до § 4

4.1. Які фігури у евклідовій геометрії називають лінійними?

4.2. У якому випадку для лінійної геометричної фігури F паралельне проектування вважають виродженим? Який вигляд при виродженому паралельному проектуванні мають проекція і зображення лінійної фігури F?

4.3. У якому випадку для лінійної геометричної фігури F паралельне проектування вважають невиродженим?

4.4. Що можна стверджувати про геометричну фігуру, якщо відомо, що при певному паралельному проектуванні її проекцією є точка?

4.5. Які фігури у евклідовій геометрії називають плоскими?

4.6. Які фігури у евклідовій геометрії називають нелінійними плоскими?

4.7. У якому випадку для нелінійної плоскої геометричної фігури паралельне проектування вважають виродженим?

4.8. У якому випадку для нелінійної плоскої геометричної фігури паралельне проектування вважають невиродженим?

4.9. Що можна стверджувати про геометричну фігуру, якщо відомо, що при певному паралельному проектуванні її проекцією є відрізок?

4.10. Яку геометричну фігуру традиційно вважають найпростішою нелінійною плоскою фігурою евклідової геометрії?

4.11. Наведіть означення трикутника-каркаса.

4.12. Наведіть означення плоского трикутника.

4.13. Які геометричні фігури можуть бути проекціями трикутника-каркаса при паралельному проектуванні? За яких обставин?

4.14. Які геометричні фігури можуть бути проекціями плоского трикутника при паралельному проектуванні? За яких обставин?

4.15. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями трикутника-каркаса при паралельному проектуванні? За яких обставин?

4.16. Які геометричні фігури можуть бути зображеннями плоского трикутника при паралельному проектуванні? За яких обставин?

4.17. Відомо, що трикутник-каркас $A'B'C'$ є зображенням трикутника-каркаса ABC при певному паралельному проектуванні. Що можна стверджувати про залежності між сторонами та кутами трикутників ABC і $A'B'C'$?

4.18. Відомо, що плоский трикутник $A'B'C'$ є зображенням плоского трикутника ABC при певному паралельному проектуванні. Що можна стверджувати про залежності між сторонами та кутами трикутників ABC і $A'B'C'$?

§ 5. Основна теорема теорії зображень плоских геометричних фігур за допомогою паралельного проектування.

Справедливою є наступна **основна теорема теорії зображень плоских геометричних фігур за допомогою паралельного проектування**.

Теорема 5.1. *Якщо відомо, що при певному паралельному проектуванні заданий трикутник-каркас $A'B'C'$ площини α є зображенням заданого трикутника-каркаса ABC площини β і, як результат відповідного відображення f, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, то при даному паралельному проектуванні площина α э зображенням площини β, для кожної точки M площини β її зображенням $M' = f(M)$ на площині α є визначеним однозначно, його можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.*

Доведення. W Розглянемо задані $\text{V}ABC$ площини β і $\text{V}A'B'C'$ площини α та паралельне проектування h, за допомогою якого $\text{V}ABC$ зображено трикутником $A'B'C'$. Зрозуміло, що проектування h для трикутника ABC є невиродженим. Отже, воно є невиродженим і для площини β цього трикутника, площина α трикутника $A'B'C'$ є проекцією площини β при проектуванні h. Трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника ABC як результат відображення f, що є композицією паралельного проектування h і певного перетворення подібності площини α. Значить, площина α є зображенням площини β при паралельному проектуванні h як результат відображення f.

Якщо точка M площини β лежить на будь-якій з прямих, що містять сторони трикутника ABC, то під час розв'язання задач 39 і 40 розділу I було обгрунтовано, як на картинній площині α за допомогою циркуля і лінійки можна однозначно побудувати зображення M' цієї точки: $h' = f(M)$.

Прямі AB, AC і BC розбивають множину точок площини β, що цим

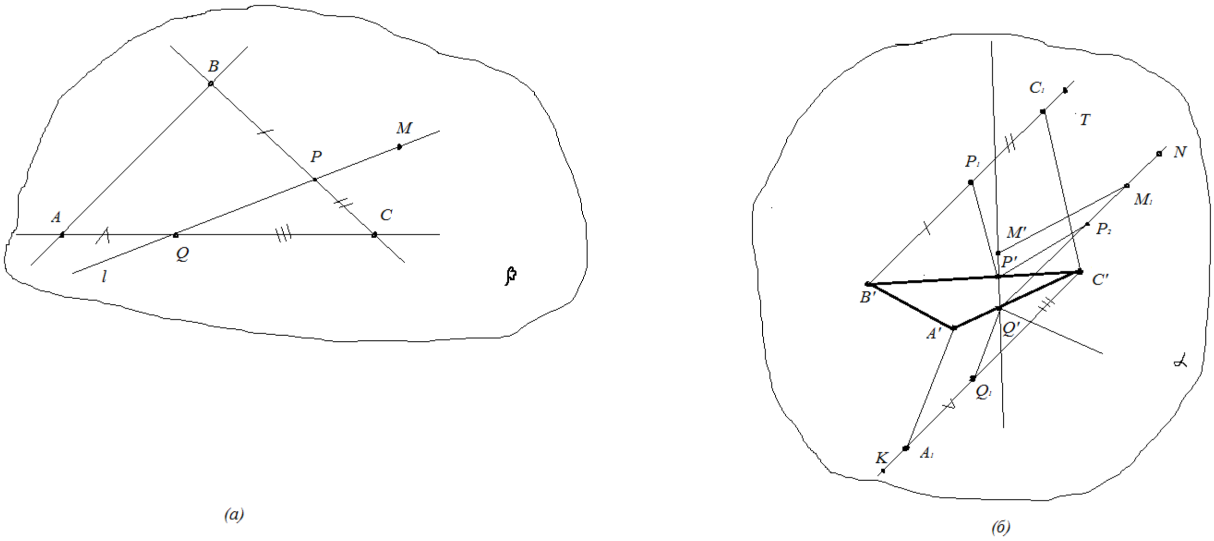


Рис.80

прямим не належать, на сім підмножин. Нехай точка M лежить у одній з таких підмножин. Наприклад, дослідимо випадок, зображений на рис. 80а. На площині β через точку M проходить безліч прямих. Розглянемо таку пряму l з них, яка перетинає пряму BC у певній точці P, пряму AC у певній точці Q, $P \not\equiv Q$ ($l \nparallel BC; l \nparallel AC; l \not\equiv MC$). Точка P лежить на прямій BC. Отже, її зображення P' при даному паралельному проектуванні належить прямій $B'C'$ і може бути побудованим на картинній площині α однозначно, за допомогою циркуля і лінійки, як було обґрунтовано при розв'язанні задачі 39. У випадку, зображеному на рис. 80а, точка P лежить між точками B і C. На площині α проведемо довільний промінь $B'T$, який не лежить на прямій $B'C'$. Послідовно відкладемо на даному промені відрізки $B'P_1 = BP$ і $P_1C_1 = PC$. Через точку P_1 проведемо пряму, паралельну до прямої C_1C' до перетину з прямою $B'C'$ у точці P'. Точка P' і є зображенням точки P. Для знаходження зображення Q' точки Q виконаємо аналогічні побудови. На рис. 80а точка Q лежить між точками A і C. Отже, на картинній площині α побудуємо довільний промінь $C'K$, який не лежить на прямій $A'C'$. На даному промені послідовно відкладемо відрізки $C'Q_1 = CQ$ і $Q_1A_1 = QA$. Проведемо через точку Q_1 пряму, паралельну прямій A_1A' до перетину з прямою $C'A'$ у точці Q'. Точка Q' є шуканим зображенням точки Q. Точки P' і Q' не співпадають, бо є внутрішніми точками різних сторін $\triangle A'B'C'$. Пряма $P'Q'$ є зображенням прямої PQ при даному паралельному проектуванні h.

Точка M лежить на прямій PQ. Побудуємо на площині α довільний промінь $Q'N$, який не лежить на прямій $P'Q'$. Послідовно відкладемо на ньому відрізки $Q'P_2 = QP$ і $P_2M_1 = PM$. Через точку M_1 проведемо пряму, паралельну прямій P_2P' до перетину з прямою $P'Q'$ у точці M'. Точка M' є зображенням точки M. На площині α вона будується за допомогою циркуля і лінійки. Точка M' на площині α визначається однозначно, тому що проектування h для площини α є невиродженим і за його допомогою встановлюється взаємно однозначна відповідність між площинами β і α.

Наслідок 1. *Якщо при певному паралельному проектуванні, як результат відповідного відображення f, площина α є зображенням площини β, заданий трикутник-каркас $A'B'C'$ площини α є зображенням трикутника-каркаса ABC площини β, при цьому відомо, що $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$, то для довільної точки M' площини α на площині β за допомогою циркуля і лінійки можна однозначно відновити оригінал.*

Доведення можна провести безпосередньо за аналогією до доведення теореми 5.1. У той же час висновок наслідку 1 випливає із справедливості теореми 5.1 і наслідку 2 з теореми 4.2.

Наслідок 2. *Фігура F' картинної площини може бути зображенням плоскої фігури F при певному, невиродженому для фігури F паралельному проектуванні, тоді та тільки тоді, коли фігури F і F' є афінно еквівалентними. Відповідний закон зображення є афінним відображенням площини, що містить плоску фігуру F, на картинну площину.*

Доведення. W Геометричні **фігури** F і F', відповідно, площин $\beta\, i\, \alpha$ є **афінно еквівалентними**, якщо існує таке афінне відображення f площини β на площину α, що $f(F)=F'$. Відображення f площини β на площину α називається **афінним**, якщо воно є взаємно однозначним, кожну пряму площини β відображає на певну пряму площини α і при цьому зберігає просте відношення $(M_1,M_2;M_3)$ трьох точок прямої. Невироджене паралельне проектування площини β на картинну площину α, як було доведено у розділі І, є взаємно однозначним відображенням площини β на площину α, є невиродженим проектуванням для кожної прямої площини β і тому взаємно однозначно відображає кожну пряму площини β у відповідну пряму площини α. З цього, як наслідок, випливає факт збереження простого відношення будь-яких трьох точок будь-якої прямої площини β (Тобто, у означенні афінного відображення площини остання вимога є зайвою. (З доведенням даного факту можна ознайомитися, наприклад, у [21]. Але доведення даного факту вважається достатньо складним. Саме тому останню вимогу найчастіше включають до означення афінного відображення площини). Як відомо, дійсне число λ називається простим відношенням $(M_1,M_2;M_3)$ трьох попарно різних точок M_1,M_2,M_3 однієї прямої, якщо $\overrightarrow{M_1M_3}=\lambda\cdot\overrightarrow{M_3M_2}$. Звідси випливає, що $\overrightarrow{M_1M_3}=\lambda\cdot\overrightarrow{M_3M_2}$, $|\lambda|=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_3}\right|}{\left|\overrightarrow{M_3M_2}\right|}$.

Відомо, що при невиродженому паралельному проектуванні зберігається відношення довжин відрізків, які належать одній прямій. Звідси випливає, що зберігається число $|\lambda|$. Знак числа λ вказує на однакову чи протилежну спрямованість променів M_1M_3 і M_3M_2. Але при невиродженому для прямої паралельному проектуванні зберігається порядок точок, що належать цій прямій. Це означає, що зберігається і знак числа λ, тобто, саме число λ. Таким чином, невироджене паралельне проектування площини β на площину α є афінним відображенням площини β на площину α.

У випадку, коли $\beta \parallel \alpha$ або $\beta \equiv \alpha$, паралельне проектування є паралельним перенесенням на вектор $\overrightarrow{PP'}$ площини β на площину α. Тут точка P— це точка перетину прямої l, яка задає напрямок даного паралельного проектування, з площиною β, а точка P'—точка перетину прямої l з площиною α. У випадку, коли $\beta \nparallel \alpha$ і $\beta \not\equiv \alpha$, площини $\beta\, i\, \alpha$ перетинаються за певною прямою a, дане проектування має пряму a нерухомих точок.

Перетворення подібності площини α, як відомо, є афінним відображенням площини α на себе, композиція двох афінних відображень є афінним відображенням. Це означає, що у випадку, коли фігура F'є зображенням фігури F при невиродженому паралельному проектуванні, фігури Fі F' є афінно еквівалентними, відповідний закон зображення є афінним відображенням площини оригіналу β на картинну площину α.

Нехай плоскі фігури F і F'є афінно еквівалентними: фігура Fлежить у площині β, фігура F' — у площині α, існує таке афінне відображення f площини β на площину α, при якому $f(F) = F'$.

Припустимо, по-перше, що фігура F є лінійною, тобто кожна точка фігури F належить певній прямій l. Оберемо точки $A, B \in l, A \not\equiv B$. $f(A) = A',\ f(B) = B',\ A', B' \in \alpha$. $A' \not\equiv B'$ тому, що афінне відображення є взаємно однозначним відображенням. Отже, існує пряма $A'B'$. Пряма l- це пряма AB, $f(l) = A'B'$. Оскільки $F \subset AB, F' \subset A'B'$. У розділі I обґрунтовано, що будь-які дві точки $A'\, i\, B'$ картинної площини можуть вважатися зображенням будь-яких двох точок простору при паралельному проектуванні. Отже, існує таке відображення φ, яке є композицією паралельного проектування площини β на площину α і перетворення подібності площини α, що $\varphi(A) = A', \varphi(B) = B'$. Відображення φ, за властивостями паралельного проектування, відображає пряму AB на пряму $A'B'$, $\varphi(F) \subset A'B'$. Згідно міркувань першої частини даного наслідку, відображення φ, як і відображення f є афінним відображенням прямої AB на пряму $A'B'$. У той же час $\varphi(A) = f(A)$, $\varphi(B) = f(B)$. Із теорії афінних відображень прямих відомо, що у подібному випадку відображення φ і f співпадають на кожній точці прямої AB. Але $F \subset AB$. Отже, для кожної точки M фігури F справедлива рівність $\varphi(M) \equiv f(M)$. Тому, якщо $f(F) = F'$, то $\varphi(F) = F'$, фігура F' є зображенням фігури F при паралельному проектуванні, що входить до відображення φ.

Нехай тепер фігура F є нелінійною плоскою. $F \subset \beta$. Розглянемо трикутник-каркас ABC площини β. $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $A', B', C' \in \alpha$. За відомими властивостями афінних відображень, точки A', B', C' не лежать на одній прямій, існує трикутник-каркас $A'B'C'$. Згідно теореми 4.2, існує паралельне проектування, при якому $\nabla A'B'C'$ є зображенням ∇ABC. Це невироджене паралельне проектування площини β на площину α. Відображення φ, яке переводить ∇ABC у $\nabla A'B'C'$, є композицією цього паралельного проектування площини β на площину α і перетворення подібності площини α. Під час проведення доведень у першій частині даного наслідку було обґрунтовано, що φ також є афінним відображенням площини β на площину α. Але $\varphi(A) = f(A)$, $\varphi(B) = f(B)$, $\varphi(C) = f(C)$. Із теорії афінних відображень площин відомо, що існує єдине афінне відображення площини β на площину α, яке фіксовані три точки, що не лежать на одній прямій, переводить у фіксовані три точки, що не лежать на одній прямій. Отже, $\varphi \equiv f$, $\varphi(F) \equiv f(F)$, $\varphi(F) = F'$, фігура F' є зображенням фігури F при паралельному проектуванні, що входить до відображення φ.

Зауваження. Нехай площини α і β перетинаються по прямій a, пряма l $\left(l \nparallel \alpha, l \nparallel \beta\right)$ задає напрямок невиродженого паралельного проектування f площини β на картинну площину α. Розглянемо такий трикутник ABC площини β, що $A \in a$, $C \in a$. Зрозуміло, що тоді $B \notin a$, $f(A) = A$, $f\left(C\right) = C$, $f(B) = B'$, $B' \in \alpha$, $B' \notin a$ (рис. 81). Згідно наслідку 2 паралельне проектування f здійснює афінне відображення f площини β на картинну площину α, яке однозначно визначається образами A, B', C точок A, B, C.

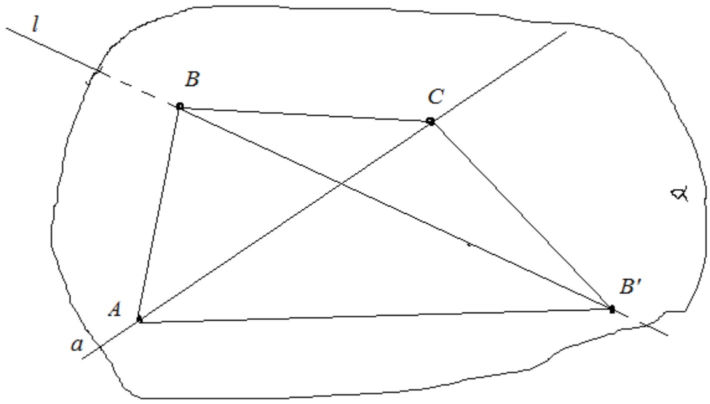


Рис.81

У площині α розглянемо такий трикутник AB_1C, який дорівнює трикутнику ABC ($AB_1 = AB, B_1C = BC$), що точки B_1 і B' розташовані по різні боки відносно прямої a (рис. 82). Косий стиск h площини α до прямої a у напрямку прямої B_1B', який переводить точку B_1 у точку B', є афінним **перетворенням спорідненості** площини α. Прямою нерухомих точок перетворення h є пряма a. $h(A) = A$, $h(B_1) = B', h\left(C\right) = C$.

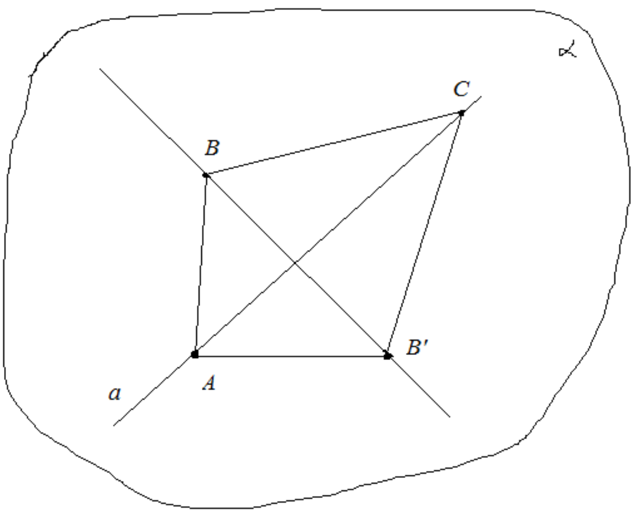


Рис.82

Площина β переходить у площину α так, що $\triangle ABC$ переходить у $\triangle AB_1C$ за допомогою обертання g навколо прямої a, $f = h \circ g$. Це означає, що зображення точок площини β на площині α можна промоделювати за допомогою косого стиску h. За допомогою циркуля і лінійки для кожної точки M площини α можна однозначно побудувати її образ $N = h(M)$ і прообраз $P = h^{-1}(M)$ ($h(P) = M$) (див., наприклад, [11]). Рух g дозволяє відновити відповідний оригінал на площині β.

Наслідок 3. *Якщо фігура F' площини α є зображенням F площини β при певному невиродженому для площини β паралельному проектуванні на площину α, то існує невироджене паралельне проектування площини α на площину β, при якому фігура F є зображенням фігури F'.*

Справедливість наслідку 3 випливає із справедливості наслідку 2 з теореми 5.1 і того факту, що, якщо фігура F' є афінно еквівалентною до фігури F, то фігура F є афінно еквівалентною до фігури F' [14].

Наслідок 4. *Будь-яке зображення плоскої геометричної фігури при невиродженому паралельному проектуванні є афінно повним* .

Доведення. W Нагадаємо, що зображення геометричної фігури F називається афінно повним, якщо за ним можна однозначно визначити всі афінні властивості даної фігури. Афінними властивостями фігури F називаються ті її властивості, які зберігаються при всіх афінних перетвореннях евклідового простору, у якому розташовано дану фігуру. Такі перетворення індукують афінні відображення площини, що містить плоску фігуру F, і самої фігури F. Як було встановлено при доведенні наслідку 2, при невиродженому для плоскої геометричної фігури F паралельному проектуванні зображення F' даної фігури F виявляється афінно еквівалентним до самої фігури. Тобто, фігури F і F' мають однакові афінні властивості, всі афінні властивості фігури F, можна однозначно встановити за афінними властивостями фігури F'. Отже, зображення F' фігури F є афінно повним. ■

Наслідок 5. *Для зображень плоских геометричних фігур, які належать одній площині, при невиродженому паралельному проектуванні зберігається* *відношення площ цих фігур, обчислених у однакових одиницях вимірювання (Зрозуміло, якщо площі цих фігур існують).*

Доведення. W При доведенні наслідку 2 з теореми 5.1 було обґрунтовано, що під час зображення площини β за допомогою невиродженого паралельного проектування відбувається афінне відображення площини β на картинну площину α. Із теорії афінних відображень відомо, що під час афінних відображень площин зберігається відношення площ геометричних фігур. Зрозуміло, мається на увазі, що такі фігури є квадруємими, тобто мають площі. ■

Наслідок 6. *Якщо відомо, що заданий трикутник-каркас* $A'B'C'$ *картинної площини* α *є зображенням заданого трикутника-каркаса* ABC *площини* β *при певному паралельному проектуванні, площини* β *на площину* α *так, що, як результат відповідного відображення* f, $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$, *то зображення площини* β *у вигляді площини* α *при даному паралельному проектуванні є метрично повним*.

Доведення. W Згідно наслідку 1 з теореми 5.1, при виконанні умов наслідку 6, для кожної точки площини α на площині β можна однозначно відновити оригінал. Отже, за зображенням можна встановити всі геометричні властивості оригіналу. ■

Зрозуміло, що у випадку метричної повноти зображення площини β у вигляді картинної площини α метрично повним буде і зображення F' кожної фігури F площини β.

Наслідок 7. *Нехай відомо, що заданий трикутник-каркас* $A'B'C'$ *картинної площини* α *є зображенням деякого, визначеного з точністю до перетворення подібності, трикутника-каркаса* ABC *площини* β *при певному паралельному проектуванні площини* β *на площини* α. *(Тобто вказані певні властивості* T *трикутника-каркаса* ABC, *згідно яких всі трикутники, що мають такі властивості, і тільки такі трикутники, є подібними до трикутника* ABC*). Тоді зображення* $A'B'C'$ *є подібно повним.*

Будь-який з трикутників площини β*, що має властивості* T*, може бути прийнятий за оригінал цього зображення при даному паралельному проектуванні.*

Доведення. W Розглянемо довільний трикутник ABC площини β, який має властивості T. Згідно теореми 5.1, існує паралельне проектування, при якому трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника ABC. Згідно наслідку 5 з теореми 5.1, всі властивості трикутника ABC, у тому числі і всі його властивості подібності, можна встановити за властивостями трикутника $A'B'C'$. Нехай трикутник $A'B'C'$ є також зображенням трикутника MNK площини β при певному паралельному проектуванні. У цьому випадку трикутник MNK має властивості T і тому є подібним до трикутника ABC, подібні властивості трикутників MNK і ABC є однаковими, ці властивості повністю визначені властивостями трикутника $A'B'C'$ як трикутника і умовою даного наслідку. Це і означає подібну повноту зображення у вказаному умовою наслідку 7 випадку. ■

Наприклад, якщо просто вказано, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням певної плоскої фігури F при невиродженому паралельному проектуванні, то відомо, що це зображення є афінно-повним, звідки, зокрема, випливає, що фігура F обов’язково є трикутником. Якщо вказано, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням правильного трикутника ABC при певному паралельному проектуванні, то зображення $A'B'C'$ є подібно повним, довільний правильний трикутник при такому паралельному проектуванні для трикутника $A'B'C'$ можна вважати оригіналом.

Наслідок 8. *Якщо відомо, що заданий трикутник-каркас* $A'B'C'$ *картинної площини* α *є зображенням деякого, визначеного з точністю до перетворення подібності, трикутника-каркаса* ABC *площини* β *на площину* α *при певному паралельному проектуванні, то зображення* F' *довільної фігури* F *площини* β *при даному паралельному проектуванні є подібно* *повним. За оригінал зображення F' при такому проектуванні можна прийняти довільну фігуру площину β, подібну до фігури F.*

Доведіть самостійно, спираючись на міркування, проведені при доведеннях наслідків 6 і 7 та основну теорему теорії перетворень подібності площини [13].

Питання і завдання для самоконтролю до § 5.

5.1. Сформулюйте основну теорему теорії зображень плоских геометричних фігур за допомогою паралельного проектування. Чому дана теорема має таку назву?

5.2. Визначить необхідні етапи доведення основної теореми теорії зображень плоских геометричних фігур за допомогою паралельного проектування.

5.3. Доведіть основну теорему теорії зображень плоских геометричних фігур за допомогою паралельного проектування.

5.4. У якому розумінні можна стверджувати, що справедливою є теорема, обернена до основної теореми теорії зображень плоских геометричних фігур за допомогою паралельного проектування?

5.5. Які дві фігури евклідової геометрії називаються афінно еквівалентними?

5.6. Сформулюйте критерій того факту, що одна плоска геометрична фігура може бути зображенням іншої плоскої фігури при певному невиродженому паралельному проектуванні.

5.7. Який характер повноти має зображення плоскої геометричної фігури при невиродженому паралельному проектуванні?

5.8. Що можна стверджувати про відношення площ квадруємих плоских геометричних фігур, які розташовано у одній площині, при невиродженому для даної площини паралельному проектуванні?

5.9. Задані трикутник-оригінал ABC і трикутник $A'B'C'$, що є зображенням трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f, $A' = f(A)$,

$B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Що можна стверджувати про характер повноти зображення F' фігури F, розташованої у площині трикутника ABC?

5.10. При певному невиродженому паралельному проектуванні f задано трикутник- зображення. Трикутник-оригінал є відомим з точністю до перетворення подібності. Що можна стверджувати про характер повноти зображення F' фігури F, розташованої у площині трикутника-оригінала?

§ 6. Зображення основних відрізків, прямих і точок, пов'язаних з трикутником, при невиродженому для даного трикутника паралельному проектуванні

Наведемо розв'язки певної кількості стандартних задач. Для їх розв'язання будемо використовувати лише методи елементарної геометрії. У кожній із задач під трикутником будемо розуміти трикутник-каркас.

Задача 6.1. *Заданий* $\triangle A'B'C'$ *є зображенням заданого* $\triangle ABC$ *при певному паралельному проектуванні, як результат відповідного відображення* f $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. *Побудуйте зображення при даному проектуванні медіани* AM *трикутника* ABC.

Розв'язання. W За умови задачі, задані два трикутника: $\triangle ABC$ площини-оригіналу β і $\triangle A'B'C'$ картинної площини α (рис. 83). Згідно

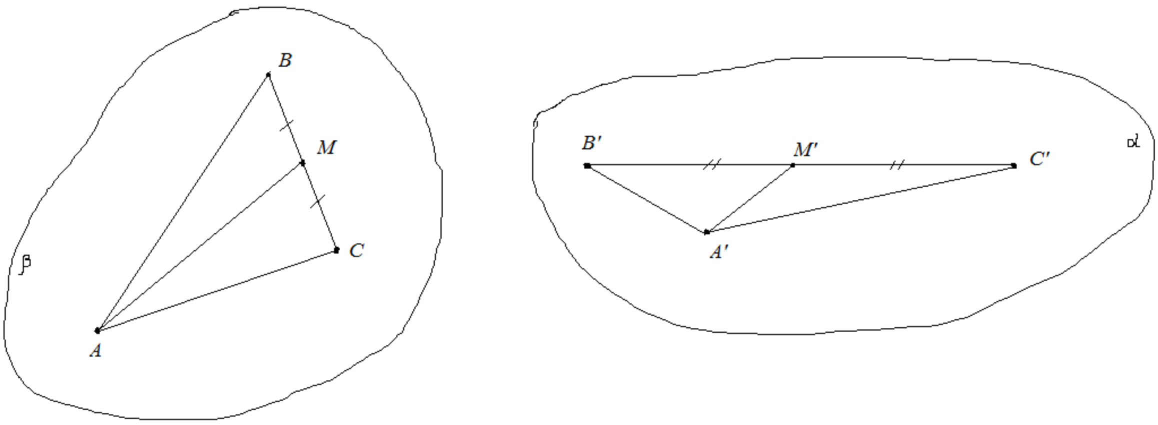


Рис.83

теореми 4.2, кожний з цих трикутників може бути довільним. Побудуємо медіану AM трикутника ABC. Як відомо, це відрізок, що сполучає вершину A цього трикутника з серединою M його протилежної сторони BC. Оскільки зображенням трикутника площини β є трикутник картинної площини α, проектування для площини β і для всіх розташованих на ній геометричних фігур є невиродженим. Отже, за теоремою 3.5, зображенням відрізка AM буде відрізок $A'M'$, кінець M' якого лежить на відрізку $B'C'$ (що є зображенням відрізка BC) і ділить його навпіл (тому, що за наслідком з теореми 3.10 для відрізка паралельному проектуванні зображенням середини даного відрізка є середина відрізка-зображення), Таким чином, для побудови зображення медіани AM трикутника ABC достатньо знайти середину M' відрізка $B'C'$ і побудувати відрізок $A'M'$, який є медіаною $\triangle A'B'C'$, проведеною з вершини A' (рис. 83), $f(AM) = A'M'$. ■

Отже, при невиродженому для трикутника паралельному проектуванні медіана трикутника-оригінала завжди зображається відповідною медіаною трикутника-зображення, дана задача має єдиний розв'язок, для його знаходження медіану AM трикутника-оригінала можна не будувати.

Задача 6.2. *Заданий $\triangle A'B'C'$ є зображенням деякого $\triangle ABC$ при певному паралельному проектуванні, як результат відповідного відображення f, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Трикутник-оригінал ABC загублено. Побудуйте зображення при даному проектуванні медіани AM трикутника ABC.*

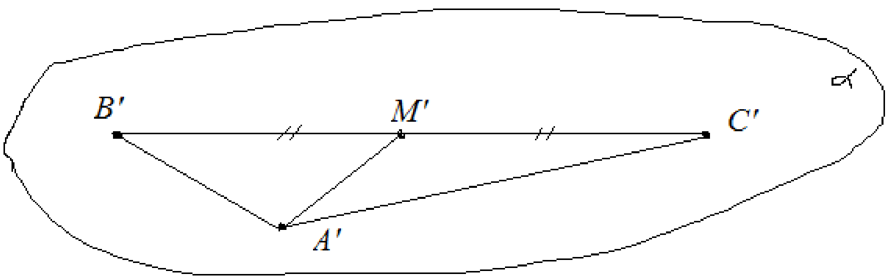


Рис.84

Розв'язання.

W За умови даної задачі задано лише $\triangle A'B'C'$ картинної площини α (рис 84). Зрозуміло, що, якщо невідомий $\triangle ABC$ зображено трикутником, проектування для площини трикутника ABC є невиродженим. Отже, як було обґрунтовано при розв'язанні задачі 6.1, незалежно від форми $\triangle ABC$ зображенням його медіани буде медіана $A'M'$ трикутника $A'B'C'$ (рис. 84).

Задача завжди має єдиний розв'язок. ■

Задача 6.3. *Заданий $\triangle A'B'C'$ є зображенням заданого $\triangle ABC$ при певному паралельному проектуванні, як результат відповідного* *відображення* f, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. *Побудуйте точку* D' -- *зображення при даному проектуванні центроїда* D *трикутника* ABC.

Розв'язання. W Центроїдом трикутника називається точка перетину медіан цього трикутника. Дану точку називають також центром тяжіння трикутника. У евклідовій геометрії кожний трикутник має точно три медіани, які перетинаються у одній точці і діляться цією точкою у відношенні $2:1$, якщо рахувати від вершини. Оскільки при невиродженому паралельному проектуванні зображенням кожної медіани трикутника-оригінала є відповідна медіана трикутника-зображення (задача 6.1), зображення D' центроїда D трикутника ABC є центроїдом трикутника $A'B'C'$. Тобто, для побудови точки D' взагалі не треба розглядати трикутник-оригінал, достатньо побудувати дві медіани трикутника $A'B'C'$ і знайти точку D' як точку їх перетину. Можна також побудувати одну медіану трикутника $A'B'C'$ і знайти точку D' як точку, що ділить цю медіану у відношенні $2:1$, якщо рахувати від вершини. $\blacksquare$

Задача 6.4. *Заданий* $\triangle A'B'C'$ *є зображенням деякого* $\triangle ABC$ *при певному паралельному проектуванні, як результат відповідного відображення* f, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. *Трикутник-оригінал* ABC *загублено. Побудуйте точку* D' -- *зображення при даному проектуванні центроїда* D *трикутника* ABC.

На підставі попередніх міркувань зрозуміло, що, незалежно від форми $\triangle ABC$, достатньо побудувати центроїд D' трикутника $A'B'C'$.

Задача 6.5. *Заданий* $\triangle A'B'C'$ *є зображенням заданого* $\triangle ABC$ *при певному паралельному проектуванні, як результат відповідного відображення* f, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. *Побудуйте зображення при даному проектуванні середньої лінії трикутника* ABC, *паралельної до сторони* AB.

Розв’язання. W За умови задачі задані V ABC площини-оригіналу β і V $A'B'C'$ картинної площини α (рис. 85). Згідно теореми 4.2, кожний з цих трикутників може бути довільним.

Середньою лінією трикутника називається відрізок, що сполучає

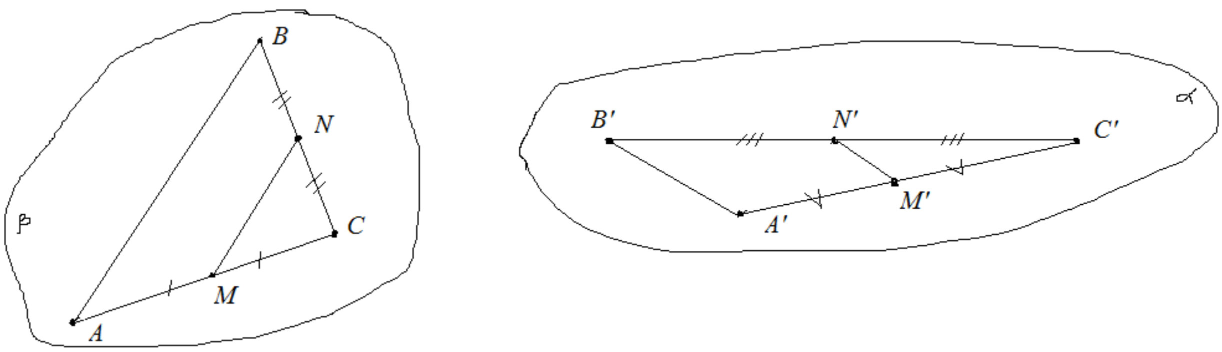


Рис.85

середини двох сторін цього трикутника. У евклідовій геометрії будь-який трикутник має три середні лінії, кожна середня лінія трикутника є паралельною до третьої сторони даного трикутника і дорівнює її половині. Отже, середня лінія трикутника ABC, яка є паралельною до сторони AB, сполучає середини сторін AC і BC. Нехай точка M є серединою сторони AC, точка N — серединою сторони BC. Відрізок MN — відповідна середня лінія трикутника ABC. Згідно наслідку з теореми 3.10, зображенням точки M є середина M' відрізка $A'C'$, а зображенням точки N — середина N' відрізка $B'C'$. Відрізок $M'N'$ є зображенням середньої лінії MN трикутника ABC. Одночасно він є середньою лінією трикутника $A'B'C'$, паралельною до сторони $A'B'$.

Отже, при невиродженому для трикутника паралельному проектуванні середня лінія трикутника-оригінала завжди зображається відповідною середньою лінією трикутника-зображення. Задача 6.5 має єдиний розв’язок, для його знаходження середню лінію MN трикутника-оригінала можна не будувати. ■

Задача 6.6. *Заданий* V$A'B'C'$ *є зображенням деякого* VABC *при певному паралельному проектуванні, як результат відповідного відображення* f,

$A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. *Трикутник-оригінал* ABC *загублено. Побудуйте зображення при даному проектуванні середньої лінії трикутника* ABC, *паралельної до сторони* AB.

Розв’язання. W За умови задачі задано лише V $A'B'C'$ картинної площини α (рис. 86). Зрозуміло, що, якщо невідомий трикутник-оригінал ABC зображено трикутником, проектування для площини (ABC) є невиродженим. Отже, як було обґрунтовано при розв’язанні задачі 6.5, незалежно від форми V ABC зображенням його середньої лінії, паралельної до сторони AB, буде середня лінія трикутника $A'B'C'$, паралельна до сторони $A'B'$. ■

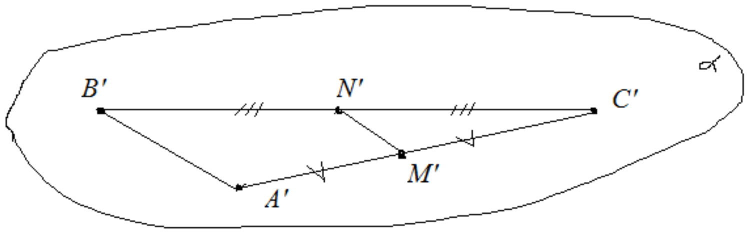


Рис.86

Задача 6.7. *Заданий* V$A'B'C'$ *є зображенням заданого* VABC *при певному паралельному проектуванні, як результат відповідного відображення* f, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Побудуйте зображення при даному проектуванні бісектриси BL трикутника ABC.

Розв’язання. W За умови задачі задані V ABC площини-оригіналу β і

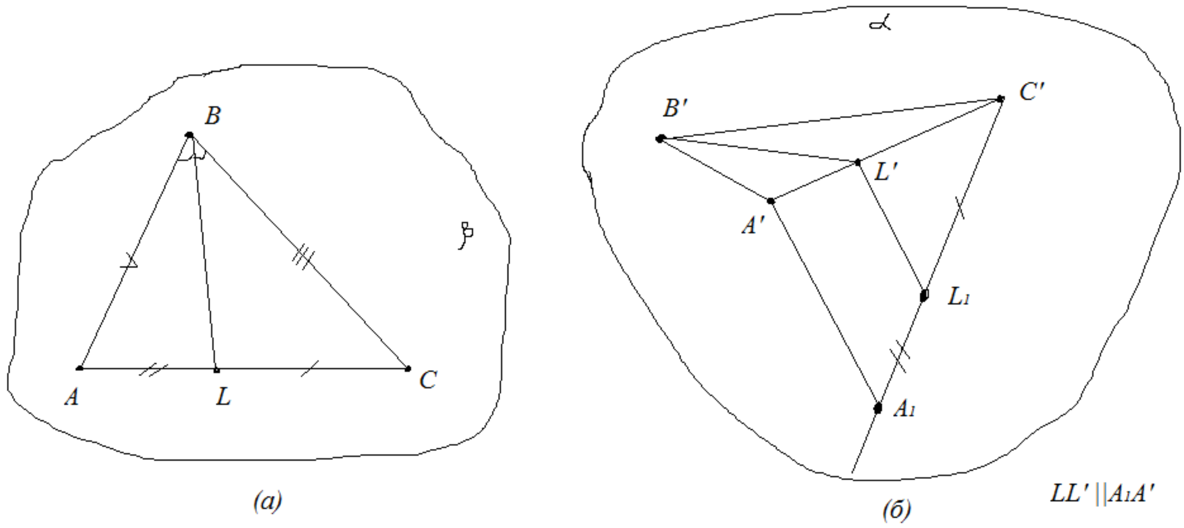
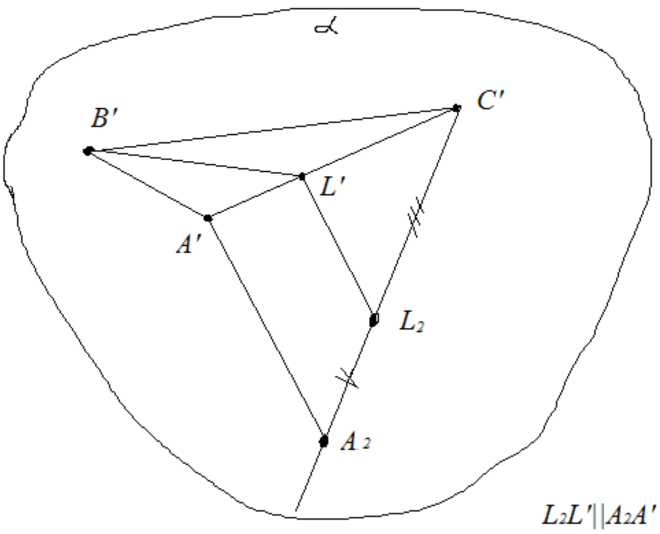


Рис.87

V $A'B'C'$ картинної площини α (рис. 87). Згідно теореми 4.2, обидва трикутники можуть бути довільними. Проведемо бісектрису BL трикутника ABC. Як відомо, це відрізок бісектриси $\angle ABC$, що сполучає вершину B з точкою на протилежній стороні AC $\left(\angle ABL = \angle LBC\right)$. Якщо зображенням трикутника площини β є трикутник, то розглянуте паралельне проектування для площини β і всіх її елементів є невиродженим. За теоремою 3.5, зображенням відрізка BL буде відрізок, для знаходження якого достатньо побудувати зображення кінців відрізка BL. Точка B' є зображенням точки B. Зображення L' точки L є внутрішньою точкою відрізка $A'C'$. Її однозначна побудова описана при розв'язанні задачі 3.9 розділу I і виконана на рис. 63б. Відрізок $B'L'$ є шуканим зображенням бісектриси BL.

Зрозуміло, що, на відміну від медіани, у загальному випадку відрізок $B'L'$ не є бісектрисою V $A'B'L'$.

Дійсно, відрізок BL є бісектрисою V ABC. Загальновідомою є наступна характеристична властивість бісектриси трикутника: бісектриса трикутника ділить протилежну сторону трикутника на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін цього трикутника: $\dfrac{AL}{LC} = \dfrac{AB}{BC}$. Отже, відрізок $B'L'$ буде бісектрисою V $A'B'C'$, тоді та тільки тоді, коли $\dfrac{A'L'}{L'C'} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$. Але, за побудовою $\dfrac{A'L'}{L'C'} = \dfrac{AL}{LC}$. Значить, для того, щоб зображенням бісектриси трикутника-оригінала була бісектриса трикутника-зображення, необхідно і достатньо, щоб $\dfrac{A'B'}{B'C'} = \dfrac{AB}{BC}$.



(б)

Рис.88

Але трикутники ABC і $A'B'C'$ можуть бути цілком довільними. ■

На відміну від задачі 6.1, при розв'язанні задачі 6.7 ми суттєво використовували трикутник-оригінал: будували його бісектрису BL, розглядали відрізки AL і LC. Характеристична властивість бісектриси трикутника вказує на те, що бісектрису BL можна було би і не будувати, а під час побудови точки L' на відповідному промені з початком у точці C' послідовно відкладати відрізки $C'L_2 = BC$ і $L_2A_2 = AB$ (рис. 88).

За нерівністю трикутника, для сторін V ABC справджується нерівність $AC < AB + BC$ або $AL + LC < AB + BC$. Тому у будь-якому випадку $C'A_2 > C'A_1$. Отже, з технічної точки зору такий шлях розв'язання задачі 6.7 не завжди є зручним.

Взагалі не використовувати трикутник-оригінал ABC при побудові зображення його бісектриси BL неможливо, про що свідчить розв'язок наступної задачі.

Задача 6.8. *Заданий* V$A'B'C'$ *є зображенням деякого* VABC *при певному паралельному проектуванні, як результат відповідного відображення* f, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. *Трикутник-оригінал загублено. Побудувати зображення при даному проектуванні бісектриси* BL *трикутника* ABC.

Розв'язання. W За умови задачі 6.8, як і за умови задачі 6.2, задано

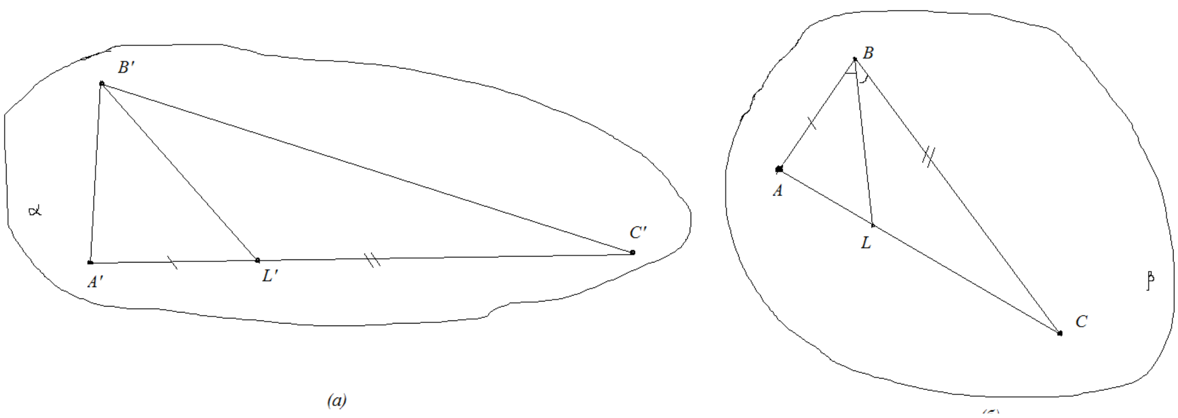


Рис.89

лише V $A'B'C'$ картинної площини α. Оскільки форма трикутника-оригінала ABC є невідомою, зрозуміло лише, що зображенням його бісектриси BL буде відрізок $B'L'$, де L' — внутрішня точка відрізка $A'C'$. (При невиродженому паралельному проектуванні, за теоремою 3.5, зображенням відрізка є відрізок, внутрішні точки відрізка-оригінала зображаються внутрішніми точками відрізка-зображення).

Справедливим є наступне твердження: за умови задачі 6.8, будь-який відрізок $B'L'$, де L' — внутрішня точка відрізка $A'C'$, можна вважати зображенням бісектриси BL трикутника-оригінала ABC.

Дійсно, нехай L' — довільна внутрішня точка сторони $A'C'$ трикутника $A'B'C'$ (рис. 89а). Розглянемо $\mathrm{V}\,ABC$, у якого $AB = A'L'$, $BC = L'C'$.(рис. 89б). За формою таких трикутників існує безліч, бо $\angle ABC$ може приймати довільні значення від $0°$ до $180°$. За теоремою 4.2, існує паралельне проектування, при якому зображенням $\mathrm{V}\,ABC$ є заданий умовою задачі $\mathrm{V}\,A'B'C'$. Бісектриса BL $\mathrm{V}\,ABC$ при цьому зображається таким відрізком $B'L''$, що точка L'' є внутрішньою точкою відрізка $A'C'$: $\dfrac{A'L''}{L''C'} = \dfrac{AL}{LC}$. Але $\dfrac{AL}{LC} = \dfrac{AB}{BC}$, згідно побудови, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'L'}{L'C'}$. Отже, L'' співпадає з L', відрізок $B'L'$ є зображенням бісектриси BL трикутника ABC при даному паралельному проектуванні. Вірність сформульованого твердження обґрунтовано. W

Задача 6.9. *Заданий* $\mathrm{V}A'B'C'$ *є зображенням заданого* $\mathrm{V}ABC$ *при певному паралельному проектуванні, як результат відповідного відображення* f, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. *Побудуйте точку* O' — *зображення при даному проектуванні інцентра* O *трикутника* ABC.

Розв'язання. W Інцентром трикутника називається точка перетину бісектрис даного трикутника. У евклідовій геометрії кожний трикутник має три бісектриси, які перетинаються у одній точці -- інцентрі цього трикутника. Інцентр трикутника є центром кола, вписаного у даний трикутник.

За умови задачі задано і трикутник-оригінал, і трикутник-зображення.

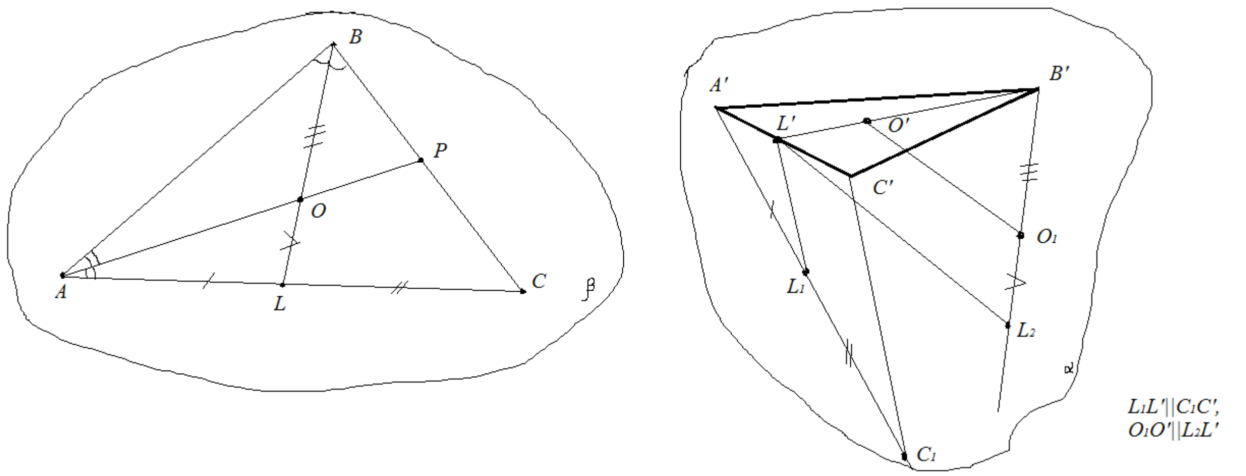


Рис.90

Отже, проектування для площини трикутника-оригінала є невиродженим. Для розв’язання задачі можна, як при розв’язанні задачі 6.7, побудувати зображення двох бісектрис трикутника ABC і визначити точку O' як точку перетину цих зображень.

Можна також побудувати дві бісектриси, наприклад, BL і AP трикутника-оригінала, визначити точку O як точку їх перетину, побудувати зображення $B'L'$ бісектриси BL, побудувати зображення O' точки O як точки відрізка BL. Такий варіант продемонстровано на рис. 90.

Використання трикутника-оригінала при обох варіантах побудов є неминучим. W

Задача 6.10. *Заданий* $\mathrm{V}A'B'C'$ *є зображенням деякого* $\mathrm{V}ABC$ *при певному паралельному проектуванні, як результат відповідного відображення* f, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. *Оригінал загублено. Побудуйте точку* O' *-- зображення при даному проектуванні інцентра* O *трикутника* ABC.

Розв’язання. W За умови задачі задано лише $\mathrm{V}\,A'B'C'$ картинної площини α. Зрозуміло, що, якщо невідомий трикутник-оригінал ABC зображено трикутником, проектування для площини (ABC) є невиродженим.

Доведемо, по-перше, що інцентр O довільного $\triangle ABC$ належить внутрішній області трикутника, утвореного середніми лініями трикутника ABC.

Нехай відрізки BL_1, AL_2 і CL_3 є бісектрисами трикутника ABC. BL_1, AL_2 і CL_3 перетинаються у інцентрі O даного трикутника (рис. 91). Відрізок AO є бісектрисою трикутника ABL_1 і тому $\frac{BO}{OL_1}=\frac{AB}{AL_1}$. Аналогічно, відрізок CO є бісектрисою $\triangle BCL_1$, $\frac{BO}{OL_1}=\frac{BC}{CL_1}$. Припустимо, що справедливою є $BO \le OL_1$ або $\frac{BO}{OL_1} \le 1$. Тоді

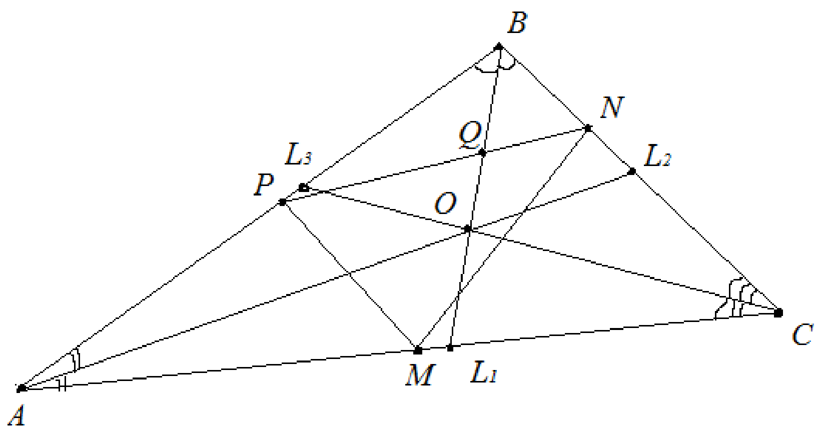


Рис.91

$\frac{AB}{AL_1} \le 1$, $AB \le AL_1$, $\frac{BC}{CL_1} \le 1$, $BC \le CL_1$, нерівність $AB+BC \le AL_1+CL_1$ або $AB+BC \le AC$. Отримали протиріччя з фактом існування трикутника ABC (у $\triangle ABC$ довжина кожної сторони є строго меншою за суму довжин двох інших сторін). Отже, $BO > OL_1$. Відомо, що середня лінія PN трикутника ABC, яка є паралельною до сторони AC, ділить навпіл всі відрізки, що сполучають вершину B цього трикутника з точками на протилежній стороні AC. У тому числі, середня лінія PN ділить навпіл і бісектрису BL_1. Це означає, що $BT = TL_1$, де точка T є точкою перетину середньою лінією PN бісектриси BL_1. Але тоді $BT < BO$, відрізок BO перетинає пряму PN у внутрішній точці T, точки B і O лежать по різні сторони відносно прямої PN. Аналогічно, точки C і O лежать по різні сторони відносно прямої MN, якщо відрізок MN є середньою лінією трикутника ABC, паралельною до сторони AB. Так само точки A і O лежать по різні сторони відносно прямої MP, якщо відрізок MP є середньою лінією трикутника ABC, паралельною до сторони BC. Трикутник MPN утворено середніми лініями трикутника ABC. Його внутрішня область — це перетин саме тих півплощин, відповідно відносно прямих PN, MN і MP, яким належить точка O. Таким чином, доведено, що інцентр довільного $\triangle ABC$ належить внутрішній області трикутника, утвореного середніми лініями $\triangle ABC$.

Оскільки за умови даної задачі $\triangle A'B'C'$ є зображенням деякого $\triangle ABC$ при певному паралельному проектуванні, згідно задач 6.5 і 6.6 середня лінія трикутника-оригінала завжди зображається середньою лінією трикутника-зображення, згідно наслідків 2 і 3 з теореми 4.1., внутрішня область трикутника-оригінала завжди зображається внутрішньою областю трикутника-зображення,

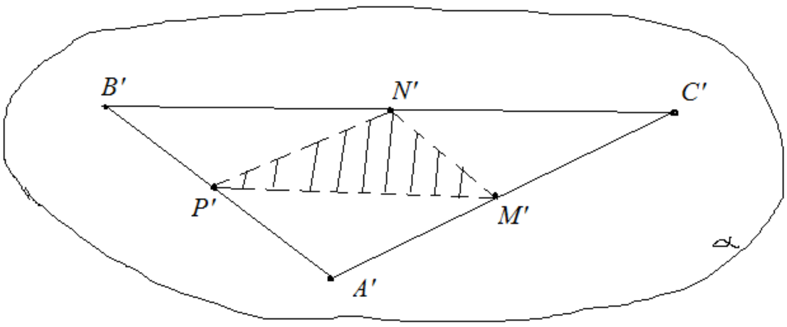


Рис.92

зображення O' інцентра O трикутника-оригінала належить внутрішній області трикутника $M'P'N'$, утвореного середніми лініями трикутника $A'B'C'$, тобто, знаходиться у області, заштрихованій на рис. 92.

Обгрунтуємо тепер, що будь-яка точка O' внутрішньої області трикутника $M'P'N'$, утвореного середніми лініями трикутника $A'B'C'$, може бути зображенням інцентра O загубленого трикутника-оригінала ABC. Тобто, той факт, що для довільної точки O' всередині $\triangle M'P'N'$, утвореного середніми лініями $\triangle A'B'C'$, існує трикутник ABC з інцентром у точці O, який при певному паралельному проектуванні зображається трикутником $A'B'C'$, інцентр O при цьому зображається точкою O'.

Нехай точка O' є довільною точкою внутрішньої області $\triangle M'P'N'$. Проведемо промінь $A'O'$. Цей промінь лежить у внутрішній області $\angle B'A'C'$ і тому перетинає відрізок $B'C'$ у певній точці L' (рис. 93), $B'L' = \lambda \cdot L'C'$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $0<\lambda\le 1$. Середня лінія $P'M'$ трикутника $A'B'C'$ ділить всі відрізки, що сполучають точку A' з точками на стороні $B'C'$ трикутника $A'B'C'$ навпіл. Отже, відрізок $A'L'$ перетинає середню лінію $P'M'$ у такій точці F', що $A'F'=F'L'$. Якщо точка L' не співпадає з точкою N' ($\lambda\ne 1$), то промінь $A'L'$ у точці L' перетинає відрізок $B'N'$ з кінцями на сторонах $\angle B'A'N'$. Тоді він перетинає у певній точці Q' і відрізок $P'N'$ з кінцями на сторонах цього кута. Точки A' і N' лежать по різні сторони відносно прямої $P'M'$ тому, що відрізок $A'N'$ перетинає пряму $P'M'$ (чотирикутник $A'P'N'M'$ є паралелограмом з діагоналями $A'N'$ і $P'M'$). Точки N' і Q' лежать по один бік відносно прямої $P'M'$ тому, що пряма $P'M'$ перетинає пряму $N'Q'$ у точці P', яка лежить поза відрізком $Q'N'$. Отже, точки A' і Q' лежать по різні сторони відносно прямої $P'M'$, точка F' лежить між точками A' і Q'. Точка O' лежить між точками F' і Q', бо вона знаходиться всередині трикутника $M'P'N'$.

Промінь $C'F'$ проходить між сторонами $\angle A'C'B'$ і перетинає сторону

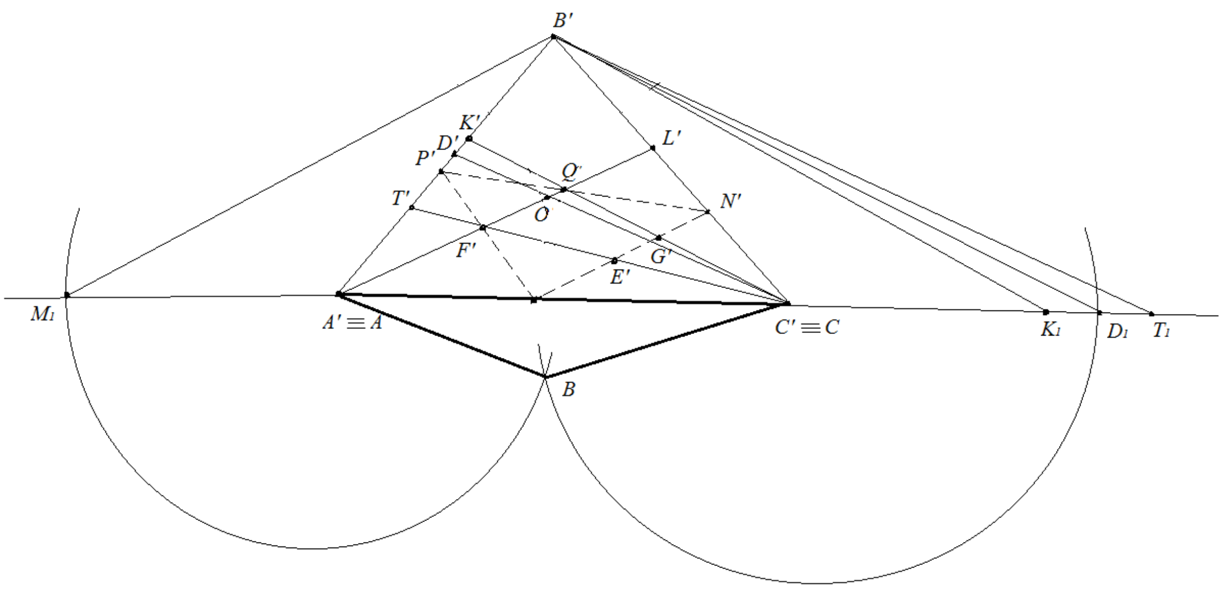


Рис93

$A'B'$ трикутника $\triangle A'B'C'$ у певній точці T'. Аналогічно, промінь $C'Q'$ перетинає відрізок $A'B'$ у певній точці K', промінь $C'O'$ — у певній точці D'.

Оскільки промінь $C'O'$ проходить між сторонами $\angle T'C'K'$, то точка D' лежить між точками T' і K'.

Знайдемо відношення $B'K':K'A'$. Промінь $C'K'$ перетинає середню лінію $M'N'$ у певній точці G', $M'N' \parallel A'B'$.

Тому $\dfrac{B'K'}{K'A'} = \dfrac{N'G'}{G'M'} = \dfrac{N'Q'}{C'M'} = = \dfrac{2 \cdot N'Q'}{A'C'} = \dfrac{2 \cdot L'N'}{L'C'}$. З іншого боку $\dfrac{B'L'}{L'C'} = \dfrac{\lambda}{1}$; $\dfrac{B'L'}{B'L' + L'C'} = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$; $\dfrac{B'L'}{B'C'} = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$; $\dfrac{B'L'}{B'N'} = \dfrac{2 \cdot B'L'}{B'C'} = \dfrac{2 \cdot \lambda}{\lambda+1}$;

$\dfrac{B'N'}{B'L'} = \dfrac{\lambda+1}{2 \cdot \lambda}$; $\dfrac{L'N'}{B'L'} = \dfrac{B'N' - B'L'}{B'L'} = \dfrac{1-\lambda}{2 \cdot \lambda}$; $\dfrac{L'N'}{L'C'} = \dfrac{L'N'}{B'L'} \cdot$

$\cdot \dfrac{B'L'}{L'C'} = \dfrac{1-\lambda}{2 \cdot \lambda} \cdot \lambda = \dfrac{1-\lambda}{2}$; $\dfrac{B'K'}{K'A'} = \dfrac{2(1-\lambda)}{2}$; $\dfrac{B'K'}{K'A'} = 1-\lambda$.

Знайдемо відношення $B'T':T'A'$. Нехай промінь $C'T'$ перетинає середню лінію $M'N'$ у певній точці E'. Тоді $\dfrac{B'T'}{T'A'} = \dfrac{N'E'}{E'M'} = \dfrac{N'C'}{F'M'} = \dfrac{2 \cdot N'C'}{L'C'} = \dfrac{B'C'}{L'C'} =$

$= \dfrac{B'C'}{B'C' - B'L'} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{B'L'}{B'C'}} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda+1}} = \lambda + 1$. Проведемо через точку B' пряму

$B'M_1 \parallel A'L'$ до перетину з прямою $A'C'$ у точці M_1. $\dfrac{M_1A'}{A'C'} = \dfrac{B'L'}{L'C'} = \lambda$; $M_1A' =$

$= \lambda \cdot A'C'$. Проведемо через точку B' прямі $B'K_1 \parallel C'K'; B'D_1 \parallel C'D'; B'T_1 \parallel C'T'$ до перетину з прямою $A'C'$ відповідно у точках $K_1,\ D_1,\ T_1$. Зрозуміло, що промінь $B'D_1$ буде проходити між сторонами $\angle K_1B'T_1$ і тому точка D_1 буде лежати між точками K_1 і T_1. $\dfrac{C'K_1}{A'C'} = \dfrac{B'K'}{K'A'} = 1-\lambda$; $C'K_1 = (1-\lambda) \cdot A'C'$;

$\dfrac{C'T_1}{A'C'} = \dfrac{B'T'}{T'A'} = 1+\lambda$; $C'T_1 = (1+\lambda) \cdot A'C'$; $C'K_1 < C'D_1 < C'T_1$.

Доведемо, що існує $\triangle ABC$ зі сторонами $AC = A'C'$, $AB = A'M_1$, $BC = C'D_1$. Як було доведено, $A'M_1 = \lambda \cdot A'C'$, $(1-\lambda) \cdot A'C' < C'D_1 < (1+\lambda) \cdot A'C'$; $A'C' <$ $< C'D_1 + A'M_1$; $(1-2\lambda) \cdot A'C' <$ $C'D_1 - A'M_1 < A'C'$. $0 < \lambda < 1,\ -2 < -2\lambda < 0$;

$-1<1-2\lambda<1$. $-A'C'<(1-2\lambda)\cdot A'C'<A'C'$; $-A'C'<C'D_1-A'M_1<A'C'$.

$|C'D_1-A'M_1|<A'C'$.

Отже, відрізок $A'C'$ менший за суму відрізків $A'M_1$ і $C'D_1$, але більший за модуль їх різниці, $\triangle ABC$ існує. Такий трикутник легко побудувати, прийнявши точку A' за точку A, точку C' за точку C і знайшовши точку B як точку перетину кола з центром у точці A' радіусу $A'M_1$ і кола з центром у точці C' радіусу $C'D_1$.

Якщо $\lambda=1$, точка L' співпадає з точкою N', точка Q' з точкою N', точка K' з точкою B', $B'T'=2A'T'$, $M_1A'=A'C'$, $C'T_1=2A'C'$, $0<C'D_1<2A'C'$, $A'C'<C'D_1+M_1A'$; $-A'C'<C'D_1-M_1A'<A'C'$; $|C'D_1-M_1A'|<A'C'$. Тобто, відповідний $\triangle ABC$ також існує. У $\triangle ABC$ $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{B'L'}{L'C'}$, $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{A'D'}{D'B'}$. Звідси випливає, що зображенням інцентра O трикутника ABC буде саме точка O', як точка перетину відрізків $A'L'$ і $C'D'$, що зображають бісектриси AL і CD трикутника ABC. ■

Задача 6.11. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f висоти CH трикутника ABC.*

Розв'язання. WЗа умови даної задачі задані $\triangle ABC$ площини-оригіналу β і $\triangle A'B'C'$ картинної площини α (рис. 90). Згідно теореми 4.2, кожний з цих трикутників може бути довільним, розглянуте паралельне проектування для площини β є невиродженим.

Як відомо, висотою трикутника називається перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить протилежну сторону цього трикутника. Проведемо перпендикуляр CH до прямої AB. За теоремою 3.4, зображенням відрізка CH буде відрізок, для знаходження якого достатньо побудувати зображення кінців відрізка CH. Точка C' є зображенням точки C. Зображення H' точки H належить прямій $A'B'$. Однозначна побудова

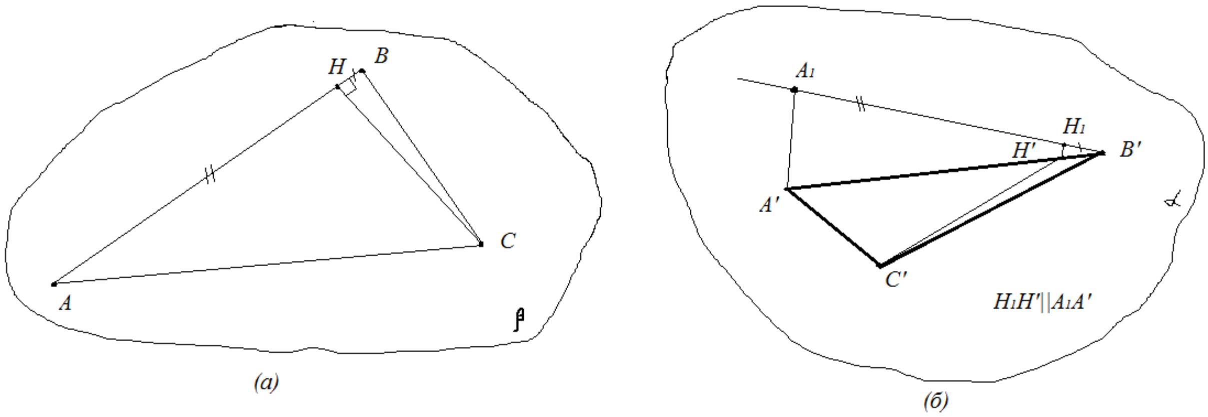


Рис.90

точки H' описана при розв'язанні задачі 39 розділу I і виконана на рис. 90б. Відрізок $C'H'$ є шуканим зображенням висоти CH. У загальному випадку відрізок $C'H'$ не є висотою $\triangle A'B'C'$. ■

При наведеному розв'язанні задачі 6.11 було суттєво використано трикутник-оригінал. Подальші міркування обґрунтують, що для даної задачі це є необхідним.

Задача 6.12. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням деякого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f. $(A' = f(A),\ B' = f(B),\ C' = f(C))$, але оригінал загублено. Побудуйте зображення при проектуванні f висоти CH трикутника ABC.*

Розв'язання. WЗа умови даної задачі задано $\triangle A'B'C'$ картинної площини α (рис. 71). Форма трикутника-оригінала ABC є невідомою, тому зрозуміло

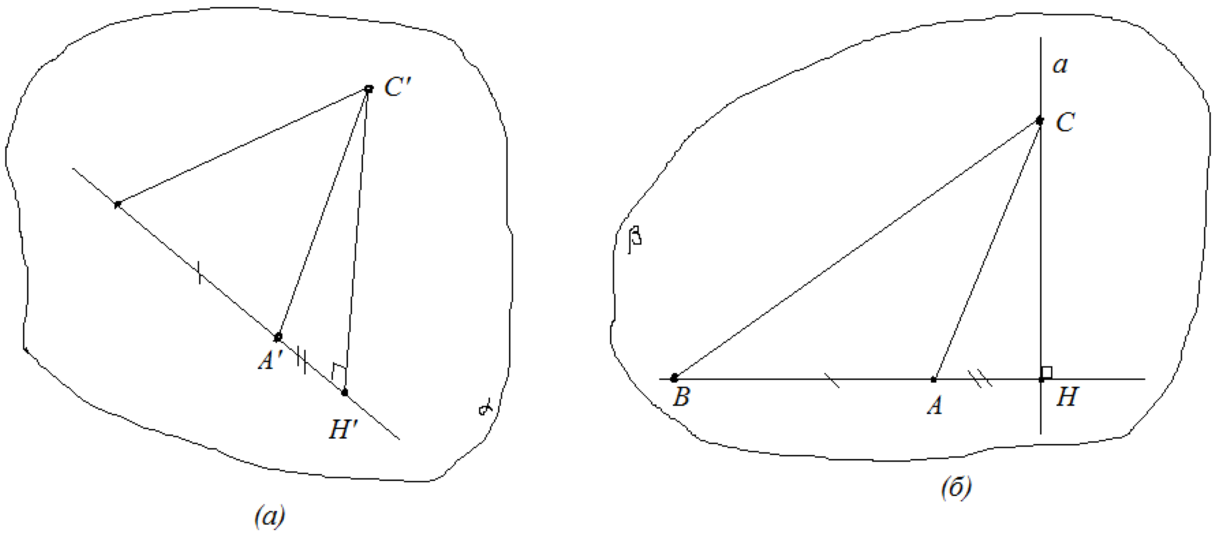


Рис.91

лише, що зображенням його висоти CH буде відрізок $C'H'$, де точка H' лежить на прямій $A'B'$. Справедливим є наступне твердження: за умови задачі 6.12, будь-який відрізок $C'H'$, де точка H' належить прямій $A'B'$, можна вважати зображенням висоти CH трикутника ABC.

Дійсно, нехай H' довільна точка прямої $A'B'$ (рис. 91а). Нехай, для визначеності, точка A' лежить між точками B' і H'. Розглянемо відрізок $AB = A'B'$ і таку точку H на прямій AB, що точка A лежить між точками B і H, $AH = A'H'$. Через точку H проведемо пряму a, перпендикулярну до прямої AB. На цій прямій оберемо довільну точку C, відмінну від точки H. Отримаємо трикутник ABC, для якого відрізок CH є висотою. За теоремою 5. 1 існує невироджене для площини (ABC) паралельне проектування, при якому зображенням трикутника ABC є трикутник $A'B'C'$. Оскільки при даному проектуванні зображенням точки A є точка A', а точки B — точка B', за теоремою 3. 2, зображенням точки H є така точка H_1 прямої AB, що точка A' лежить між точками B' і H_1, $\dfrac{A'B'}{A'H_1} = \dfrac{AB}{AH}$. Але за побудовою $AB = A'B'$.

Отже, $A'H_1 = AH$. З іншого боку, точка H' на прямій $A'B'$ розташована так, що точка A' лежить між точками B' і H_1, $A'H' = AH$. Звідси випливає, що точка H_1 співпадає з точкою H', саме точка H' є зображенням точки H при даному паралельному проектуванні, відрізок $C'H'$ є зображенням висоти CH.

Таким чином, для $\triangle A'B'C'$ і відрізка $C'H'$ знайдено можливий оригінал, справедливість сформульованого твердження обґрунтовано. Форма знайденого оригінала не визначена однозначно, вона залежить від розташування точки C на прямій a. ■

Задача 6.13. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні*

$f.(A' = f(A),\ B' = f(B),\ C' = f(C))$. *Побудуйте зображення* T' *при проектуванні* f *ортоцентра* T *трикутника* ABC.

Розв'язання. W Ортоцентром трикутника називається точка перетину прямих, що містять висоти даного трикутника. У евклідовій геометрії

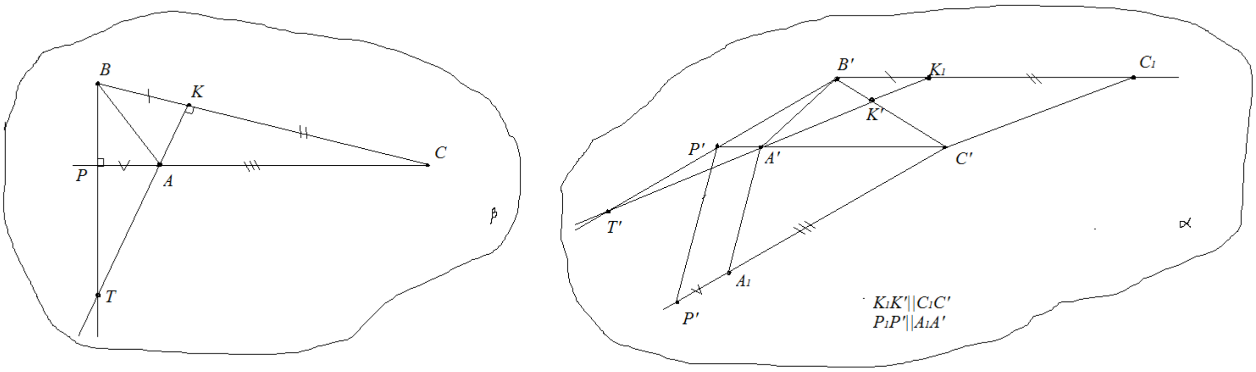


Рис.92

кожний трикутник має точно три висоти, прямі, що їх містять, перетинаються у одній точці — ортоцентрі даного трикутника.

За умови сформульованої задачі задано і трикутник-оригінал, і трикутник-зображення. Отже, проектування для площини трикутника-оригінала є невиродженим. ■

Для розв'язання задачі варто за методом, запропонованим при розв'язанні задачі 6.11, побудувати відрізки, що є зображеннями двох висот трикутника ABC і визначити шукану точку T' як точку перетину прямих, що ці відрізки містять. Такі побудови продемонстровані на рис. 92. Використання трикутника-оригінала є неминучим.

Задача 6.14. *Відомо, що заданий трикутник* $A'B'C'$ *є зображенням деякого трикутника* ABC *при певному паралельному проектуванні* $f.(A' = f(A),\ B' = f(B),\ C' = f(C))$, *але оригінал загублено. Побудуйте зображення* T' *при проектуванні* f *ортоцентра* T *трикутника* ABC.

Розв'язання. W По-перше, з'ясуємо, де по відношенню до трикутника ABC може знаходитися його ортоцентр залежно від форми цього трикутника.

Припустимо, спочатку, що трикутник ABC є гострокутним (рис. 93). Проведемо його висоту AH, точка H належить прямій BC. Зрозуміло, що точка H не співпадає ані з точкою B, ані з точкою C, бо $\angle ABC \neq 90°$ *і* $\angle ACB \neq 90°$.

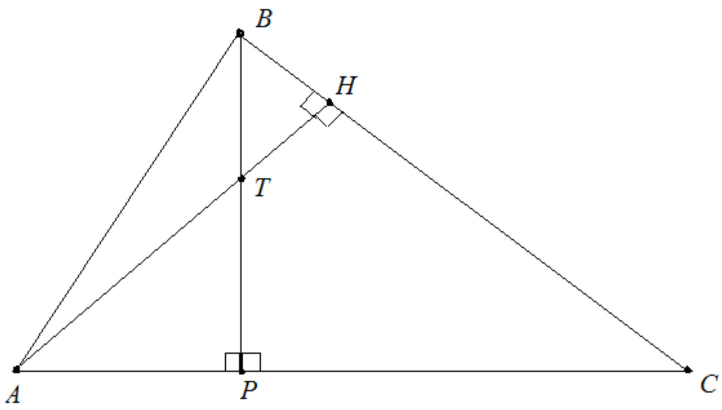


Рис.93

Отже, існують прямокутні трикутники ABH і ACH. У $\triangle ABH$ кут $\angle ABH$ є гострим. Це означає, що саме кут ABC співпадає з кутом ABH, точка H є внутрішньою точкою променя BC. Аналогічно з кутом ACH співпадає кут ACB і тому точка H є внутрішньою точкою променя CB. Звідси випливає, що точка H є внутрішньою точкою відрізка BC, промінь AH проходить між сторонами кута BAC, всі внутрішні точки відрізка AH лежать у внутрішній області трикутника ABC.

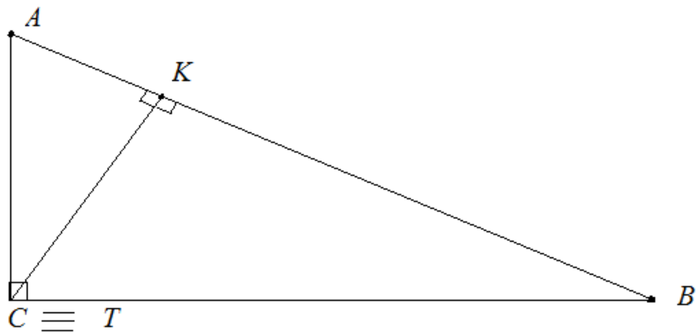


Рис.94

Проведемо висоту BP трикутника ABC. Для неї є аналогічні міркування: промінь BP проходить між сторонами кута ABC, всі внутрішні точки відрізка BP належать внутрішній області трикутника ABC. За відомим фактом евклідової геометрії промінь, що виходить з вершини кута і проходить між його сторонами, перетинає кожний відрізок з кінцями на сторонах цього кута. Отже, промінь BP перетинає відрізок AH, промінь AH перетинає відрізок BP. Звідси випливає, що у ортоцентрі T трикутника

ABC у випадку гострокутного трикутника ABC перетинаються саме висоти трикутника ABC, ортоцентр T гострокутного трикутника ABC знаходиться у його внутрішній області.

Ортоцентр прямокутного трикутника, як відомо, знаходиться у вершині його прямого кута (рис. 94).

Тепер розглянемо той випадок, коли $\triangle ABC$ є тупокутним. Нехай його кут BAC є тупим. Тоді кути $\angle ABC$ і $\angle ACB$ є гострими (рис. 95). Як тільки-но було обґрунтовано у даному випадку висота AH трикутника ABC є відрізком, всі внутрішні точки якого належать внутрішній області трикутника ABC, кінець H якого є внутрішньою точкою сторони BC. Трикутник AHC є прямокутним з прямим кутом AHC. Отже, його кут HAC є гострим, гострим є і вертикальний до нього кут MAL.

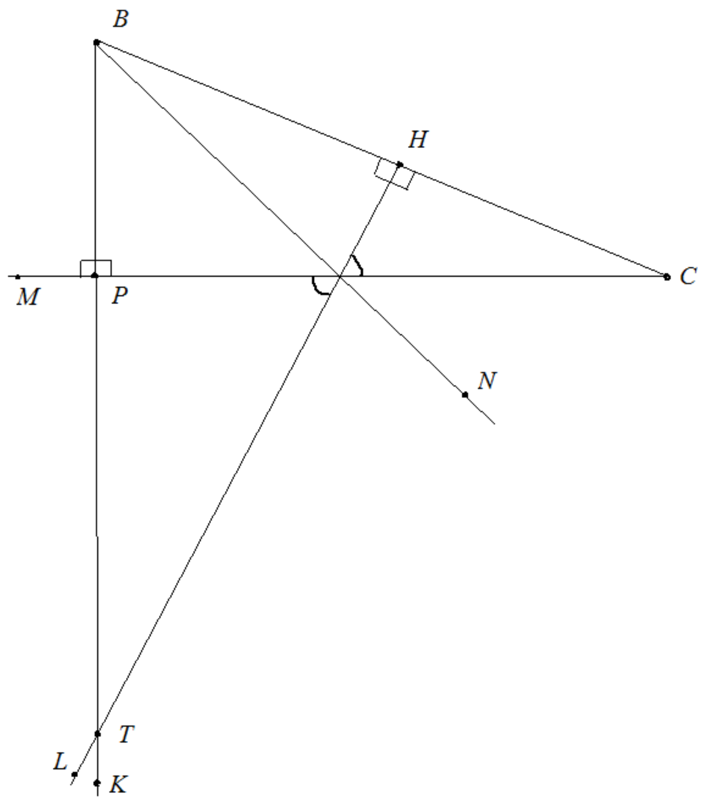


Рис.95

Оскільки промінь AH проходить між сторонами тупого кута BAC, бо у внутрішній точці H перетинає відрізок BC з кінцями на сторонах цього кута, промінь AL, доповняльний до променя AH, лежить внутрішній області кута MAN, вертикального до кута BAC.

Проведемо висоту BP трикутника ABC. Точка P належить прямій AC. Вона не співпадає з точкою A, бо кут BAC не є прямим. Утворюється прямокутний трикутник BAP. Його кут BAP є гострим, отже, він не співпадає з кутом трикутника BAC, точка P лежить на промені AM, доповняльному до променя AC.

Пряма AC є січною для прямих BP і AH, першу з них вона перетинає у точці P, другу — у точці A. Розглянемо ту півплощину відносно прямої AC, яка не містить точку B. Дана півплощина містить промінь PK прямої BP, доповняльний до променя PB, і промінь AL прямої AH. Промені PK і AL утворюють з прямою AC внутрішні односторонні кути KPA і MAL. Перший з них є прямим, другий — гострим. Отже, сума цих кутів є меншою за $180°$, промені PK і AL, згідно теореми Евкліда, перетинаються у певній точці. Зрозуміло, що ця точка є і точкою перетину прямих BP і AH, тобто, ортоцентром T трикутника ABC.

Таким чином, доведено, що у даному випадку ортоцентр T трикутника ABC лежить у зовнішній області трикутника ABC, належить внутрішній

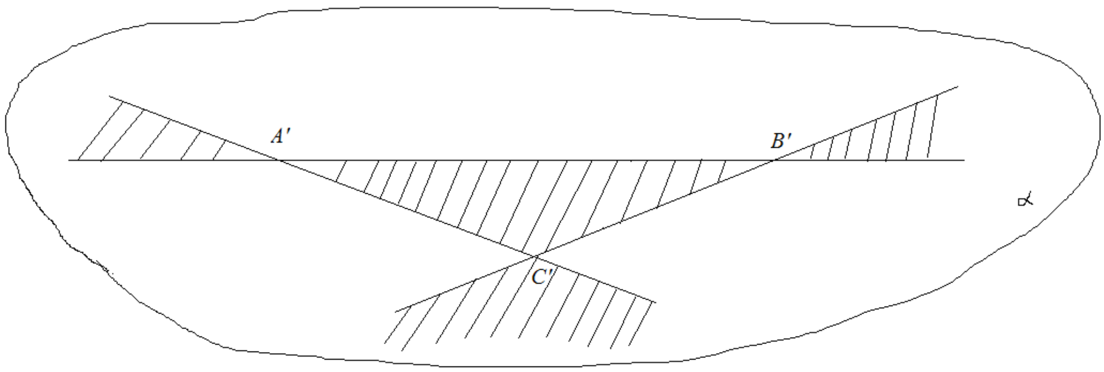


Рис.96

області кута вертикального до тупого кута трикутника ABC.

У результаті встановлені можливі варіанти розміщення ортоцентра T трикутника ABC у залежності від форми трикутника ABC. Одночасно, в силу того, що при невиродженому паралельному проектуванні півплощина зображується півплощиною (теорема 3.5) і тому внутрішня область трикутника його внутрішньою областю, внутрішня область кута — внутрішньою областю, доведено, що, якщо трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника ABC при паралельному проектуванні, то зображення T'

ортоцентра T трикутника ABC обов'язково належить області заштрихованій на рис. 96, точки A', B', C' включно.

Нехай відомо, що трикутник $A'B'C'$ є зображенням певного трикутника ABC при паралельному проектуванні. Оберемо довільну точку T' всередині трикутника $A'B'C'$ (рис. 97). Обґрунтуємо, що існує такий трикутник ABC з ортоцентром T, який при певному паралельному проектуванні зображується трикутником ABC так, що саме точка T' стає зображенням точки T.

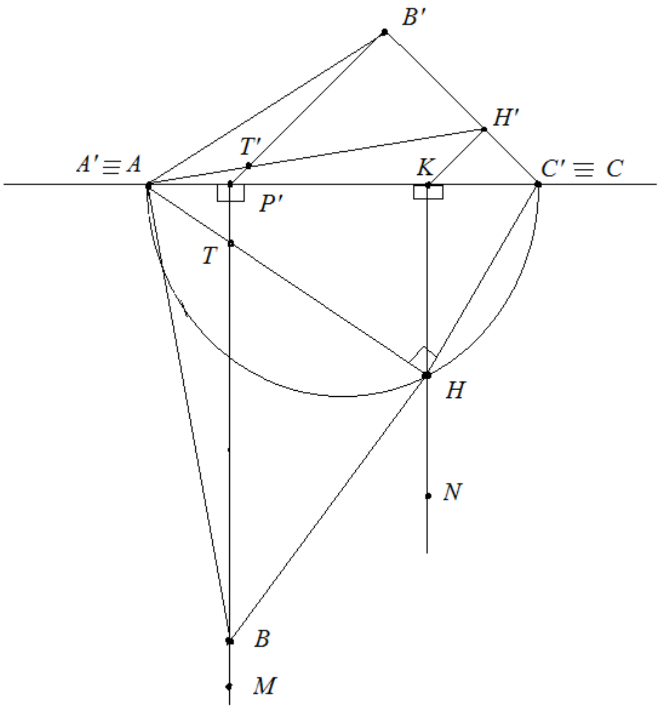


Рис.97

У трикутнику $A'B'C'$ через точку T' проведемо відрізки $A'H'$ і $B'P'$ до перетину з відповідними сторонами трикутника $A'B'C'$ у точках H' і P' (існування подібних точок нескладно обгрунтувати). Проведемо пряму $H'K \parallel B'P'$ до перетину з відрізком $P'C'$ у точці K. Далі, у тій півплощині відносно прямої $A'C'$, що не містить точку B', через точки P' і K проведемо промені $P'M$ і KN, перпендикулярні до прямої $A'C'$. На відрізку $A'C'$, як на діаметрі, у тій самій півплощині побудуємо півколо. Позначимо через H точку перетину цього півкола з променем KN, через B — точку перетину променя CH з променем $P'M$ (існування цих точок нескладно обґрунтувати). Будемо вважати, що точка A співпадає з точкою A', точка C — з точкою C'. Розглянемо трикутник ABC. За теоремою 4. 1, існує паралельне проектування f, при якому саме трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника ABC, точка A' — зображенням точки A, точка B'

— зображенням точки B, точка C' — зображенням точки C. Відрізок BP' є висотою трикутника ABC за побудовою. Кут AHC дорівнює $90°$, бо є тим кутом, вписаним у коло, який спирається на діаметр цього кола. Отже, відрізок AH також є висотою трикутника ABC. Точка T перетину висот BP' і AH є ортоцентром трикутника ABC, що неважко обґрунтувати. Згідно побудови, відрізок $A'P'$ співпадає з відрізком AP', відрізок $P'C'$ — з відрізком PC. Обидва відрізка належать одній прямій, тобто, при паралельному проектуванні зберігається відношення їх довжин. Це означає, що при паралельному проектуванні f зображенням точки P' є саме ця точка, зображенням висоти BP' трикутника ABC — відрізок $B'P'$. Прямі BP' і KH є паралельними між собою як два перпендикуляри до однієї прямої. Тоді за теоремою Фалеса для кута ACB випливає, що $\frac{BH}{HC} = \frac{P'K}{KC'}$. За побудовою $H'K \parallel B'P'$. Звідси, за теоремою Фалеса для кута $A'C'B'$ випливає, що $\frac{P'K}{KC'} = \frac{B'H'}{H'C'}$. Отже, $\frac{BH}{HC} = \frac{B'H'}{H'C'}$, точка H' є зображенням точки H при паралельному проектуванні f, відрізок $A'H'$ — зображенням висоти AH трикутника ABC. Відрізки $B'P'$ і $A'H'$ перетинаються у точці T'. Точка перетину відрізків-оригіналів при невиродженому паралельному проектуванні зображується точкою перетину відрізків — їх зображень. Значить, $f(T) = T'$, шуканий трикутник ABC знайдено.

Якщо точка T' співпадає з однією з вершин трикутника $A'B'C'$, для визначеності, з вершиною C', то зрозуміло, що за оригінал можна прийняти довільний прямокутний трикутник ABC з прямим кутом при вершині C (і лише такий трикутник).

Нехай тепер обрана точка T' знаходиться всередині кута, який є вертикальним до кута даного трикутника $A'B'C'$, нехай, для визначеності, кута $B'A'C'$ (рис. 98). Побудуємо відрізок $T'B'$ та проведемо промінь $T'A'$ до перетину зі стороною $B'C'$ трикутника $A'B'C'$ у точці (така точка H' буде існувати завдяки вищевказаному розташуванні точки T'). Відрізок $T'B'$

перетне пряму $A'C'$, а саме промінь, доповняльний до променя $A'C'$, у певній точці P'. Через точку H' проведемо промінь $H'N$, паралельний до відрізка $B'T'$, до перетину з відрізком $A'C'$ у певній точці K. Така точка буде існувати, бо промінь $H'N$ належить внутрішній області кута $A'H'C'$.

Дійсно, точка K буде існувати як точка перетину променя $H'N$ з прямою $A'C'$. Кут $P'T'A'$ дорівнює кутові $KH'A'$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих $T'B'$ і $T'B'$ і січній $T'H'$. Кут $T'H'C'$ є зовнішнім кутом для трикутника $T'B'H'$. Отже, $\angle T'H'C' = \angle B'T'H' +$ $+\angle T'B'H' = \angle A'H'K + \angle T'B'H'$; $\angle T'H'C' > \angle A'H'K$. Промені $H'K$ і $H'C'$ належать одній півплощині відносно прямої $T'H'$. Тому доведена нерівність свідчить про те, що промінь $H'N$ проходить між сторонами кута $A'H'C'$. Це обґрунтовує той факт, що точка K є внутрішньою точкою відрізка $A'C'$.

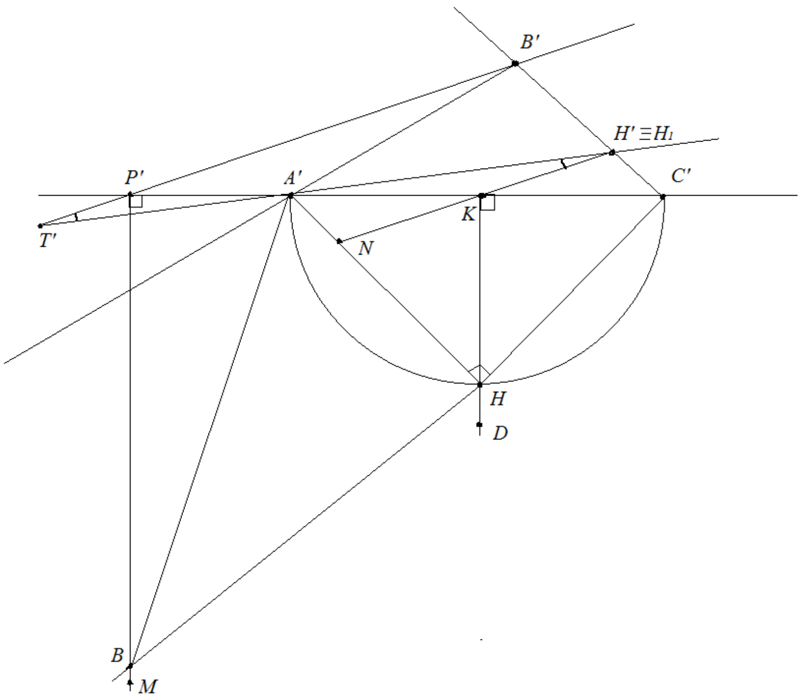


Рис.98

У тій півплощині відносно прямої $A'C'$, що містить точку B', на відрізку $A'C'$ як на діаметрі, побудуємо півколо. У тій самій півплощині побудуємо промені $P'M$ і KD, перпендикулярні до прямої $A'C'$. Промінь KD перетне побудоване півколо у певній точці H.

Проведемо промінь $C'H$ до перетину з променем PM у певній точці B. Розглянемо трикутник $A'BC'$, $\angle A'HC' = 90°$, бо є кутом, вписаним у коло, який спирається на діаметр. Отже, відрізок $A'H$ є висотою даного трикутника. Іншою його висотою є, за побудовою, відрізок BP'.

За теоремою 3. 2. будь-який трикутник може бути зображенням будь-якого трикутника при певному паралельному проектуванні. Розглянемо паралельне проектування f, при якому трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника $A'BC'$(зображенням точки B є точка B', для точок A' і C' оригінали співпадають із зображеннями). При цьому проектуванні для точки P' зображення також, очевидно, співпадає з оригіналом, зображенням висоти BP' буде відрізок $B'P'$. Зображенням точки H буде така точка H_1 відрізка $B'C'$, що $\frac{B'H_1}{H_1C'} = \frac{BH}{HC'}$. Але за теоремою Фалеса для кута $P'C'B$ ($KH \parallel P'B$ як два перпендикуляра до однієї прямої) $\frac{BH}{HC'} = \frac{PK}{KC'}$. За теоремою Фалеса для кута $B'C'P'$ ($H'K \parallel B'P'$ за побудовою) $\frac{PK}{KC'} = \frac{B'H'}{H'C'}$. Отже, $\frac{BH}{HC'} = \frac{B'H'}{H'C'}$.

Звідси випливає, що точка H_1 співпадає з точкою H'. Відрізок $A'H'$ є зображенням висоти $A'H$ трикутника $A'BC'$ при паралельному проектуванні f. Прямі $B'P'$ і $A'H'$ перетинаються у точці T'. При невиродженому паралельному проектуванні точка перетину прямих–зображень є зображенням точки перетину прямих–оригіналів. Отже, при паралельному проектуванні f точка T' є зображенням ортоцентра T трикутника $A'BC'$. Шуканий оригінал для трикутника $A'B'C'$ і точки T' у випадку, що розглядається, знайдено.

Таким чином, обґрунтовано, що довільна точка заштрихованої на рис. 74 області, точки A', B' і C' включно, і лише така точка може бути зображенням ортоцентра трикутника–оригінала ABC, якщо цей трикутник–оригінал загублено. ■

Задача 6.15. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f.*

Побудуйте зображення при проектуванні f серединного перпендикуляра до сторони AB трикутника ABC.

Розв'язання. WЗа умови даної задачі задані $\triangle ABC$ площини β і $\triangle A'B'C'$ картинної площини α (рис. 99). Згідно теореми 4.2, обидва трикутника можуть бути довільними. Серединним перпендикуляром до сторони AB трикутника ABC називається пряма, що проходить через

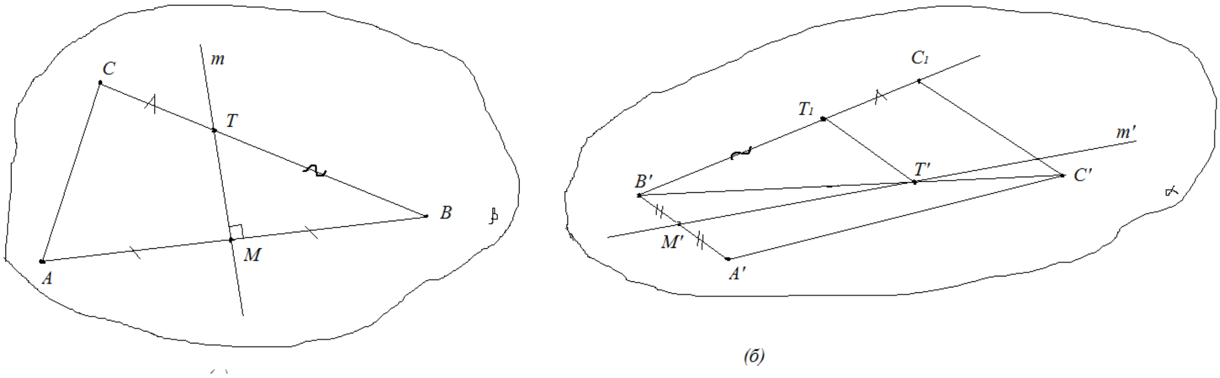


Рис.99

середину M сторони AB перпендикулярно до прямої AB. Зображенням відрізка AB є відрізок $A'B'$. Зображенням середини M відрізка AB — точка M', що є серединою відрізка $A'B'$.

Проведемо серединний перпендикуляр m до сторони AB трикутника ABC. Пряма m або пройде через вершину C цього трикутника, або у певній внутрішній точці перетне сторону AC чи сторону CB. Нехай, для визначеності, пряма m перетинає сторону CB у точці T. Згідно теореми 3. 5, зображення T' точки T є внутрішньою точкою відрізка $C'B'$ і може бути побудовано на картинній площині α однозначно, за теоремою Фалеса, за допомогою циркуля і лінійки (рис. 99 б). Пряма $M'T'$ є шуканим зображенням m' серединного перпендикуляра m до сторони AB трикутника ABC при даному паралельному проектуванні f.

Зрозуміло, що, згідно теореми 5. 1, сформульована задача завжди має єдиний розв'язок. ■

Задача 6.16. *Відомо, що заданий* $\triangle A'B'C'$ *є зображенням деякого* $\triangle ABC$ *при певному паралельному проектуванні* f *(*$A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$*), але оригінал загублено. Побудуйте зображення при проектуванні* f *серединного перпендикуляра до сторони* AB *трикутника* ABC.

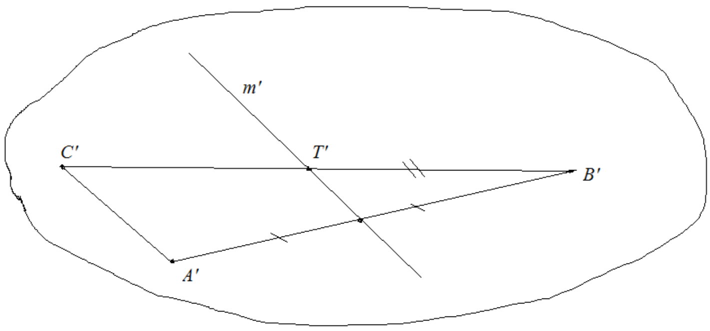


Рис.100

Розв'язання. WЗа умови даної задачі задано лише трикутник $A'B'C'$ картинної площини α (рис. 100). Зрозуміло, що, незалежно від форми трикутника-оригінала ABC, зображенням m' серединного перпендикуляра до сторони AB буде пряма, що проходить через середину M' відрізка $A'B'$. Обґрунтуємо, що довільна пряма m' картинної площини α, яка проходить через точку M' і не співпадає з прямою $A'B'$, може бути зображенням серединного перпендикуляра до сторони AB трикутника ABC, залежно від форми трикутника ABC.

У картинній площині α через точку M' проведемо довільну пряму m', відмінну від прямої $A'B'$. Така пряма або пройде через вершину C' трикутника $A'B'C'$, або перетне його сторону $A'C'$ чи сторону $B'C'$ у певній внутрішній точці. Нехай, для визначеності, пряма m' перетинає сторону $B'C'$ у точці T'. Розглянемо на певній

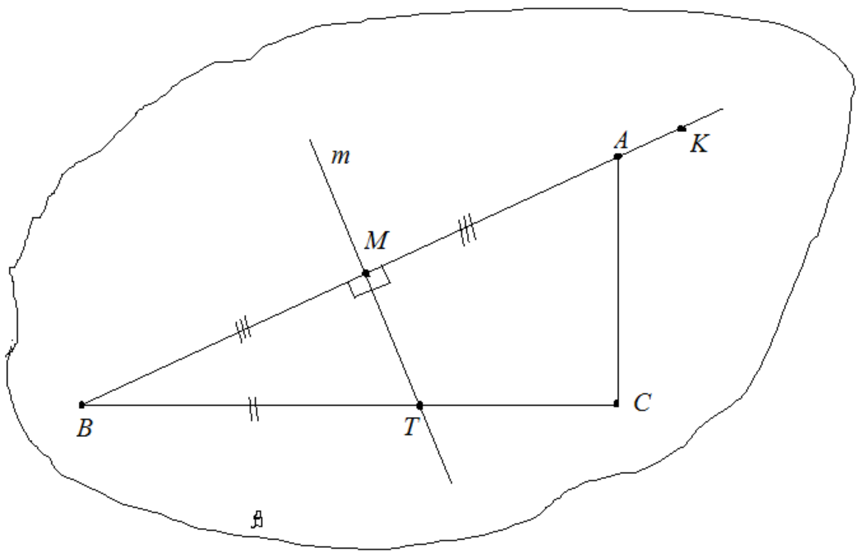


Рис.101

площині β відрізок $BC = B'C'$ (рис. 101). Оберемо на ньому точку T, що $B'T = B'T'$. У площині β проведемо такий промінь BK, що кут KBC не перевищує 90°. Проведемо $TM \perp BK$. Точка M буде належати променю BK. На промені MK відкладемо відрізок $MA = MB$. Згідно теореми 3. 3, існує паралельне проектування, при якому зображенням трикутника ABC є трикутник $A'B'C'$. Так, що точка A' є зображенням точки A, точка B' — зображенням точки B, точка C' — зображенням точки C. При цьому проектуванні зображенням точки T буде точка T', тому що при не виродженому паралельному проектуванні зберігається відношення довжин відрізків, які належать одній прямій, а, за побудовою, $\frac{BT}{BC} = \frac{B'T'}{B'C'}$. Точка M є серединою відрізка AB. Отже, її зображенням буде саме точка M' — середина відрізка $A'B'$. Але тоді зображенням прямої MT буде пряма $M'T'$ або пряма m'.

Шуканий оригінал знайдено. Сформульований факт доведено. Задачу розв’язано. Зрозуміло, що ця задача має безліч розв’язків. Навіть при фіксованій точці T' на відрізку $B'C'$ форма трикутника-оригінала ABC залежить від величини гострого кута KBC. Якщо побудована пряма m' проходить через точку C', то за оригінал для трикутника $A'B'C'$ може бути прийнятий довільний рівнобедрений трикутник ABC, у якого $AC = BC$.

Задача 6.17. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f. ($A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$). Побудуйте зображення Q' при проектуванні f центра Q кола, описаного навколо трикутника ABC.*

Розв’язання. W За умови даної задачі задані $\triangle ABC$ площини β і $\triangle A'B'C'$ картинної площини α (рис. 82). Згідно теореми 4.8., обидва трикутника можуть бути довільними. У евклідовій геометрії навколо кожного трикутника можна описати єдине коло, центр даного кола є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін даного трикутника. Отже,

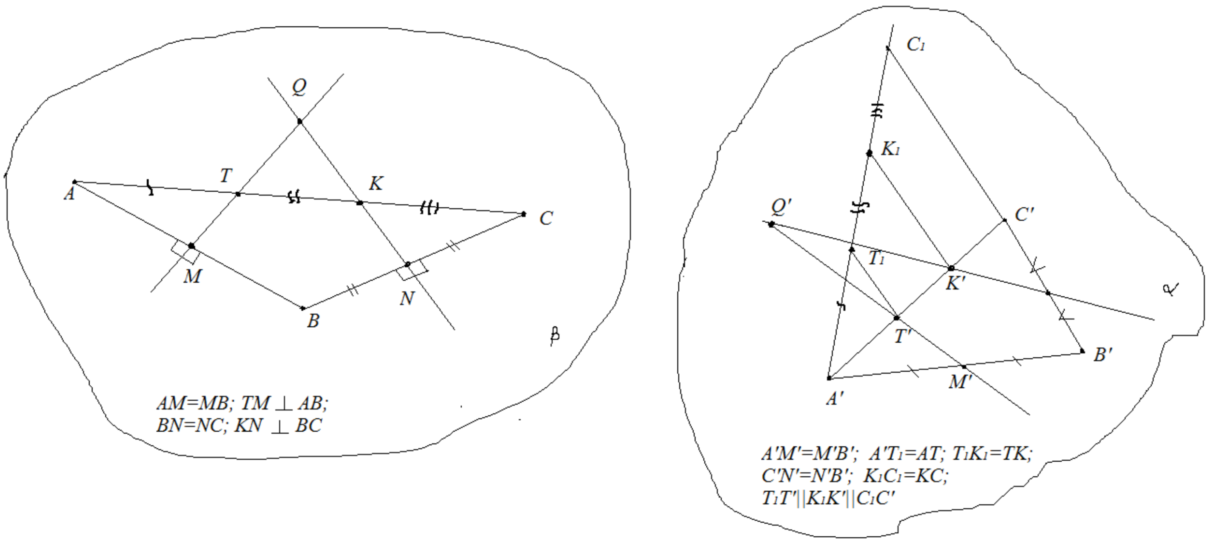


Рис.102

для знаходження центра Q кола, описаного навколо трикутника ABC, достатньо побудувати серединні перпендикуляри до двох сторін даного трикутника, наприклад, до AB і до BC, і знайти точку Q їх перетину. Зображення серединних перпендикулярів до сторін AB і BC на картинній площині α можна однозначно побудувати так само, як при розв’я розв’язанні задачі 6.15. Точка Q' перетину таких побудованих прямих буде шуканим зображенням точки Q (рис. 102.б). ■

Розв’язання задачі 6.16 вже неявним чином свідчить про те, що при розв’язанні даної задачі використання оригіналу виключати неможливо. Отже, це застосування теореми Фалеса. Розв’язання подібної задачі вважається тим більш раціональним, чим меншу кількість разів воно вимагає звернення до оригіналу, тобто використання теореми Фалеса. Дану задачу завжди можна розв’язати за допомогою використання теореми Фалеса двічі. І не лише тим способом, який було запропоновано. Зрозуміло, що у випадку рівностороннього трикутника ABC потреби у використанні теореми Фалеса немає взагалі. У випадку будь-якої іншої форми трикутника ABC теорему Фалеса можна використати лише один раз, якщо належним чином обрати ті дві сторони трикутника ABC, до яких проводяться серединні перпендикуляри. Саме такий шлях розв'язання задачі 6.17 продемонстровано на рис. 102.

Задача 6.18. *Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f. ($A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$). Побудуйте при проектуванні f зображення Q' центра Q кола, описаного навколо трикутника ABC.*

Розв'язання. WЗа умови даної задачі задано лише трикутник $A'B'C'$ картинної площини α. Згідно теореми 4.2., незалежно від форми загубленого трикутника ABC, форма трикутника $A'B'C'$ може бути цілком довільною. Розв'язання задачі 6.16 вказує на те, що, скоріше за все, задача 6.18 однозначного розв'язку не має. Обґрунтуємо, що довільна точка заштрихованої на рис. 103 області, точки M', N', K' включно, і лише така точка, може бути зображенням Q' центра кола Q, описаного навколо загубленого трикутника ABC.

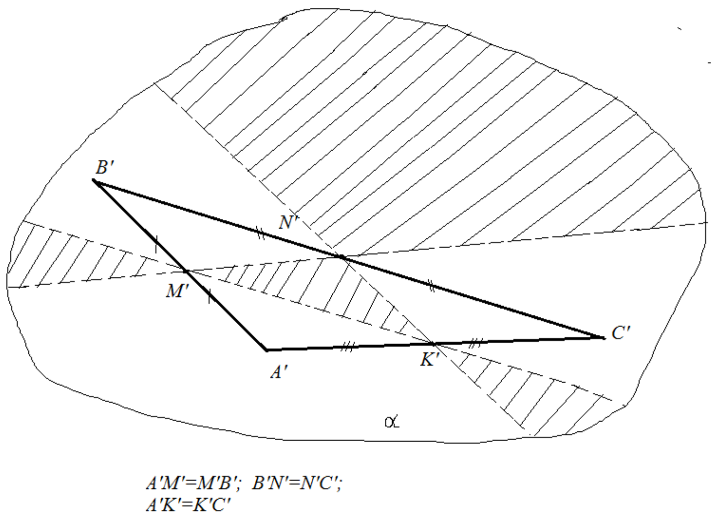


Рис.103

На рис. 103 на картинній площині α зображено трикутник $A'B'C'$, його середні лінії $M'N', N'K', M'K'$, а також прямі, що ці середні лінії містять. Згідно задачі 6.6., незалежно від форми трикутника-оригінала ABC, відрізки $M'N', N'K', M'K'$ є зображеннями його середніх ліній, відповідно, MN, NK і MK. У евклідовій геометрії серединні перпендикуляри до сторін трикутника ABC є прямими, що містять висоти трикутника, утвореного середніми лініями трикутника ABC (рис. 104), за трикутником MNK однозначно відновлюється трикутник ABC, для якого трикутник MNK є трикутником, утвореним середніми лініями.

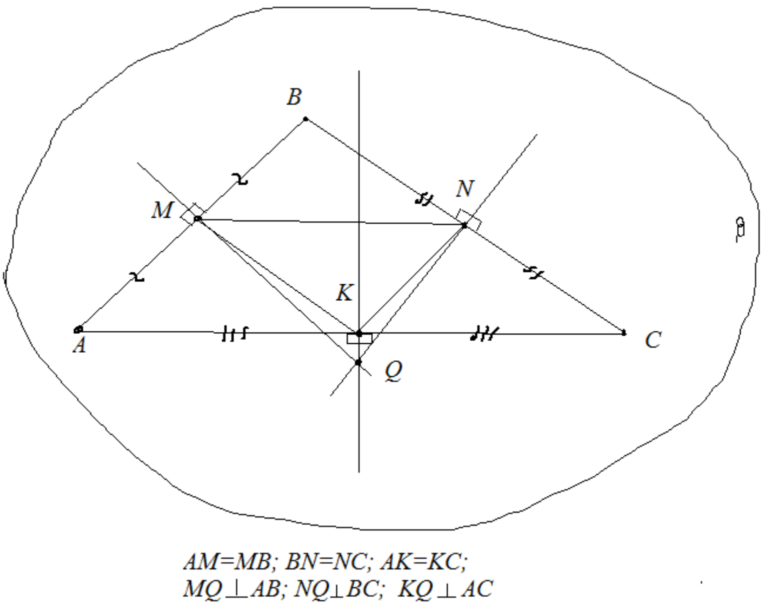


Рис.104

При невиродженому паралельному проектуванні прямі зображуються прямими, півплощини — півплощинами, паралельні прямі — паралельними прямими.

Отже, справедливість сформульованого твердження випливає із наведеного розв'язання задачі 6.14. ■

Питання і завдання для самоконтролю до §6

1. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням деякого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні. Який відрізок може бути зображенням медіани BM при певному паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

2. Яка точка називається центроїдом трикутника? Чи є справедливим твердження про те, що при невиродженому паралельному проектуванні центроїд трикутника-оригінала зображується центроїдом трикутника-зображення? Відповідь обґрунтуйте.

3. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням деякого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні. Який відрізок може бути зображенням середньої лінії трикутника ABC, паралельної до сторони BC? Відповідь обґрунтуйте.

4. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням деякого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні. Чи є обов'язковим безпосереднє використання трикутника-оригінала ABC для побудови зображення його бісектриси AL?. Відповідь обґрунтуйте.

5. Чи є справедливим твердження про те, що при не виродженому паралельному проектуванні зображенням бісектриси трикутника-оригінала є бісектриса трикутника-зображення? Відповідь обґрунтуйте.

6. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні. Чи є обов'язковою побудова бісектриси трикутника-оригінала для побудови зображення цієї бісектриси? Відповідь обґрунтуйте.

7. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням деякого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні, але оригінал загублено. Який відрізок можна обрати за зображення бісектриси CL трикутника ABC. Відповідь обґрунтуйте.

8. Наведіть означення інцентра трикутника. Чи є справедливим твердження про те, що при не виродженому паралельному проектуванні зображенням інцентра трикутника-оригінала є інцентр трикутника-зображення? Відповідь обґрунтуйте.

9. Задані і трикутник-оригінал, і трикутник-зображення при певному не виродженому паралельному проектуванні. Як побудувати зображення інцентра трикутника-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням деякого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні, але оригінал загублено. Яку точку можна прийняти за зображення інцентра трикутника ABC?

11. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні. Як можна побудувати зображення висоти AH трикутника ABC при данному паралельному проектуванні? Чи вимагає обов'язково подібна побудова явного використання оригіналу? Відповідь обґрунтуйте.

12. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням деякого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні, але оригінал загублено. Який відрізок можна прийняти за зображення висоти BH трикутника ABC. Відповідь обґрунтуйте.

13. Наведіть означення ортоцентра трикутника. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні. Як можна побудувати зображення ортоцентра трикутника ABC при даному паралельному проектуванні? Чи обов'язково вимагає подібна побудова явного використання оригіналу? Відповідь обґрунтуйте.

14. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням деякого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні, але оригінал загублено. Яку точку можна прийняти за зображення ортоцентра трикутника ABC? Відповідь обґрунтуйте.

15. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні. Як можна побудувати зображення серединного перпендикуляра до сторони AC трикутника ABC? Відповідь обґрунтуйте.

16. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням деякого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні, але оригінал

загублено. Яку фігуру можна прийняти за зображення серединного перпендикуляра до сторони AC трикутника ABC? Відповідь обґрунтуйте.

17. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні. Як можна побудувати зображення центра кола, описаного навколо трикутника ABC? Чи обов'язково вимагає подібна побудова явного використання оригіналу? Відповідь обґрунтуйте.

18. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням деякого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні, але оригінал загублено. Де може бути розташовано точку, описаного навколо трикутника ABC? Відповідь обґрунтуйте.

§ 7. Зображення плоских n-кутників, $n \in N, n > 3$, при невиродженому паралельному проектуванні.

У евклідовій геометрії ***n*-кутником-каркасом**, $n \in N, n > 3$, називається **проста замкнена** ламана, яка містить n ланок. При цьому **ламаною** $A_1A_2...A_n$, $n \in N, n \geq 2$, називається геометрична фігура, утворена точками $A_1, A_2,..., A_n$ і відрізками $A_1A_2, A_2A_3,..., A_{n-1}A_n$, що послідовно сполучають ці точки. Точки називаються **вершинами** ломаної, відрізки — її **ланками.** Ламана називається **замкненою,** якщо її вершина A_n співпадає з вершиною A_1. **Ламана** називається **простою,** якщо жодні дві її сусідні ланки не належать одній прямій і жодні дві її ланки не мають спільних внутрішніх точок.

Вершини відповідної ламаної називаються **вершинами *n*-кутника,** а її ланки — **сторонами *n*-кутника.** Так, на рис. 109 зображено шестикутник-каркас $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, а на рис. 110 — п’ятикутник-каркас $A_1A_2A_3A_4A_5$. Перший з них має шість вершин ($A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, сьома вершина співпадає з першою) і шість сторін ($A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$), другий — п’ять вершин (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, шоста вершина співпадає з першою) і п’ять сторін ($A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1$).

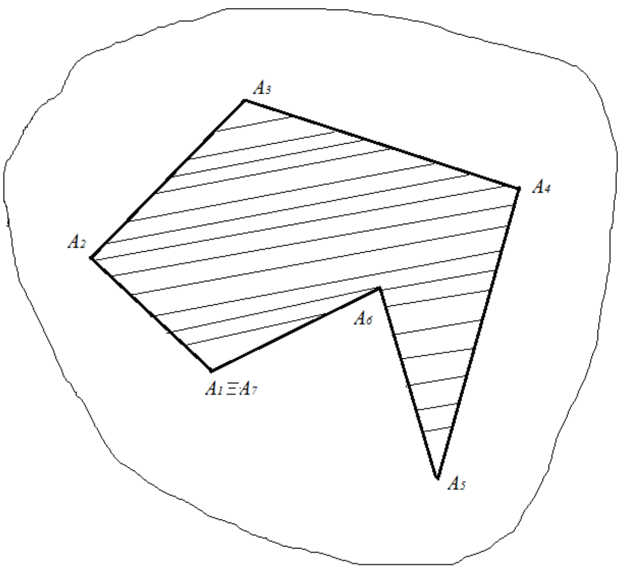


Рис.109

***n*-кутник-каркас,** $n \in N, n > 3$, як і кожна геометрична фігура, називається **плоским**, якщо існує площина, які належать всі його точки.

Зрозуміло, що для того, щоб $\boldsymbol{n}$-кутник-каркас був плоским, необхідно і достатньо, щоб існувала площина, якій належать всі його вершини. На рисунках 109 і 110 зображено плоскі $\boldsymbol{n}$-кутники-каркаси. Кожний плоский $\boldsymbol{n}$-кутник-каркас розділяє площину, якій він належить, на дві області. Одна з областей для даного $\boldsymbol{n}$-кутника називається **внутрішньою** (такі області заштриховані на рисунках 109 і 110), інша **зовнішньою.** Кожна з областей визначається за допомогою об'єднань та перетинів відповідних півплощин. Плоский $\boldsymbol{n}$-кутник-каркас разом з його внутрішньою областю також називається **плоским $\boldsymbol{n}$-кутником ($n \in N, n > 3$).**

Зрозуміло, що при невиродженому для площини плоского $\boldsymbol{n}$-кутника-каркаса паралельному проектуванні його зображенням є також $\boldsymbol{n}$-кутник-каркас. При цьому зображенням внутрішньої області $\boldsymbol{n}$-кутника-оригінала є внутрішня область $\boldsymbol{n}$-кутника-зображення.

Загальна теорія побудови зображень плоских $\boldsymbol{n}$-кутників, $n \in N, n > 3$, при невиродженому паралельному проектуванні за наявністю оригіналу спирається на застосування теореми 5.1– основної теореми теорії зображень плоских фігур при паралельному проектуванні та її наслідків. При цьому спочатку обирають довільний трикутник площини плоского $\boldsymbol{n}$-кутника-оригінала. За зображення цього трикутника, згідно теореми 4.2, можна прийняти довільний трикутник картинної площини. Потім, за теоремою Фалеса, відбудовують зображення всіх вершин $\boldsymbol{n}$-кутника-оригінала і вже потім – зображення всього $\boldsymbol{n}$-кутника. Найчастіше, у якості

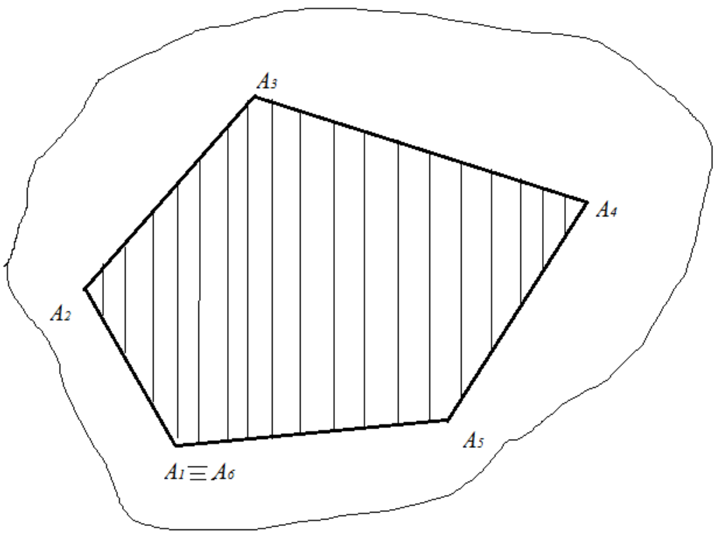


Рис.110

трикутника площини $\boldsymbol{n}$-кутника-оригінала обирають трикутник, утворений вершинами даного $\boldsymbol{n}$-кутника. Але не завжди.

У стандартному курсі геометрії для середніх загальноосвітніх навчальних закладів головним чином розглядають **опуклі плоскі $\boldsymbol{n}$-кутники**, $n \in N, n > 3$. Плоский $\boldsymbol{n}$-кутник називається **опуклим** у випадку, коли він має наступну властивість: якщо через будь-яку сторону даного $\boldsymbol{n}$-кутника провести пряму, то всі інші точки цього $\boldsymbol{n}$-кутника будуть лежати у одній півплощині відносно даної прямої. На рис. 110 зображено опуклий п'ятикутник, а на рис. 109 – неопуклий шестикутник. У відповідності з даним означенням, кожний трикутник, зрозуміло, є опуклим. Отже, окреме дослідження випадків $n \in N, n > 3$, не є зайвим. З найпростіших властивостей паралельного проектування випливає, що при невиродженому паралельному проектуванні зображенням опуклого $\boldsymbol{n}$-кутників, $n \in N, n > 3$, буде опуклий $\boldsymbol{n}$-кутник, а не опуклого. Серед опуклих плоских $\boldsymbol{n}$-кутників, $n \in N, n > 3$, у першу чергу розглядають такі чотирикутники, як паралелограм і його окремі випадки (прямокутник, ромб, квадрат) і трапецію, а також правильний шестикутник і вже потім – правильний п'ятикутник, правильний семикутник та інші правильні $\boldsymbol{n}$-кутники, $n \in N, n > 6$.

Саме тому у теоретичному розділі даного навчального посібника зупинимося на основних теоремах, які відносяться до можливих зображень паралелограмів, трапецій і правильного шестикутника.

Теорема 7.1. *Довільний паралелограм і лише паралелограм картинної площини може бути зображенням паралелограма площини-оригіналу при невиродженому для даної площини паралельному проектуванні. Зокрема, довільний паралелограм картинної площини може бути зображенням довільного прямокутника, ромба чи квадрата при відповідному паралельному проектуванні.*

Доведення. W Справедливість твердження про те, що при невиродженому паралельному проектуванні зображенням будь-якого паралелограма може бути лише паралелограм, випливає із означення паралелограма і твердження теореми 3.9 про те, що при невиродженому паралельному проектуванні зображенням пари паралельних прямих є пара паралельних прямих.

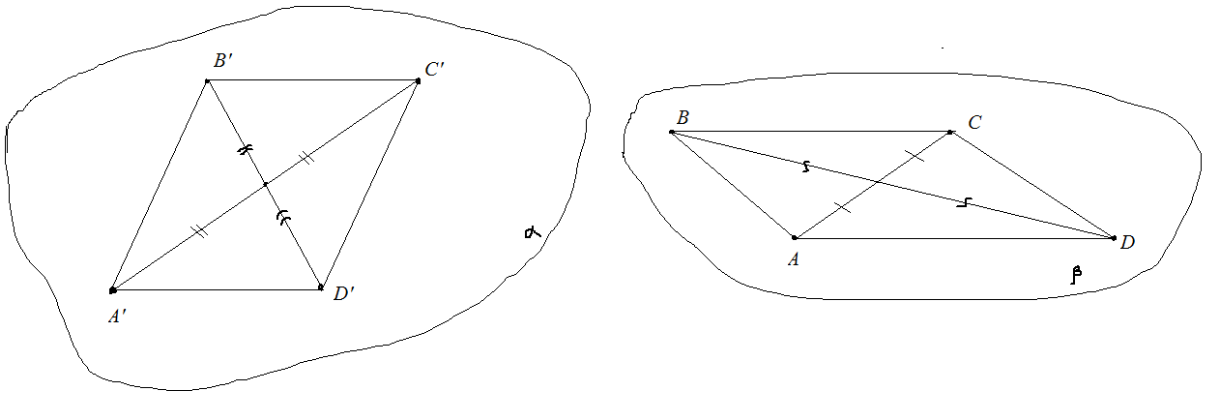


Рис.111

Тепер обґрунтуємо справедливість другої частини теореми. Розглянемо довільний паралелограм $A'B'C'D'$ ($A'B' \parallel C'D'$) картинної площини α. Розглянемо також довільний паралелограм $ABCD$. Він однозначно визначає площину β, якій належить (рис.111). Згідно теореми 4.2., існує невироджене для площини β паралельне проектування h, при якому зображенням трикутника ABC є трикутник $A'B'C'$ так, що зображенням точки A є точка A', зображенням точки B — точка B', зображенням точки C — точка C'. Згідно відповідних найпростіших властивостей паралельного проектування, при проектуванні h зображенням відрізка AC буде відрізок $A'C'$, зображенням середини M відрізка AC — середина M' відрізка $A'C'$, зображенням відрізка BM — відрізок $B'M'$, зображенням променя BM — промінь $B'M'$.

Діагоналі кожного паралелограма перетинаються і діляться точкою перетину навпіл. Отже, діагональ BD паралелограма $ABCD$ містить точку M, діагональ $B'D'$ паралелограма $A'B'C'D'$ — точку M', точка D розташована на промені BM так, що $BM = MD$, (D не співпадає з B), точка D' розташована на промені $B'M'$ так, що $M'D' = B'M'$, (D' не співпадає з B'),

$\frac{BM}{MD} = \frac{1}{1}$; $\frac{B'M'}{M'D'} = \frac{1}{1}$. Це означає, що при паралельному проектуванні h зображенням точки D буде саме точка D', тому що при невиродженому паралельному проектуванні зберігається порядок точок і відношення довжин відрізків, які належать одній прямій, а у евклідовій геометрії на промені $B'M'$ існує єдина точка D', що не співпадає з B', $B'M' = M'D'$. W

Наведений варіант доведення заслуговує на увагу тому, що він не містить жодних понять, які виходять за межі курсів геометрії середніх закладів освіти і, завдяки цьому, може бути використаним при викладанні таких курсів. У теорії афінних перетворень евклідового простору доведено, що будь-які два паралелограма є афінно еквівалентними. Отже, справедливість твердження теореми 7.1 безпосередньо випливає із справедливості наслідку 2 теореми 5.1.

Теорема 7.2. *Зображенням трапеції при невиродженому паралельному проектуванні завжди є трапеція. Задана трапеція може бути зображенням іншої трапеції при невиродженому паралельному проектуванні тоді та тільки тоді, коли ці трапеції мають однакові відношення довжин основ.*

Доведення. W Справедливість першого твердження теореми випливає із означення трапеції і тих найпростіших властивостей паралельного проектування, які стверджують, що при невиродженому паралельному проектуванні зображенням пари паралельних прямих є пара паралельних прямих, а зображенням пари не паралельних прямих є пара не паралельних прямих.

Справедливість твердження необхідності другої частини теореми випливає зі справедливості тієї найпростішої властивості невиродженого паралельного проектування, яка стверджує, що при такому проектуванні зберігається відношення довжин відрізків, які належать паралельним прямим.

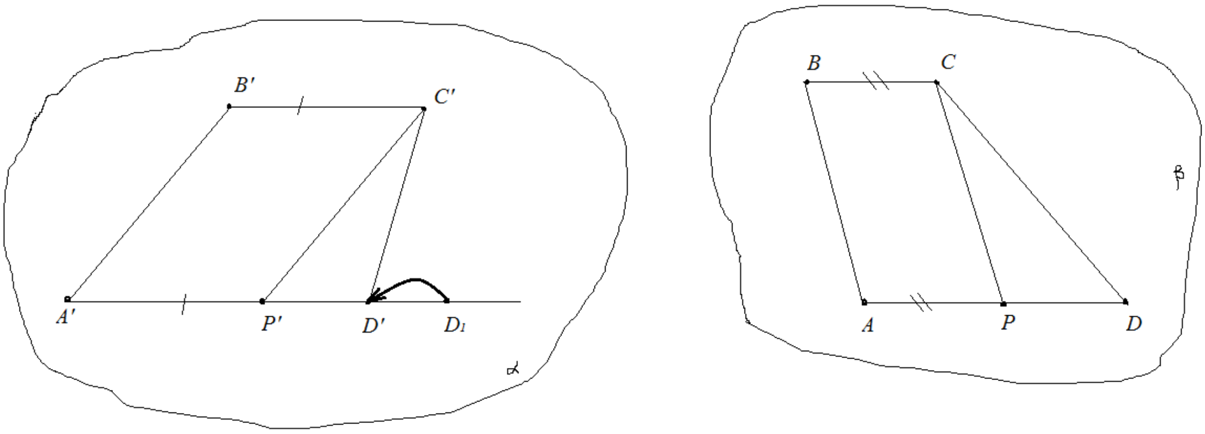


Рис.112

Перейдемо до обґрунтування справедливості твердження достатності. Розглянемо трапецію $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D'$) картинної площини α і трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$), для яких $\dfrac{B'C'}{A'D'} = \dfrac{BC}{AD}$ (рис. 112). Трапеція $ABCD$ однозначно визначає площину β, якій належить. Проведемо $C'P' \parallel A'B'$ і $CP \parallel AB$. $P' \in A'D'$, $P \in AD$. Утворяться паралелограми $A'B'C'P'$ і $ABCP$ (рис.112). Згідно теореми 7.1., існує невироджене паралельне проектування h, при якому паралелограм $A'B'C'P'$ є зображенням паралелограма $ABCP$, при цьому точка A' є зображенням точки A, точка B' — точки B, точка C' — точки C, точка P' — точки P.

З іншого боку, протилежні сторони кожного паралелограма є попарно рівними, звідси $B'C' = A'P'$, $BC = AP$. Але тоді $\dfrac{B'C'}{A'D'} = \dfrac{A'P'}{A'D'}$; $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{AP}{AD}$; $\dfrac{A'P'}{A'D'} = \dfrac{AP}{AD}$. Точка D' лежить на промені $A'P'$, точка D — на промені AP. За теоремою 3.6, при невиродженому паралельному проектуванні h зображенням променя AP є промінь $A'P'$. Отже, при цьому проектуванні зображенням точки D є певна точка D_1 променя $A'P'$. Завдяки збереженню відношень довжин відрізків, які належать одній прямій, $\dfrac{A'D_1}{A'P'} = \dfrac{AD}{AP}$. Звідси

$A'D_1 = A'P' \cdot \dfrac{AD}{AP}$. Але $\dfrac{A'D'}{A'P'} = \dfrac{AD}{AP}$, $A'D' = A'P' \cdot \dfrac{AD}{AP}$. Отже, $A'D_1 = A'D'$. Але у евклідовій геометрії на кожному промені від його початка (на промені $A'P'$ від точки A') можна відкласти лише один відрізок даної довжини. Звідси випливає, що точки D_1 і D' співпадають, саме точка D' є зображенням точки D при паралельному проектуванні h, трапеція $A'B'C'D'$ є зображенням трапеції $ABCD$, що й треба було обґрунтувати. W

Для побудови зображення правильного шестикутника, як правило, використовують загальнотеоретичні положення, викладені на початку даного параграфу. Побудову зображення виконують багатьма способами, виходячи із доцільності вибору того чи іншого трикутника на площині оригіналу. Наведемо один з найбільш доцільних на думку авторів варіантів виконання даної побудови у вигляді задачі.

Задача 7.1. *Побудуйте можливе зображення правильного шестикутника при невиродженому паралельному проектуванні.*

Розв'язання. W У евклідовій геометрії всі правильні шестикутники є подібними між собою. Це означає, що будь-який з них можна прийняти за оригінал шуканого зображення.

Розглянемо довільний правильний шестикутник $ABCDEF$ ($AB = BC = CD = DE = EF = AF$, $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = \angle EFA = \angle FAB$) (рис. 113). Проведемо його діагоналі AD, BF і CE. Відомо, що $BF \perp AD$, $CE \perp AD$, а тому $BF \parallel CE$. Відомо також, що, якщо точка O є серединою діагоналі AD, а діагоналі BF і CE перетинають AD, відповідно, у точках K і P, то $AK = KO = OP = OD$. Такі властивості правильного шестикутника підказують наступний можливий варіант побудови його

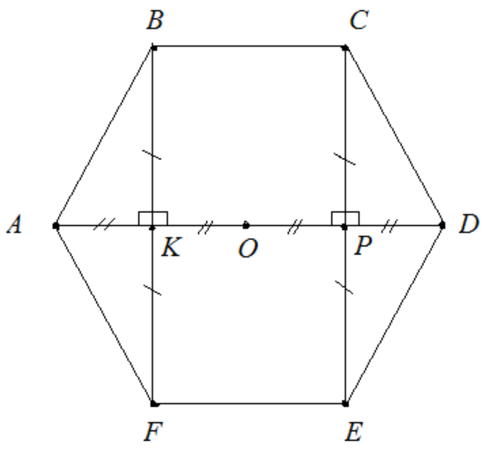


Рис.113

зображення (рис. 114). Перш за все, на картинній площині α, найчастіше горизонтально, будують відрізок $A'D'$, який легко ділиться на чотири однакові частини: $A'K' = K'O' = O'P' = P'D'$. Якщо побудови виконуються у зошиті у клітинку, то, зручніше за все, щоб кожна частина містила дві або три клітинки. Потім через точки K' і P' проводять паралельні і рівні між собою відрізки $F'B'$ і $E'C'$, які, відповідно, точками K' і P' діляться навпіл: $F'B' \parallel E'C'$, $F'B' = E'C'$, $F'K' = K'B' = E'P' = P'C'$ (рис.114).

Якщо побудови виконані у зошиті у клітинку, зручніше за все проводити відрізки $F'B'$ і $E'C'$ під кутом у 45° до прямої $A'D'$. У випадку, коли відрізок $A'K'$ складає три клітинки, відрізок $K'B'$ зручніше обрати

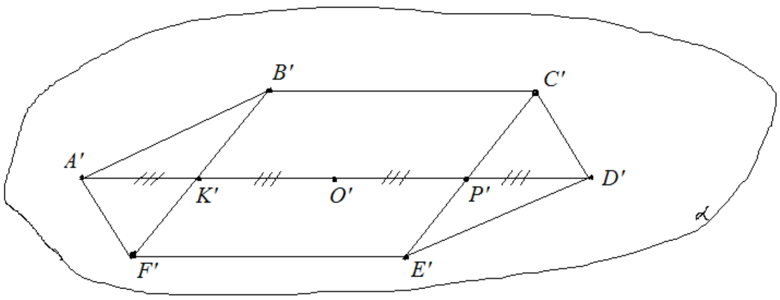


Рис.114

таким, щоб він складав діагоналі двох клітинок (рис. 114); у випадку, коли відрізок $A'K'$ складає дві клітинки, відрізок $K'B'$ краще обрати таким, щоб він складав діагональ однієї клітинки. шестикутник $A'B'C'D'E'F'$ утворює вірне зображення правильного шестикутника $ABCDEF$ при певному невиродженому паралельному проектуванні.

Дійсно, згідно теореми 4.2., існує невироджене паралельне проектування h, при якому зображенням трикутника ABK є трикутник $A'B'K'$ так, що зображенням точки A є точка A', точки B — точка B', точки K — точка K'. Положення зображень C', D', E', F' інших вершин C, D, E, F шестикутника $ABCDEF$ при проектуванні h визначається на картинній площині α однозначно. За теоремою 4.3., воно визначається саме так, як показано при розв'язанні даної задачі, на підставі найпростіших властивостей паралельного проектування. W

Питання і завдання для самоконтролю до § 7

7.1. Наведіть означення $\boldsymbol{n}$-кутника-каркаса**,** $n \in N, n > 3$ у евклідовій геометрії.

7.2. Наведіть означення плоского $\boldsymbol{n}$-кутника, $n \in N, n > 3$ (у двох розуміннях) у евклідовій геометрії.

7.3. На що спирається і у чому полягає загальна теорія побудови зображень плоских $\boldsymbol{n}$-кутників, $n \in N, n > 3$, за наявністю оригінала при невиродженому паралельному проектуванні?

7.4. Наведіть означення плоского опуклого $\boldsymbol{n}$-кутника, $n \in N, n \geq 3$, у евклідовій геометрії.

7.5. Перелічіть види $\boldsymbol{n}$-кутників, $n \in N, n > 3$, які у першу чергу розглядають у стандартному курсі геометрії для середніх загальноосвітніх навчальних закладів.

7.6. Які геометричні фігури можуть бути зображенням паралелограма при невиродженому паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

7.7. Які геометричні фігури можуть бути зображенням ромба при невиродженому паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

7.8. Які геометричні фігурі можуть бути зображенням прямокутника при невиродженому паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

7.9. Які геометричнаі фігури можуть бути зображенням квадрата при невиродженому паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

7.10. Які геометричні фігури можуть бути зображенням трапеції при невиродженому паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

7.11. Наведіть критерій того, що одна трапеція може бути зображенням іншої при певному паралельному проектуванні. Відповідь обґрунтуйте.

7.12. Наведіть приклад побудови зображення правильного шестикутника при невиродженому паралельному проектуванні. Вірність запропонованих побудов обґрунтуйте.

§ 8. Зображення кола, круга та їх основних елементів при невиродженому паралельному проектуванні

У евклідовій геометрії **колом** називається множина тих та тільки тих точок площини, які знаходяться на постійній фіксованій відстані від певної точки O цієї площини. Точка O називається **центром** даного кола (рис. 114). Фіксована відстань називається **радіусом кола** і часто позначається буквою R. **Радіусом кола** називається також будь-який відрізок, що сполучає точку кола з його центром. На рис. 114 відрізок OM є радіусом зображеного кола. Зрозуміло, що всі радіуси кола мають однакову довжину, яка дорівнює R.

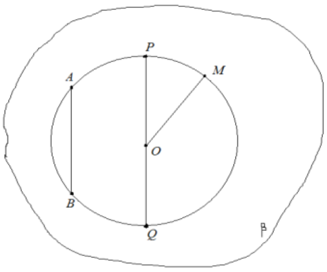


Рис.114

Будь-які дві точки A і B кола ділять його на дві частини, обидві з яких називаються **дугами** $\overset{\frown}{AB}$ даного **кола** (рис. 114). Точки A і B називаються кінцями цих дуг. Часто виникає необхідність точно визначити, яка саме із двох дуг $\overset{\frown}{AB}$ мається на увазі. Тоді на відповідній дузі обирають довільну внутрішню точку і позначають цю дугу вже не двома, а трьома буквами. Так, зображене на рис. 115 коло точками A і B розділене на дуги $\overset{\frown}{AMB}$ і $\overset{\frown}{AKB}$. (Одночасно, можна стверджувати, що точками K і M коло розділене на дуги $\overset{\frown}{KAM}$ і $\overset{\frown}{KBM}$.

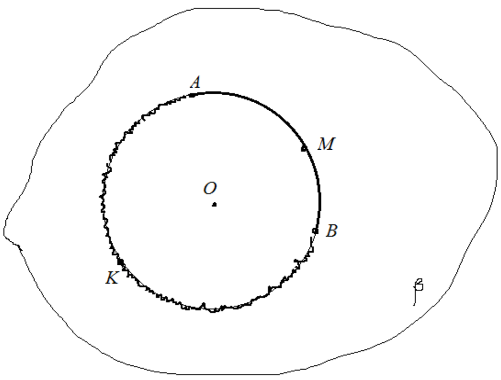


Рис.115

Хордою кола називається кожний відрізок, кінці якого належать даному колу. На рис. 114 відрізок AB є хордою зображеного кола. Хорда кола, що проходить через його центр, називається **діаметром**. На рис. 114 відрізок PQ є **діаметром** зображеного **кола**. Зрозуміло, що довжина діаметра кола дорівнює двом довжинам його радіуса: $PQ = 2R$.

Коло площини β з центром у точці O розділяє всі точки цієї площини на дві **області** — **внутрішню** і **зовнішню** по відношенню до нього (на рис. 116 внутрішню область кола з центром у точці O заштриховано). Точка M площини β належить внутрішній області даного кола або лежить всередині нього тоді та тільки тоді, коли довжина відрізка MO є меншою за радіус даного кола. Точка N площини β належить зовнішній області даного кола або лежить зовні нього тоді та тільки тоді, коли довжина відрізка NO є більшою за радіус даного кола. Коло, разом з його внутрішньою областю, називається **кругом**.

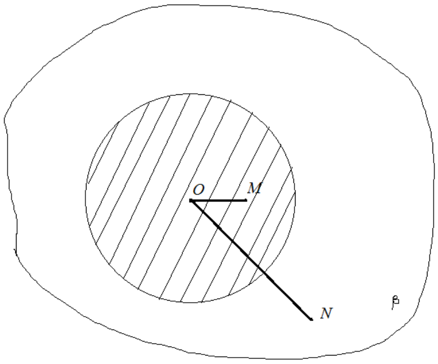


Рис.116

Нехай коло з центром у точці O розташовано на площині β. Пряма *a*, що належить площині β, може взагалі не мати з даним колом спільних точок, може мати одну спільну точку, може — дві (рис. 117). Більшої кількості спільних точок пряма *a* з даним колом мати не може. Все залежить від співвідношення між радіусом кола і відстанню від центра кола до прямої *a*. При цьому, зрозуміло, **відстанню від точки до прямої** називається довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої.

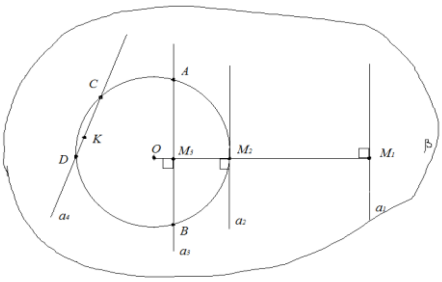


Рис.117

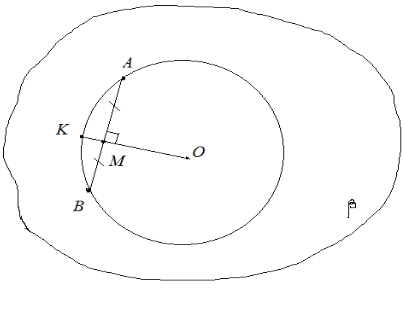


Рис.118

У евклідовій геометрії справедливими є наступні твердження. 1. Пряма *a* площини β не має з колом цієї площини жодної спільної точки тоді та тільки тоді, коли відстань від центра даного кола до прямої *a* перевищує радіус даного кола. У подібному випадку всі точки даної прямої знаходяться у зовнішній відносно даного кола області. 2. Пряма a площини β має з колом цієї площини єдину спільну точку тоді та тільки тоді, коли відстань від центра кола до прямої a дорівнює радіусу даного кола. Якщо пряма площини β має з колом цієї площини єдину спільну точку, то вона називається **дотичною до кола** у цій точці, спільна точка називається **точкою дотику**. Пряма є дотичною до кола тоді та тільки тоді, коли вона є перпендикулярною до радіусу даного кола, який проведено до точки дотику. Точка дотику дотичної розташована на колі. Всі інші точки дотичної знаходяться у зовнішній відносно даного кола області площини β. Через кожну точку кола проходить одна та тільки одна дотична до даного кола. 3. Пряма a площини β має з колом цієї площини дві спільні точки тоді та тільки тоді, коли відстань від центра кола до прямої a є меншою за радіус даного кола. У такому випадку пряма a для даного кола називається **січною**. Якщо пряма площини β проходить через точку в середині кола, то вона має з колом точно дві спільні точки. Так, на рис. 117, $OM_1 \perp a_1, OM_1 > R,$ де R - радіус даного кола. Пряма a_1 не має з колом спільних точок, всі точки прямої a_1 розташовані поза даним колом, у зовнішній даного кола області, $OM_2 \perp a_2, OM_2 = R,$ пряма a_2 має з колом єдину спільну точку M_2, точка M_2 є точкою дотику прямої a_2 до даного кола, всі точки прямої a_2 за виключенням точки M_2 розташовані поза даним колом, у зовнішній області даного кола. $OM_3 \perp a_3, OM_3 < R,$ пряма a_3 перетинає дане коло у точках A і B. Відрізок AB для даного кола є хордою. Всі внутрішні точки відрізка AB розташовані всередині даного кола. Навпаки, всі точки прямої a_3, що не належать відрізку AB, розташовані у зовнішній відносно даного кола області. Точка K на рис. 117 знаходиться всередині даного кола ($OK < R$). Пряма a_4 проходить через точку K. Пряма a_4 перетинає дане коло у двох точках — C і D.

Відомою теоремою елементарної евклідової геометрії є твердження про те, що радіус кола є перпендикулярним до хорди даного кола тоді та тільки тоді, коли він ділить дану хорду навпіл. Так, на рис. 118, радіус OK кола з центром у точці O перетинає хорду AB у точці M і є перпендикулярним до цієї хорди ($OK \perp AB$). При цьому $AM = MB$. З цієї

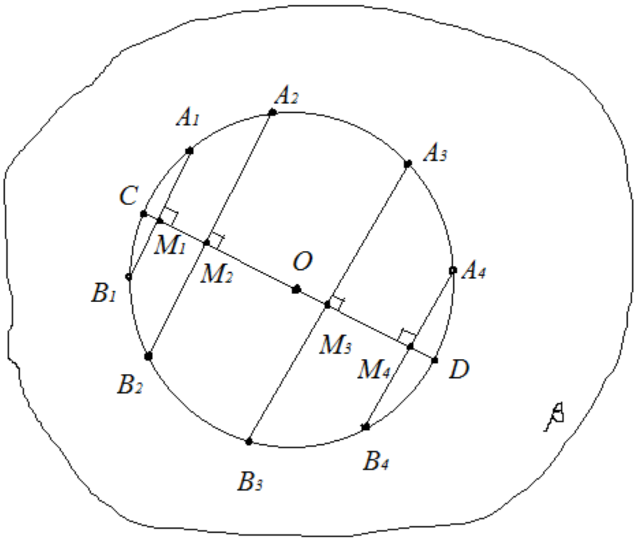


Рис.119

теореми випливає, що середини всіх паралельних між собою хорд даного кола належать одному діаметру цього кола, а саме тому діаметру, який є перпендикулярним одночасно до всіх цих хорд. Так, на рис. 119, у колі проведені чотири паралельні між собою хорди: $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$. Точки

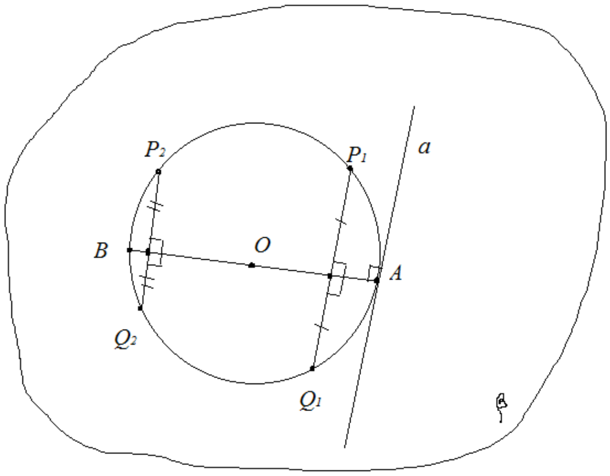


Рис.120

M_1, M_2, M_3 і M_4 є, відповідно, їх серединами ($A_1M_1 = M_1B_1, A_2M_2 = M_2B_2, A_3M_3 = M_3B_3,\ \ A_4M_4 = M_4B_4$). Точки M_1, M_2, M_3 і M_4 належать діаметру CD, $CD \perp A_1B_1$ і тому $CD \perp A_2B_2, CD \perp A_3B_3$, $CD \perp A_4B_4$.

Кожний з двох взаємно перпендикулярних діаметрів кола ділить навпіл всі хорди, паралельні до іншого діаметра.

На підставі вищевказаних властивостей хорд кола, при наявності кола можна за допомогою циркуля і лінійки визначити положення його центру. Для цього достатньо у колі провести дві паралельні між собою хорди (хорди P_1Q_1 і P_2Q_2 на рис. 120), поділити кожну з цих хорд навпіл, через знайдені середини хорд провести третю хорду (хорда AB на рис. 120), яка виявиться діаметром даного кола. Середина цієї хорди і є шуканим центром (точка O на рис. 120).

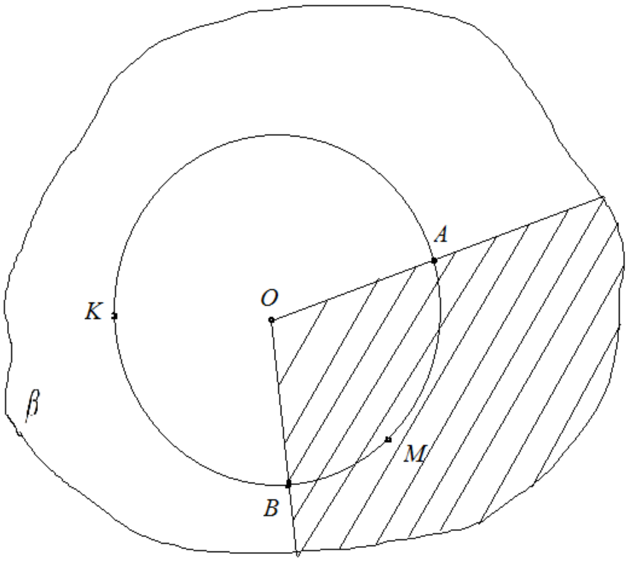


Рис.121

Дотична до кола є паралельною до кожної хорди кола, що є перпендикулярною до діаметра, який містить радіус, проведений до точки дотику. Так, на рис. 120, пряма a дотикається зображеного кола у точці A, відрізок OA - радіус, проведений у точку дотику, відрізок AB - діаметр кола, що містить радіус OA. Відрізки P_1Q_1 і P_2Q_2 - такі хорди даного кола, що $P_1Q_1 \perp AB, P_2Q_2 \perp AB$ (діаметр AB ділить кожну з них навпіл). $P_1Q_1 \parallel P_2Q_2 \parallel a$. рис.121

Центральним кутом кола називається плоский кут, вершина якого знаходиться у центрі даного кола.

Нехай на площині β задане коло з центром в точці O, точки A і B належать цьому колу (рис. 121). Проведемо промені OA і OB. При цьому утворяться два плоских кути AOB і, відповідно, два центральних кути даного кола. Кожний з них можна

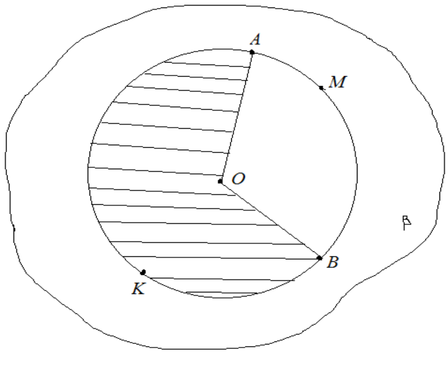


Рис.122

визначити за допомогою операцій перетину і об'єднання відповідних півплощин. Якщо треба точно визначити, який центральний кут AOB кола мається на увазі, то на тій дузі AB кола, яка міститься всередині даного кута, обирають довільну точку. Говорять, що відповідний **центральний кут кола спирається на** дану **дугу.** Так, на рис. 121 заштриховано центральний кут AOB кола, який спирається на дугу $\overset{\frown}{AMB}$. Одночасно там зображено центральний кут AOB, який спирається на дугу $\overset{\frown}{AKB}$.

Сектором називається геометрична фігура, утворена спільними точками круга і певного центрального кута того кола, що визначає даний круг. Кожний сектор обмежений двома радіусами і дугою кола, на яку спирається відповідний центральний кут. Два радіуса кола визначають два сектора даного кола, які розрізняються лише дугами. Так, на рис. 122 зображено два сектора AOB кола з центром у точці O. Один з них містить дугу $\overset{\frown}{AKB}$ даного кола, другий — дугу $\overset{\frown}{AMB}$. Той, що містить дугу $\overset{\frown}{AKB}$, заштриховано.

Розглянемо коло з центром у точці O. (рис. 123). Проведемо дві, паралельні між собою, січні цього кола. На рис. 123 січна a перетинає коло у точках A і B, січна b - у точках C і D; $a \parallel b$. **Сегментом кола** називається 1) множина тих та тільки тих точок круга, обмеженого даним колом, які лежать всередині смуги між січними a і b, а також на хордах AB і CD; 2) множина тих та тільки тих точок круга, обмеженого даним колом, що належать певній півплощині, яку

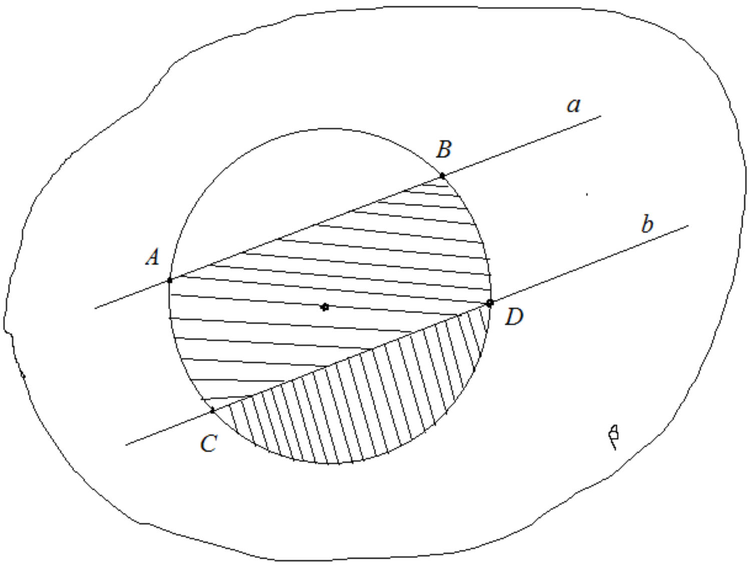


Рис.123

визначено січною даного кола, відповідну хорду січної включно. Тобто, сегменти кола бувають двох видів. Кожна січна кола визначає точно два сегмента другого типу. На рис. 123 зображено п’ять сегментів: чотири сегменти другого типу і один першого. Сегмент першого типу заштриховано горизонтальними рисками. Один сегмент другого типу заштриховано вертикальними рисками.

Еліпс є однією з трьох основних плоских кривих другого порядку. На практиці використовують кілька еквівалентних між собою означень еліпса. У даному навчальному посібнику наведемо наступне. **Еліпсом** називається геометрична фігура певної площини, яка відносно деякої прямокутної декартової системи координат Oxy цієї площини задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (2).$$

У рівнянні (2) $a \neq 0, b \neq 0,$ за загальною домовленістю вважається, що $a > 0, b > 0.$ **Рівняння** (2) для **еліпса** F називається **канонічним**. **Прямокутна декартова система координат**, відносно якої еліпс F задано канонічним рівнянням (2), **для** даного **еліпса** також називається **канонічною.** Загальний вигляд еліпса F відносно канонічної системи координат продемонстровано на рис. 124. Точка O - початок канонічної системи координат для еліпса F- називається центром даного еліпса

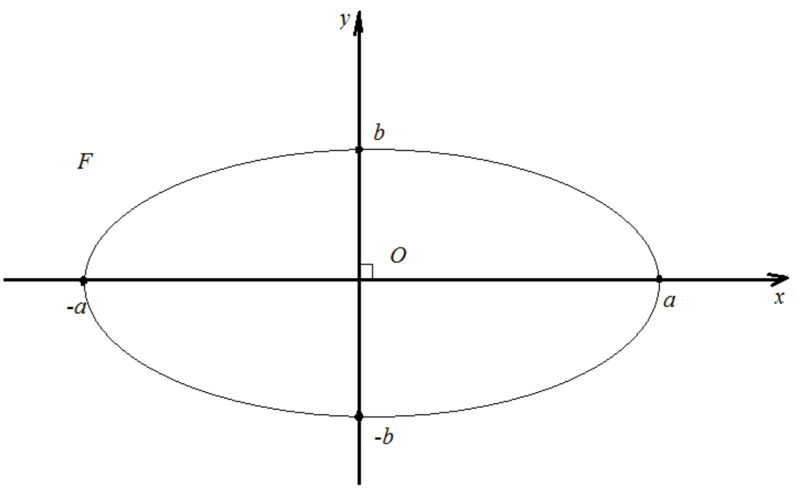


Рис.124

Спираючись на рівняння (2) неважко довести, що центр еліпса є центром його симетрії.

Коло є окремим випадком еліпса. Відносно канонічної для кола прямокутної декартової системи координат Oxy воно задається рівнянням

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1 \qquad (3),$$

де R- радіус кола. Тобто, для кола $a=b=R$.

Так само, як і для кола, для еліпса визначаються **дуги еліпса** і **хорди еліпса**. **Радіусом еліпса** називається кожний відрізок, кінцями якого є центр еліпса і точка, що належить еліпсу. Еліпс має безліч радіусів. Якщо відносно прямокутної декартової системи координат Oxy еліпс задано рівнянням (2), то відносно одиничного відрізка даної системи координат їх довжина може дорівнювати будь-якому числу з сегмента $[b;a]$, якщо $b<a$, або сегмента $[a;b]$, якщо $a<b$, і тільки.

Діаметром еліпса, як і діаметром кола, називається будь-яка хорда даного еліпса, що проходить через його центр. Кожний еліпс має безліч діаметрів. Довжина кожного з них, зрозуміло, дорівнює двом довжинам відповідних радіусів (центр еліпса ділить кожний діаметр навпіл). Але різні діаметри еліпса, що не є колом, можуть не мати однакової довжини. Якщо відносно прямокутної декартової системи координат еліпс задано рівнянням (2), то відносно одиничного відрізка даної системи координат їх довжина може дорівнювати будь-якому числу із сегмента $[2b;2a]$ або $[2a;2b]$, і тільки. На рис. 125 точка O є центром еліпса, відрізки OM, ON, OA, OK, OD- його радіусами, відрізки PQ і MK - його хордами, відрізок MK- діаметром.

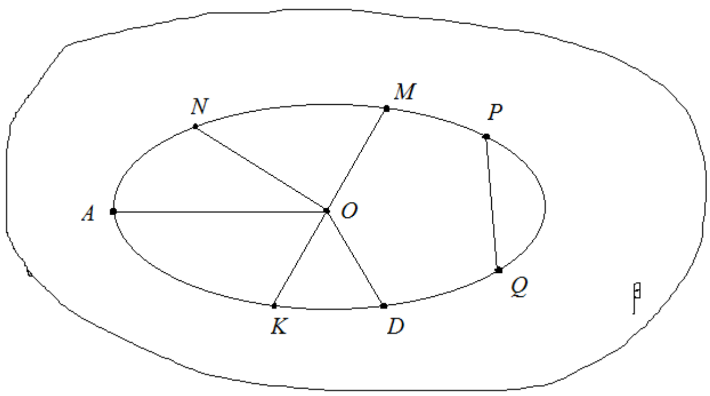


Рис.122

Нехай еліпс F розташовано на площині β. Як і у випадку кола, еліпс розділяє площину β на дві області, **внутрішню** і **зовнішню**. На рис. 126

внутрішню область зображеного еліпса заштриховано. Відносно канонічної для еліпса F прямокутної декартової системи координат Oxy внутрішня область цього еліпса характеризується нерівністю

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1, \tag{4}$$

а зовнішня – нерівністю

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1. \tag{5}$$

У випадку кола, відповідно, маємо нерівності

$$x^2+y^2<R^2 \tag{6}$$

і

$$x^2+y^2>R^2, \tag{7}$$

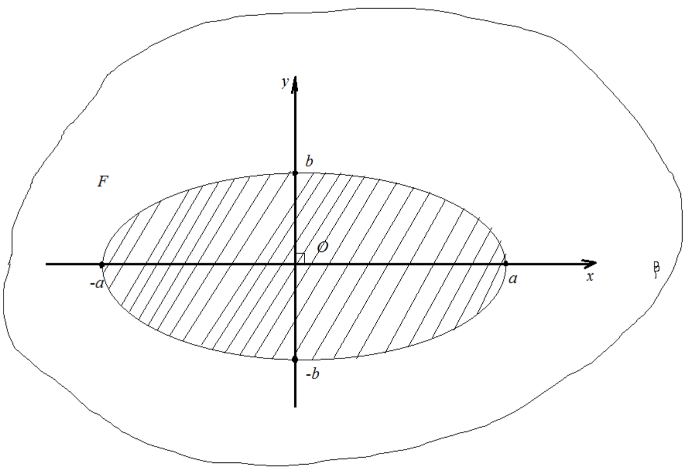


Рис.126

де R – радіус кола.

Як і у випадку кола, якщо радіус еліпса ділить його певну хорду навпіл, то діаметр, що цей радіус містить, ділить навпіл будь-яку хорду, паралельну до даної. Так, на рис. 127 радіус OC проходить через середину M хорди A_1B_1. Діаметр CD містить радіус OC. Хорда A_2B_2 є паралельною до хорди A_1B_1. Діаметр CD ділить хорду A_2B_2 навпіл. Як і у випадку кола, цей факт надає можливість при наявності еліпса за допомогою циркуля і лінійки визначити положення його центру. Для цього достатньо побудувати дві паралельні між собою хорди даного

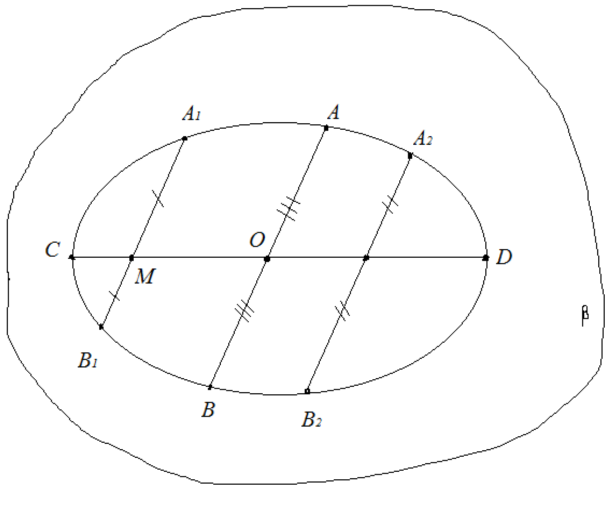


Рис.127

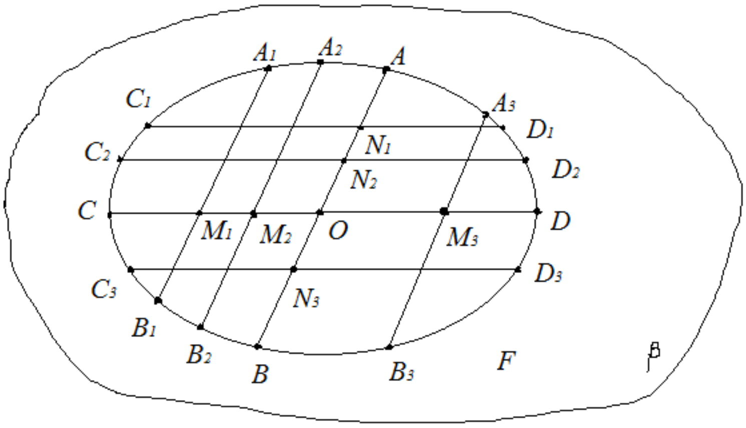


Рис.128

еліпса (хорди A_1B_1 і A_2B_2 на рис. 127), через середини цих хорд провести третю хорду (хорда CD на рис. 127), яка виявиться діаметром даного еліпса, і поділити її навпіл. **Діаметр** CD **еліпса** називається **спряженим до** його **діаметра** AB, якщо він ділить навпіл всі хорди, що є паралельними до діаметра AB. Для кожного діаметра еліпса існує єдиний спряжений діаметр [14]. На рис. 127 діаметр CD є спряженим до діаметра AB ($AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$). Більш за це, доведено [ ], що якщо діаметр CD є спряженим до діаметра AB, то діаметр AB цього еліпса є спряженим до діаметра CD. Отже, розглядають пари взаємно спряжених діаметрів еліпса. Так, на рис. 128 діаметри AB і CD еліпса F утворюють пару його взаємно спряжених діаметрів $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel AB$; $A_1M_1 = M_1B_1$, $A_2M_2 = M_2B_2$, $A_3M_3 = M_3B_3$, $M_1 \in CD$, $M_2 \in CD$, $M_3 \in CD$; $C_1D_1 \parallel C_2D_2 \parallel C_3D_3 \parallel CD$; $C_1N_1 = N_1D_1$, $N_1 \in AB$, $C_2N_2 = N_2D_2$, $C_3N_3 = N_3D_3$; $N_2 \in AB$, $N_3 \in AB$.

Будь-яка пара спряжених діаметрів кола є парою його взаємно перпендикулярних діаметрів. У еліпса, що не є колом, існує лише одна пара взаємно перпендикулярних спряжених діаметрів [14]. Такі діаметри називаються **головними осями** даного

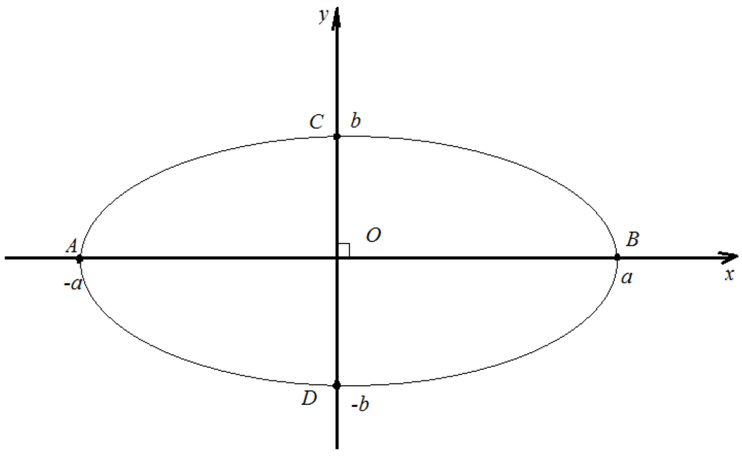


Рис.129

еліпса. Вони належать координатним осям канонічної для даного еліпса прямокутної декартової системи координат. Так, на рис. 129 відрізки AB і CD є головними осями еліпса F. Головні осі еліпса мають, відповідно, найбільшу і найменшу можливі для діаметрів даного еліпса довжини.

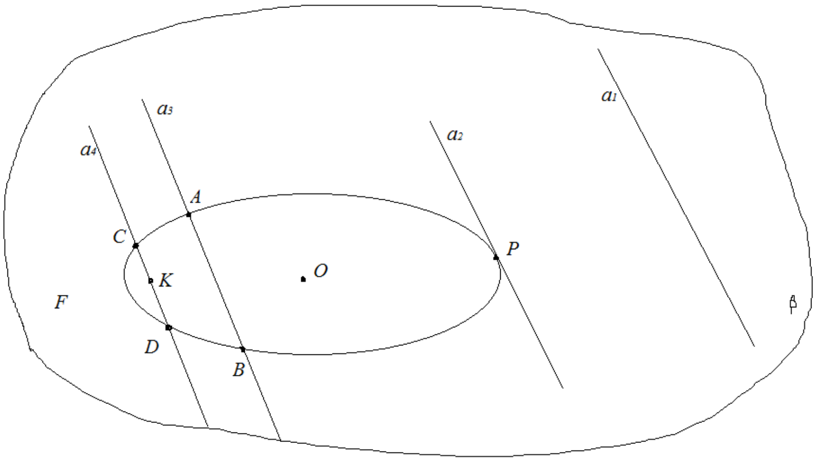


Рис.130

Якщо еліпс відносно канонічної прямокутної декартової системи координат задано рівнянням (2), у якому $a > b > 0$, то $AB = 2a$, $CD = 2b$. Нехай еліпс з центром у точці O розташовано на площині β. Як і у випадку кола, пряма площини β може не мати з даним еліпсом жодної спільної точки. Тоді вона розміщена у зовнішній відносно даного еліпса області площини β [21]. Пряма може мати з еліпсом єдину спільну точку. У цьому випадку пряма називається **дотичною** до **еліпса**, спільна точка називається **точкою дотику**, всі точки дотичної до еліпса за виключенням точки дотику розташовані у зовнішній відносно даного еліпса області площини β. Через кожну точку еліпса проходить одна і тільки одна дотична до нього [21]. Пряма може мати з еліпсом дві спільні точки. У такому випадку пряма називається **січною** до даного **еліпса**. Більше ніж дві спільні точки пряма з еліпсом мати не може[21]. Якщо пряма площини β проходить через внутрішню точку еліпса, то вона є **січною** до даного **еліпса**. Так, на рис. 130 пряма a_1 не має з еліпсом F жодної спільної точки, всі точки прямої a_1 розташовані у зовнішній відносно даного еліпса F області площини β. Пряма a_2 є дотичною до еліпса F, точка P є точкою дотику, єдиною спільною точкою еліпса F і прямої a_2, всі точки прямої a_2, за виключенням точки P, розташовані на площині β у зовнішній відносно еліпса F області. Пряма a_3 є січною до еліпса F. Вона має з еліпсом F дві спільні точки – A і B. Відрізок AB для еліпса F є хордою, всі внутрішні точки відрізка AB лежать у внутрішній області даного еліпса, всі точки прямої a_3, за виключенням точок відрізка AB, розташовані у зовнішній відносно еліпса F області площини β. Пряма a_4 проходить через точку K, що належить внутрішній області еліпса F. Ця пряма є січною до даного еліпса, перетинає його у точках C і D.

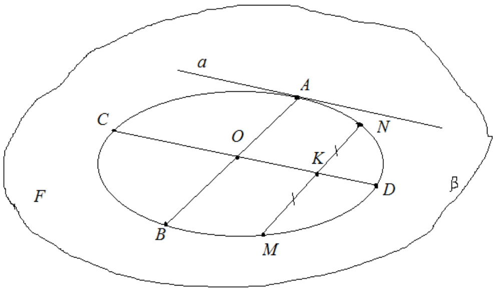


Рис.131

Нехай пряма a площини β дотикається до еліпса F цієї площини у точці A (рис. 131). Проведемо діаметр AB даного еліпса. Нехай діаметр CD є спряженим діаметром до діаметра AB. (Тобто, він ділить навпіл всі хорди даного еліпса, зокрема хорду MN, паралельні до діаметра AB). Доведено, що пряма a є паралельною до діаметра CD ($a \parallel CD$) [21]. Звідси випливає простий спосіб побудови дотичної до еліпса у його довільній точці за допомогою циркуля і лінійки.

Так само, як і для кола, для еліпса вводяться поняття **центрального кута, сектора, сегмента.**

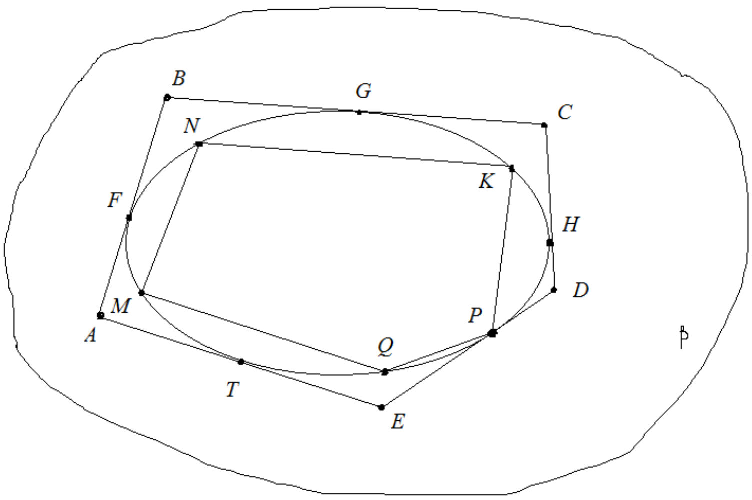


Рис.132

Многокутник називається **вписаним у еліпс**, якщо всі вершини цього многокутника належать даному еліпсу. Сторони вписаного многокутника є хордами відповідного еліпса.

Многокутник

називається **описаним навколо еліпса**, якщо всі сторони цього многокутника дотикаються даного еліпса у певних внутрішніх точках. Тобто, всі прямі, що містять сторони многокутника, є дотичними до даного еліпса, і всі точки дотику є внутрішніми точками відповідних сторін многокутника. Так, на рис. 132 п'ятикутник $MNKLQ$ є вписаним у еліпс F. Його сторони MN, NK, KL, LQ, QM є хордами даного еліпса. П'ятикутник $ABCDE$ є описаним навколо даного еліпса, його сторони дотикаються даного еліпса, відповідно, у точках T, G, H, P, W.

Доведено [21], що, якщо многокутник вписано у еліпс, або многокутник описано навколо еліпса, то цей многокутник є опуклим.

Теорема 8.1. *У будь-який еліпс можна вписати паралелограм.*

Справедливість твердження є очевидним фактом, тому що будь-який еліпс має центр, будь-які два діаметра еліпса центром еліпса діляться навпіл, будь-який чотирикутник, діагоналі якого перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, є паралелограмом.

Теорема 8.2. *У будь-який еліпс можна вписати трапецію.*

Справедливість твердження є очевидним фактом, основами вписаної трапеції будуть будь-які дві паралельні між собою хорди еліпса, що знаходяться на різних відстанях від його центру.

Теорема 8.3. *Навколо кожного еліпса можна описати паралелограм.*

Доведення. W Розглянемо довільний еліпс F з центром у точці О. Проведемо у ньому довільний діаметр AB і побудуємо спряджений до AB діаметр CD. Через точку A, паралельно до діаметра CD, проведемо пряму a_1. Через точку B паралельно до діаметра CD проведемо пряму a_2. Проведемо у еліпсі F діаметр MN, відмінний від діаметра AB. Побудуємо спряджений до нього діаметр PQ. Через точку M, паралельно до діаметра PQ, проведемо пряму b_1, через точку N, паралельно до діаметра PQ, проведемо пряму b_2. Позначимо $E = a_1 \cap b_1$, $G = a_2 \cap b_1$, $H = a_2 \cap b_2$, $K = a_2 \cap b_1$. Паралелограм $EGHK$ є описаним навколо еліпса F (рис. 133). W

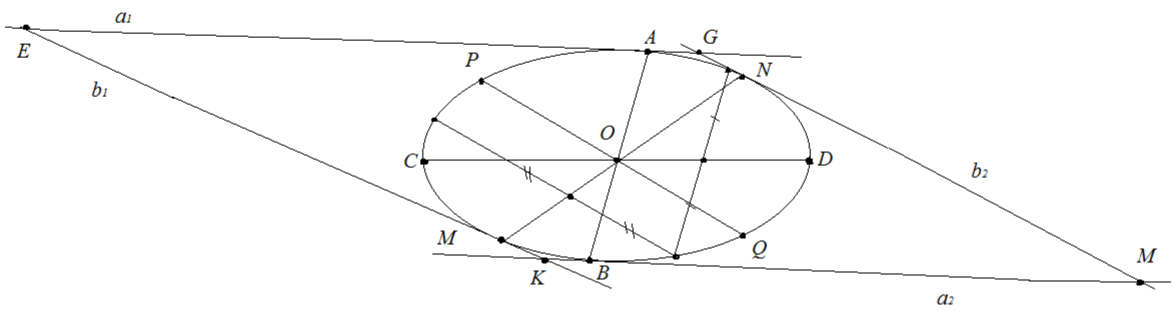


Рис.133

Зрозуміло, що навколо кожного еліпса можна описати безліч паралелограмів. Форма відповідного паралелограма визначається обранням діаметрів AB і MN. ■

Теорема 8.4. *Навколо кожного еліпса можна описати трапецію.*

Доведення є очевидним. У той же час воно є складовою частиною, наприклад, розв'язання задачі 10.22.

Теорема 8.5. *Нехай квадрат $EGHP$ $(EG \parallel PH)$ описано навколо кола з центром у точці O (рис. 134), сторони квадрата дотикаються кола, відповідно, у точках A, D, B, C, відрізки AB і CD є взаємно перпендикулярними діаметрами даного кола. Нехай точка M належить відрізку EA, відрізок CM перетинає коло у точці N, хорда DN кола перетинає радіус OA у точці K. Тоді $MK \parallel EO$.*

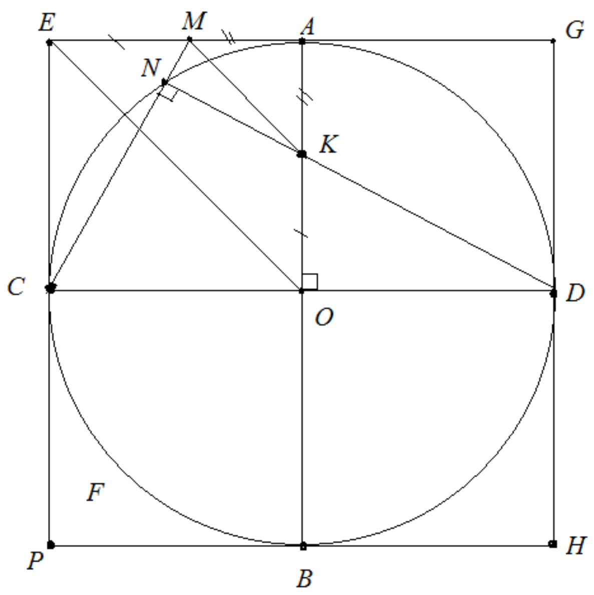


Рис.134

Доведення. W Дана теорема є теоремою шкільного курсу евклідової геометрії. Але сформульоване твердження виявилося принципово важливим саме для теорії зображень просторових фігур на площині при паралельному проектуванні. Тому наведемо його детальне доведення.

$\angle CND = 90^\circ$, бо є кутом, вписаним у коло, що спирається на діаметр CD. Отже, $CM \perp ND$. Розглянемо $\triangle MEC$ і $\triangle KOD$. $\angle MEC = 90^\circ$, бо чотирикутник $EGHP$ є квадратом. $\angle KOD = 90^\circ$, бо діаметри AB і CD є взаємно перпендикулярними. $CE = OA$, бо $CEAO$ — квадрат, $OA = OD$, бо $OAGD$ — квадрат. Отже, $CE = OD$. $\angle ECM = \angle ODK$ як гострі кути із взаємно перпендикулярними сторонами. Таким чином, $\triangle MEC = \triangle KOD$ — за катетами і прилеглими гострими кутами. Звідси $EM = KO$. Але $EA = AO$ бо $EAOC$ — квадрат. Значить, $AM = AK$. Тоді, за узагальненою теоремою Фалеса, $MK \parallel EO$, що й треба було довести. W

Теорема 8.6. *Будь-який еліпс і лише еліпс може бути зображенням будь-якого еліпса при певному невиродженому паралельному проектуванні. Зокрема будь-який еліпс і лише еліпс може бути зображенням будь-якого кола при певному невиродженому паралельному проектуванні.*

Доведення. W У курсі аналітичної геометрії доводиться [12], що будь-які два еліпса є афінно еквівалентними фігурами. Вже доведено (наслідок 2 з теореми 5.1), що одна плоска фігура може бути зображенням іншої плоскої фігури при невиродженому паралельному проектуванні тоді та тільки тоді, коли ці фігури є афінно еквівалентними. Звідси випливає справедливість сформульованої теореми. W

У підручнику [10] для учнів 11-ого класу середніх шкіл доведено, що саме еліпс є проекцією кола при будь-якому невиродженому паралельному проектуванні, фактично, обґрунтовано, що це може бути еліпс довільної форми. Всі еліпси однакової форми є подібними між собою. Отже, таким чином можна обгрунтувати справедливість теореми 8.6 і елементарними методами.

Наслідок 1. *Якщо еліпс* F' *є зображенням еліпса* F *при певному паралельному проектуванні, то*

1) точки, що належать внутрішній області еліпса F, *зображені точками, що належать внутрішній області еліпса* F';

2) точки, що належать зовнішній області еліпса F, *зображені точками, що належать зовнішній області еліпса* F';

3) зображенням хорди еліпса F *є хорда еліпса* F';

4) зображенням центра еліпса F *є центр еліпса* F';

5) зображенням діаметра еліпса F *є діаметр еліпса* F';

6) зображенням пари спряджених діаметрів еліпса F *є пара спряджених діаметрів еліпса* F';

7) зображенням дотичної до еліпса F *є дотична до еліпса* F';

8) зображенням паралелограма, описаного навколо еліпса F, *є* паралелограм, описаний навколо еліпса F'.

9) зображенням дуги AB *еліпса* F *є дуга* $A'B'$ *еліпса* F', *при цьому зображенням точки* A *є точка* A', *точки* B *— точка* B';

10) зображенням центрального кута еліпса F *є центральний кут еліпса* F';

11) зображенням сектора еліпса F *є сектор еліпса* F';

12) зображенням сегмента еліпса F *є сегмент аналогічного виду еліпса* F';

13) зображенням многокутника, вписаного у еліпс F *є многокутник, вписаний у еліпс* F';

14) зображенням многокутника, описаного навколо еліпса F, *є многокутник, описаний навколо еліпса* F'.

Справедливість наслідку 1 випливає із властивостей афінних перетворень геометричних фігур, а також може бути обґрунтована елементарними методами.

Наслідок 2. *Будь-які два відрізка, що не лежать на одній прямій, перетинаються, і точкою перетину діляться навпіл, є спряженими діаметрами певного еліпса. За даними відрізками цей еліпс визначається однозначно, кожну його точку можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.*

Доведення. W Нехай відрізки $A'B'$ і $C'D'$, що не лежать на одній прямій, перетинаються у точці O', $A'O' = O'B'$, $C'O' = O'D'$. Через точки A' і B' проведемо прямі, паралельні до прямої $C'D'$, через точки C' і D' — прямі, паралельні до прямої $A'B'$. Як результат попарного перетину прямих першої пари з прямими другої пари утвориться паралелограм $E'G'H'P'$ (рис. 135). Відрізки $A'B'$ і $C'D'$ сполучають середини протилежних сторін цього паралелограма. За теоремою 7.1 , будь-який паралелограм може бути зображенням будь-якого паралелограма при певному паралельному проектуванні, зокрема будь-який паралелограм може бути зображенням будь-якого квадрата. Розглянемо паралельне проектування h, при якому довільний квадрат $EGHP$ (рис. 134) зображається паралелограмом $E'G'H'P'$ так, що при цьому точка E' є зображенням точки E, точка G' є зображенням точки G, точка H' є зображенням точки H, точка P' є зображенням точки P (рис. 135). Оскільки при паралельному проектуванні середина відрізка зображається серединою відрізка-зображення, середина A сторони EG зображається серединою A' сторони $E'G'$, середина B сторони PH — серединою B' сторони $P'H'$, середина C сторони EP — серединою C' сторони $E'P'$, середина D сторони GH — серединою D' сторони $G'H'$. Отже, відрізок $A'B'$ є зображенням відрізка AB

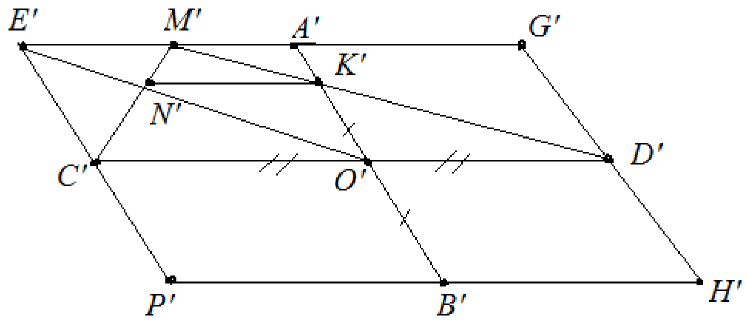


Рис.135

, відрізок $C'D'$ — зображенням відрізка CD. Центр O квадрата $EGHP$ є точкою перетину відрізків AB і CD. Тому він зображається точкою O' перетину відрізків $A'B'$ і $C'D'$. Розглянемо коло F з центром у точці O радіусу OA (рис. 134). Це коло вписане у квадрат $EGHP$ і дотикається сторін цього квадрата відповідно у точках A, D, B, C. Відрізки AB і CD є взаємно перпендикулярними і тому спряженими діаметрами кола F. При невиродженому паралельному проектуванні паралельні прямі зображаються паралельними. Отже, зображенням прямої MK є пряма $M'K'$, $M'K' \parallel E'O'$, $K' \in O'A'$, точка K' є зображенням точки K. Точка N' є точкою перетину еліпса F' і променю $C'M'$. Точка N є точкою перетину кола F і променю CM. $f(F) = F'$, $f(CM) = C'M'$. Точка перетину геометричних фігур при паралельному проектуванні зображається їх точкою перетину. Отже, $f(N) = N'$. З іншого боку, точка N є точкою перетину променів CM і DK, зображенням яких, відповідно, є промені $C'M'$ і $D'K'$. Значить, точка N' є точкою перетину променів $C'M'$ і $D'K'$. Цей факт обґрунтовує можливість побудови точки N' за точкою M' за допомогою циркуля і лінійки. (Проводимо $M'K' \parallel E'O'$, $K' \in O'A'$, точка N' лежить на перетині променів $C'M'$ і $D'K'$). Одночасно встановлюється взаємно однозначна відповідність між точками еліпса F', розташованого всередині паралелограма $C'E'A'O'$, і внутрішніми точками відрізка $E'A'$ (Легко обґрунтувати, що, за вказаним правилом, за кожною точкою M' відрізка $E'A'$ знаходиться єдина точка N', різним точкам M' відрізка $E'A'$ відповідають різні точки N', для кожної точки $N' \in F'$ існує відповідна точка M' на відрізку $E'A'$).

Аналогічні міркування є справедливими і для точок еліпса F', розташованих всередині паралелограмів $O'A'G'D'$, $P'C'O'B'$ і $B'O'D'H'$. Таким чином, вони є справедливими для кожної точки еліпса F' (Зрозуміло, що для точок $A', D', B'\, i\, C'$ еліпса F' ніякі побудови не потрібні).

Припустимо, існує інший еліпс F'', для якого відрізки $A'B'$ і $C'D'$ є спряженими діаметрами. Тоді еліпс F'' також є вписаним у паралелограм

$E'G'H'P'$. Існує паралельне проектування φ, яке переводить паралелограм $E'G'H'P'$ у квадрат $EGHP$ так, що зображенням точки E' є точка E, зображенням точки O' — точка O. Таке проектування φ визначено однозначно, бо воно співпадає з таким афінним відображенням паралелограма $E'A'O'C'$ на паралелограм $EAOC$, при якому точка E' переходить у точку E, точка A'— у точку A, точка O'— у точку O, точка C'— у точку C. У той же час саме таку властивість має афінне відображення, обернене до відображення f. Якщо для повного відображення обернене відображення існує, то воно визначено однозначно. Звідси випливає, що еліпс F'', як і еліпс F', є зображенням еліпса F при паралельному проектуванні f, F'' співпадає з F', однозначну визначеність еліпса відрізками відрізками $A'B'$ і $C'D'$ доведено. W

Наслідок 3. *У будь-який паралелограм можна вписати еліпс.*

Доведення є очевидним.

Наслідок 4. *Якщо на довільних еліпсах F і F', відповідно, обрані довільні точки A і A', то існує паралельне проектування, при якому еліпс F' є зображенням еліпса F, а точка A' — зображенням точки A.*

Доведення. W Розглянемо еліпси F і F' разом з їх центрами O і O' (Як було обґрунтовано раніше за наявністю еліпса, його центр не тільки є однозначно визначеним, а й може бути побудованим за допомогою циркуля і лінійки). Проведемо діаметри AB і $A'B'$ даних еліпсів. Побудуємо, відповідно, спряджені до них діаметри CD і $C'D'$. За теоремою 4.2, існує паралельне проектування f, при якому зображенням точки A є точка A', зображенням точки O — точка

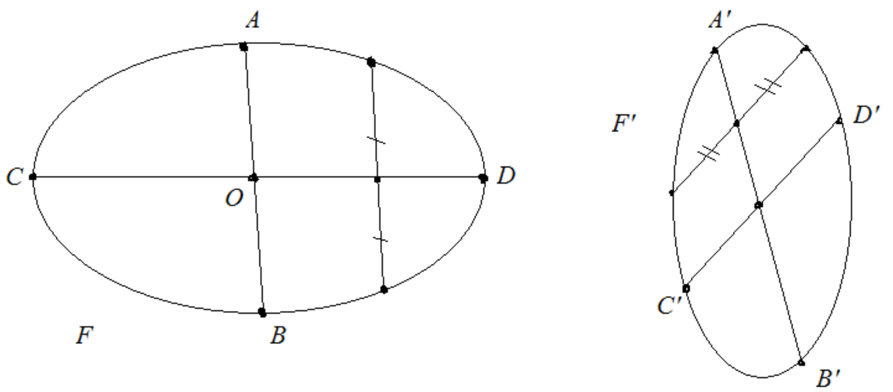


Рис.136

O', зображенням точки D — точка D'. Згідно властивостей паралельного проектування, при цьому зображенням відрізка AB буде відрізок $A'B'$, зображенням відрізка CD — відрізок $C'D'$. Згідно наслідку 2 з теореми 8.6, за відрізками AB і CD, як за спрядженими діаметрами, однозначно відновлюється еліпс F, за відрізками $A'B'$ і $C'D'$, як за спрядженими діаметрами, однозначно відновлюється еліпс F'. За теоремою 8.6 і першим наслідком з неї зображенням еліпса F при паралельному проектуванні f є еліпс, спрядженими діаметрами якого є відрізки $A'B'$ і $C'D'$. Отже, це еліпс F'. W

Наслідок 5. *Якщо задані коло F і еліпс F', довільна точка A на колі F і довільна точка A' на еліпсі F', то існує паралельне проектування f, при якому еліпс F' є зображенням кола F, а точка A'— зображенням точки A.*

Доведення є очевидним.

Наслідок 6. *Якщо відомо, що заданий еліпс F' є зображенням кола F при певному паралельному проектуванні, то довільний діаметр еліпса F' можна вважати зображенням довільного діаметра кола F.*

Доведення є очевидним.

Наслідок 7. *Якщо задані еліпс F із довільною парою спряджених діаметрів AB і CD і еліпс F' із довільною парою спряджених діаметрів $A'B'$ і $C'D'$, то існує паралельне проектування, при якому еліпс F' є зображенням еліпса F, діаметр $A'B'$ — зображенням діаметра AB, діаметр $C'D'$ — зображенням діаметра CD.*

Доведення є очевидним.

Наслідок 8. *Якщо задане коло F і еліпс F', довільні взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD кола F, довільні спряджені діаметри $A'B'$ і $C'D'$ еліпса F', то існує паралельне проектування, при якому еліпс F' є зображенням кола F, діаметр $A'B'$ — зображенням діаметра AB, діаметр $C'D'$ — зображенням діаметра CD.*

Доведення є очевидним.

Наслідок 9. *Якщо точка A' площини еліпса F' знаходиться у зовнішній відносно еліпса F' області, то через цю точку проходять точно дві дотичні до еліпса F'. Якщо точка A' належить еліпсу F', то через цю точку проходить єдина дотична до еліпса F'. Якщо точка A' площини еліпса F' знаходиться всередині еліпса F', то через цю точку не проходить жодної дотичної до еліпса F' У випадку наявності, дотичні можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.*

Доведення. W Зрозуміло, що справедливість тверджень наслідку 9 у теорії кривих другого порядку можна обґрунтувати без жодних посилань на теорему 8.6. Але всі ці факти безпосередньо випливають і з теореми 8.6.

Обгрунтуємо, наприклад, справедливість першого твердження.

Нехай еліпс F' з центром у точці O' належить площині α, точка A' площини α лежить у зовнішній відносно еліпса F' області. Побудуємо відрізок $O'A'$. Він перетне еліпс F' у певній точці K', відрізок $O'K'$ є радіусом еліпса F'. Розглянемо довільне коло F певної площини β. Оберемо на ньому довільну точку K. Згідно наслідку 5 з теореми 8.6 еліпс

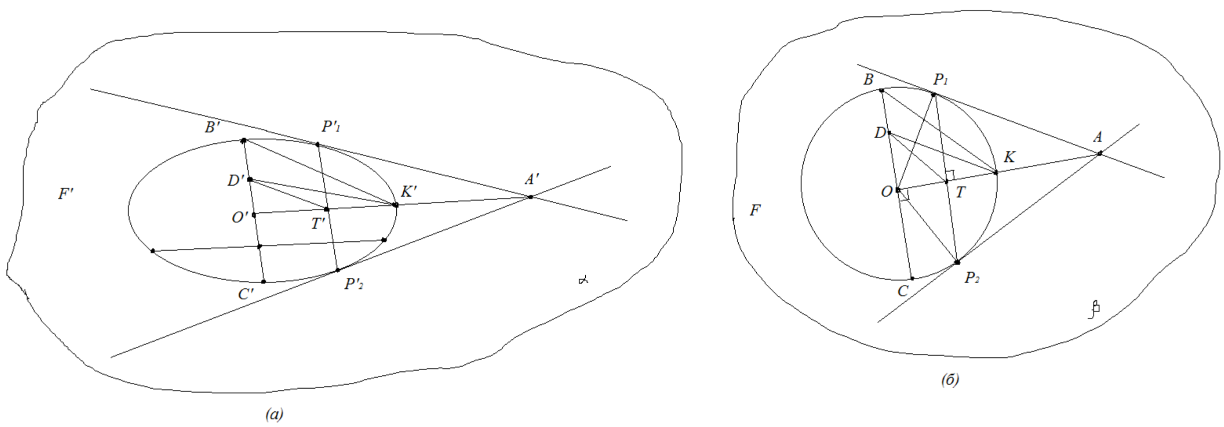


Рис.157

F' можна вважати зображенням кола F при певному паралельному проектуванні. Як результат відповідного афінного відображення f при цьому точка K' буде зображенням точки K. Проведемо промінь OK. За допомогою теореми Фалеса побудуємо на ньому таку точку A, що точка K лежить між точками O і A та $\frac{O'K'}{K'A'} = \frac{OK}{KA}$. За теоремою 3.9 і задачею 40,

$f(A)=A'$. Оскільки $O'A'>O'K'$, $OA>OK$, точка A у площині β знаходиться поза колом F. Відомо, що із точки A до кола F проходить точно дві дотичні. Нехай це будуть прямі AP_1 і AP_2, $P_1\in F$, $P_2\in F$, $f(P_1)=P_1'$, $f(P_2)=P_2'$, $P_1'\in F'$, $P_2'\in F'$, $P_2'\neq P_1'$. Згідно наслідку 1 з теореми 8.6, прямі $A'P_1'$ і $A'P_2'$ будуть тими двома дотичними до еліпса F', які проходять через точку A'. При зображенні площини β площиною α при паралельному проектуванні f здійснюється взаємно однозначне відображення площини β на площину α, зберігається відношення приналежності фігур. Отже, третьої дотичної до еліпса F', яка проходить через точку A', не існує. Інакше, її прообразом при відображенні f була би третя дотична до кола F, яка проходить через точку A.

Зрозуміло, що побудову точок P_1' і P_2' еліпса F' можна здійснити за допомогою теореми Фалеса при явному використанні оригінала шуканого зображення. Але можливими виявилися і побудови без використання оригінала.

Дійсно, якщо для оригінала (рис. 137б) відрізки AP_1 і AP_2 є дотичними, відповідно, у точках P_1 і P_2 до кола F, то $OP_1=OP_2$ як радіуси одного кола, за відомою теоремою елементарної геометрії $\angle OP_1A=\angle OP_2A=90°$. Тоді $\triangle OP_1A=\triangle OP_2A$, як прямокутні трикутники, що мають однакові катети і спільну гіпотенузу. Звідси $\angle P_1OA=\angle P_2OA$. Але тоді відрізок OT $(OA\bigcap P_1P_2<T)$ є проведеною до основи бісектрисою рівнобедреного трикутника P_1OP_2, $OT\perp P_1P_2$, відрізок P_1T є проведеною до гіпотенузи висотою прямокутного трикутника OP_1A. Звідси $OP_1^2=OA\cdot OT$ (квадрат катета прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на проекцію цього катета на гіпотенузу), $\dfrac{OP_1}{OT}=\dfrac{OA}{OP_1}$. Перпендикулярно до радіуса OK проведемо діаметр OK кола F. Паралельно до BK проведемо TD до

перетину з радіусом OB у точці D. За теоремою Фалеса, $OD = OT$, оскільки $OB = OK$. Отже, $\frac{OP_1}{OD} = \frac{OA}{OP_1}$. Але $OP_1 = OK = OB$ як радіуси одного кола. Тому $\frac{OK}{OD} = \frac{OA}{OB}$.

Звідси випливає подібність $\triangle DOK$ до $\triangle BOA$ за двома катетами, рівність кутів DKO і BAO, паралельність відрізків DK і AB.

Останній факт і надає можливість такої побудови дотичних до еліпса F', що проходять через точку A', яка не вимагає використання оригіналу.

1. Побудуємо відрізок $A'O'$. Оскільки точка A' на площині α розташована поза еліпсом F', цей відрізок перетне еліпс F' у певній точці K', $O'K'$ — радіус еліпса F' (рис 134а).

2. За допомогою допоміжної хорди побудуємо діаметр $B'C'$, спряджений до радіуса $O'K'$ (зрозуміло, він буде зображенням діаметра BC при паралельному проектуванні f).

3. Побудуємо відрізок $B'A'$.

4. Проведемо відрізок $K'D' \parallel B'A'$ до перетину у точці D' радіусу $O'B'$ (точка D' буде зображенням точки D).

5. Проведемо хорду $B'K'$ і відрізок $D'T' \parallel B'K'$ до перетину з радіусом $O'K'$ у точці T'(точка T' буде зображенням точки T при паралельному проектуванні).

6. Через точку T', паралельно до діаметра $B'C'$, проведемо хорду $P_1'P_2'$.

7. Точки P_1' і P_2' і будуть шуканими точками дотику, зображеннями точок P_1 і P_2 при паралельному проектуванні.

8. Прямі $A'P_1'$ і $A'P_2'$ будуть шуканими дотичними.

Справедливість першого твердження наслідку 9 доведено. Справедливість інших його тверджень можна обгрунтувати аналогічно. W

Теорема 8.7. *Якщо відомо, що заданий еліпс F' є зображенням заданого еліпса F при певному паралельному проектуванні, то зображення*

H' кожної фігури H, розташованої на площині β еліпса F при даному паралельному проектуванні є метрично повним.

Доведення. W Оберемо на еліпсі F довільну точку A. Нехай точка A'

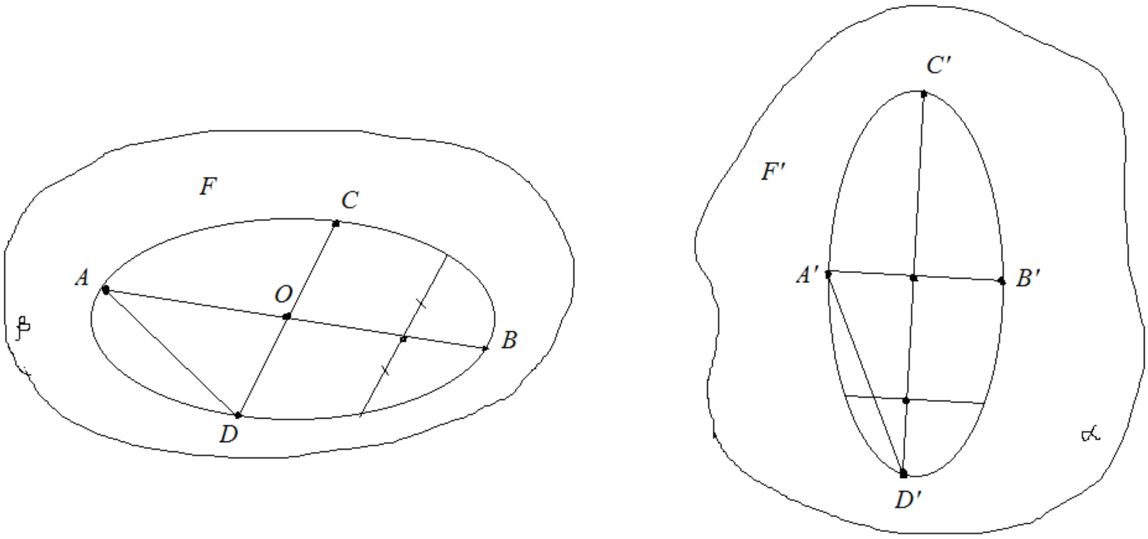


Рис.138

еліпса F' буде зображенням точки A при даному паралельному проектуванні.

Якщо еліпс задано то, як було вказано раніше, заданим вважається і його центр, тому що центр неважко знайти за допомогою циркуля і лінійки. Отже, нехай точка O є центром еліпса F, точка O' — центром еліпса F'. Проведемо діаметр AB еліпса F, побудуємо спряджений до нього діаметр CD.

Проведемо діаметр $A'B'$ еліпса F', побудуємо спряджений до нього діаметр $C'D'$ (рис.138). Згідно наслідку 1 з теореми 8.6, при даному паралельному проектуванні точка O' є зображенням точки O, відрізок $A'B'$ — зображенням відрізка AB, відрізок $C'D'$ — зображенням відрізка CD. Але тоді трикутник $A'O'D'$ є зображенням трикутника AOD. Згідно наслідку 6 теореми 5.1, звідси і випливає справедливість твердження теореми 8.7. W

Наслідок 1. *Якщо відомо, що заданий еліпс F' є зображенням заданого кола F при певному паралельному проектуванні, то для будь-якого відрізка*

$P'Q'$ площини α еліпса F' за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати відрізок, довжина якого дорівнює довжині його оригінала- відрізка PQ.

Доведення. W Твердження є очевидним, тому що із справедливості

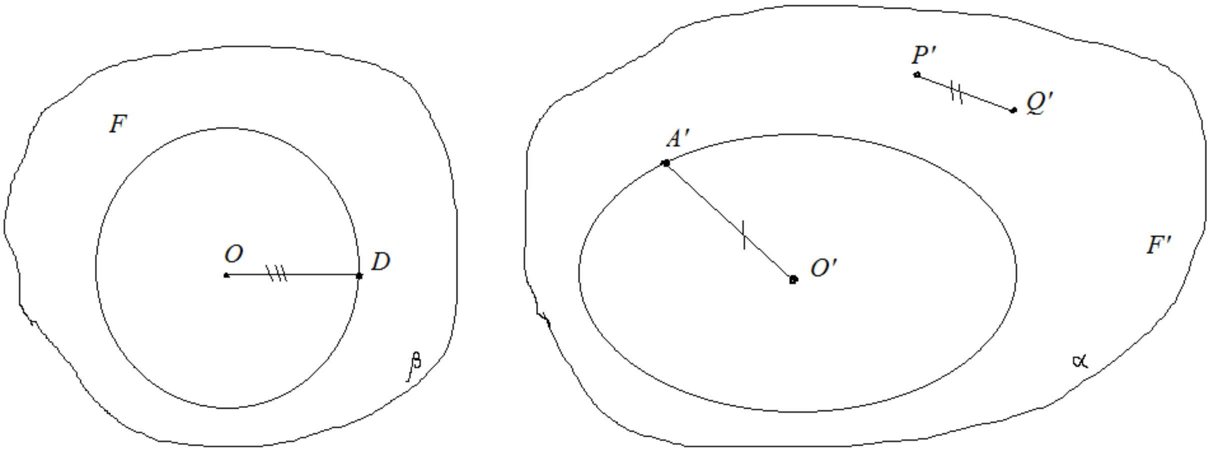


Рис.139

теореми 8.7 випливає, що можна безпосередньо побудувати оригінал-відрізок PQ. Але, якщо для розв'язання певної задачі важливою є лише довжина відрізка-оригінала, можна обмежитися наступними, більш простими, побудовами. На площині α проведемо радіус $O'A'$ еліпса F', паралельний до відрізка $P'Q'$. Згідно наслідку 1 теореми 8.6, радіус $O'A'$ є зображенням певного радіуса кола F, який є паралельним до оригінала PQ відрізка $P'Q'$ (при невиродженому для площини паралельних відрізків паралельному проектуванні вони зображаються паралельними відрізками). При невиродженому паралельному проектуванні зберігається відношення довжин

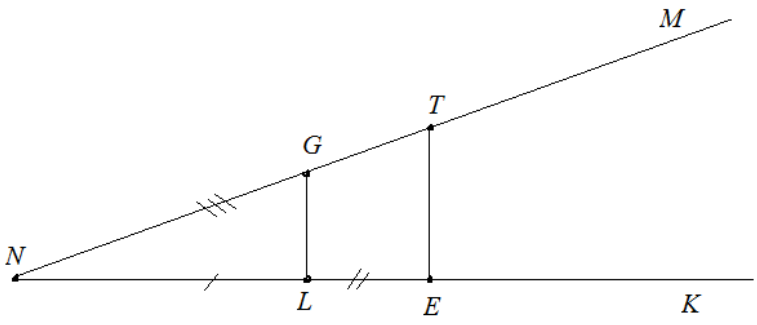


Рис.140

відрізків, які лежать на паралельних прямих. Проведемо довільний радіус OD кола F. Матимемо: $\frac{PQ}{OD} = \frac{P'Q'}{O'A'}$.

Побудову відрізка, довжина якого дорівнює довжині відрізка PQ, неважко виконати за допомогою теореми Фалеса (рис. 140). $\angle MNK$ є довільним, $NL = OA, LE = PQ, NG = OD, ET \parallel LG, GT = PQ$. Відрізок GT є шуканим. W

Теорема 8.8. *Якщо відомо, що заданий еліпс F' є зображенням деякого кола F при певному паралельному проектуванні, то зображення H' кожної фігури H, розташованої на площині β кола F, на площині α еліпса F' є подібно повним.*

Справедливість теореми 8.8 випливає із справедливості наслідку 7 з теореми 5.1 і того факту, що будь-які два кола є подібними між собою.

Питання і завдання для самоконтролю до §8

8.1. Наведіть означення кола, його центра і радіуса у евклідовій геометрії.

8.2. Наведіть означення дуги кола у евклідовій геометрії.

8.3. Наведіть означення радіуса кола, хорди кола, діаметра кола у евклідовій геометрії.

8.4. Як визначаються внутрішня і зовнішня області кола у евклідовій геометрії.

8.5. Охарактеризуйте можливі варіанти взаємного розміщення на площині прямої і кола у евклідовій геометрії. Наведіть приклади.

8.6. Наведіть означення дотичної до кола. Сформулюйте критерії дотичної.

8.7. Сформулюйте теорему евклідової геометрії про властивість радіуса кола, перпендикулярного до хорди цього кола.

8.8. Наведіть означення центрального кута кола, сектора кола, сегмента кола. Надайте необхідні приклади.

8.9. Наведіть означення еліпса. Поясніть, чому коло є окремим випадком еліпса.

8.10. Наведіть означення дуги еліпса, радіуса еліпса, хорди еліпса, діаметра еліпса.

8.11. Як визначаються внутрішня і зовнішня області еліпса?

8.12. Як при наявності еліпса можна визначити положення центра за допомогою циркуля і лінійки?

8.13. У якому випадку один діаметр еліпса називається спряджeним до іншого? Що таке пара взаємно спряджених діаметрів еліпса?

8.14. Що можна стверджувати про спряджені діаметри кола? Наведіть означення головних осей еліпса.

8.15. Охарактеризуйте можливі варіанти взаємного розміщення на площині прямої і еліпса. Наведіть приклади.

8.16. Наведіть означення дотичної до еліпса, який надає можливість побудови дотичної до еліпса у заданій для еліпса точці за допомогою циркуля і лінійки.

8.17. Охарактеризуйте існування дотичних до кола, які проходять через задану точку площини даного кола. Вкажіть способи побудови таких дотичних за допомогою циркуля і лінійки у випадку їх існування.

8.18. Охарактеризуйте існування дотичних до еліпса, які проходять через задану точку площини даного еліпса. Вкажіть способи побудови таких дотичних за допомогою циркуля і лінійки у випадку їх існування.

8.19. Наведіть означення центрального кута еліпса, сектора еліпса, сегмента еліпса. Надайте необхідні приклади.

8.20. Який многокутник називається вписаним у еліпс?

8.21. Який многокутник називається описаним навколо еліпса?

8.22. Як можна у будь-який еліпс вписати паралелограм?

8.23. Як можна навколо будь-якого еліпса описати паралелограм?

8.24. Чи можна у будь-який еліпс вписати трапецію? Як?

8.25. Чи можна навколо будь-якого еліпса описати трапецію? Як?

8.26. Яка геометрична фігура може бути зображенням еліпса при невиродженому паралельному проектуванні?

8.27. Яка геометрична фігура може бути зображенням кола при невиродженому паралельному проектуванні?

8.28. Закінчить речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F при певному паралельному проектуванні, то точки, які належать внутрішній області еліпса F, зображені …»

8.29. Закінчить речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F при певному паралельному проектуванні, то точки, які належать зовнішній області еліпса F, зображені …»

8.30. Закінчить речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F при певному паралельному проектуванні, то зображенням хорди еліпса F є …»

8.31. Закінчить речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F при певному паралельному проектуванні, то зображенням центра еліпса F є …»

8.32. Закінчить речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F при певному паралельному проектуванні, то зображенням діаметра еліпса F є …»

8.33. Закінчить речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F при певному паралельному проектуванні, то зображенням пари спряджених діаметрів еліпса F є …»

8.34. Закінчить речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F при певному паралельному проектуванні, то зображенням дотичної еліпса F є …»

8.35. Закінчить речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F при певному паралельному проектуванні, то зображенням многокутника, вписаного у еліпс F, є многокутник, …»

8.36. Закінчить речення: «Якщо еліпс F' є зображенням еліпса F при певному паралельному проектуванні, то зображенням многокутника, описаного навколо еліпса F, є многокутник, …»

8.37. Обрано довільний еліпс F, точка $A \in F$ і довільний еліпс F', точка $A' \in F'$. Чи існує паралельне проектування, при якому еліпс F' є зображенням еліпса F, а точка A' – зображенням точки A? Відповідь обґрунтуйте.

8.38. Обрано довільне коло із довільною парою взаємно перпендикулярних діаметрів AB і CD та еліпс F' із довільною парою спряджених діаметрів $A'B'$ і $C'D'$. Чи існує паралельне проектування, при якому еліпс F' є зображенням кола F, діаметр $A'B'$ – зображенням діаметра AB, діаметр $C'D'$ – зображенням діаметра CD? Відповідь обґрунтуйте.

8.39. Відомо, що заданий еліпс F' є зображенням заданого еліпса F при певному паралельному проектуванні, фігура H' площини еліпса F' є зображенням певної фігури H площини еліпса F. Що можна стверджувати про характер повноти зображення H'? Відповідь обґрунтуйте.

8.40. Відомо, що заданий еліпс F' є зображенням кола F при певному паралельному проектуванні. Що можна стверджувати про характер повноти зображення H' довільної фігури H, розташованої у площині кола F, при даному паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

§10. Зображення описаних многокутників при невиродженому паралельному проектуванні

Наведемо розв'язки певної кількості стандартних задач на побудову зображень n-кутників, $n \in N$, $n \geq 3$, описаних навколо кола, при невиродженому паралельному проектуванні. У кожній із задач під відповідним n-кутником будемо розуміти n-кутник-каркас.

За умови кожної із запропонованих задач буде задано еліпс, про який відомо, що він є зображенням кола при певному паралельному проектуванні. При цьому завжди будемо вважати, що одночасно з еліпсом задано і його центр. (Можливість при наявності еліпса побудови його центру за допомогою циркуля і лінійки була обґрунтована раніше).

Задача 10.1. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h довільного прямокутного трикутника, описаного навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. □ Нехай коло F з центром у точці O вписано у прямокутник ABC, $\angle ACB = 90°$, дотикається катета BC у точці M, катета AC – у точці N, гіпотенузи AB у точці K (рис. 176). З елементарної геометрії відомо, що чотирикутник $CMON$ є квадратом, точка K належить тій дузі кола F, на яку спирається $\angle QOP$, вертикальний до $\angle NOM$.

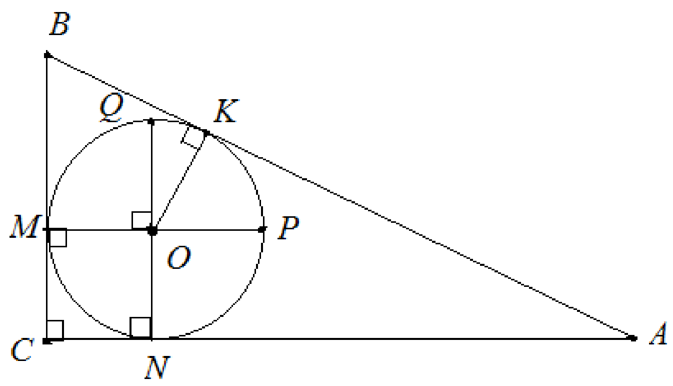


Рис.176

Звідси випливає легкий спосіб побудови довільного прямокутного трикутника, описаного навколо кола. Аналогічний спосіб, в силу відповідних властивостей паралельного проектування, підходить і для еліпса.

Побудуємо довільний діаметр $Q'N'$ заданого на картинній площині α еліпса F' і, за допомогою допоміжної хорди, двоїстий до нього діаметр $M'P'$ (рис. 177). Згідно відповідного наслідку з теореми 8.6, діаметри $Q'N'$ і $M'P'$ можна вважати зображеннями будь-яких взаємно перпендикулярних діаметрів QN і MP кола-оригінала F. Через точку N', паралельно до діаметра $M'P'$, проведемо пряму $C'A'$. Через точку M', паралельно до діаметра $Q'N'$, проведемо пряму $B'C'$. Пряма $C'A'$ буде дотичною до еліпса F' у точці N', пряма $B'C'$ – дотичною до еліпса F' у точці M'. Точка C', очевидно, буде зображенням точки C оригіналу. На дузі $Q'P'$ еліпса, на яку спирається $\angle Q'O'P'$, вертикальний до $\angle N'O'M'$, оберемо довільну точку K'. Завдяки довільності, зрозуміло, її не можна вважати зображенням точки K оригіналу. Але, згідно умови даної задачі, у цьому немає потреби, бо мова йде про побудову зображення довільного прямокутного трикутника, описаного кола-оригінала. Проведемо діаметр $K'L'$ еліпса F'. За допомогою допоміжної хорди побудуємо спряжений до діаметра $K'L'$ діаметр $D'E'$.

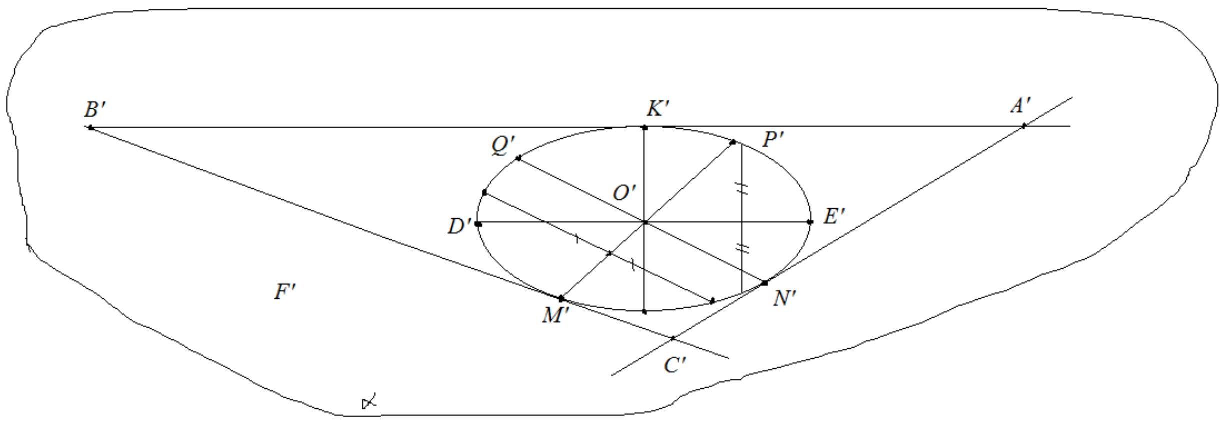


Рис.177

Через точку K' паралельно до $D'E'$ проведемо пряму $B'A'$. Ця пряма буде дотичною до еліпса F' у точці K'. $B' = B'C' \cap B'A'$, $A' = C'A' \cap B'A'$. Трикутник $A'B'C'$ є шуканим. Дійсно, за побудовою, він є трикутником, описаним навколо кола F. Сторони $C'A'$ і $C'B'$ трикутника $A'B'C'$ є відповідно паралельними до спряджених діаметрів $M'P'$ і $N'Q'$ еліпса F'. Отже, у оригіналі $CA \perp CB$.

Зрозуміло, що запропоновані побудови не вимагають явного використання оригіналу. ■

Задача 10.2. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h прямокутного трикутника, подібного до довільного даного, описаного навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. □ За умови задачі задано довільний прямокутний трикутник ABC ($\angle BCA = 90°$) і еліпс F' з центром у точці O' (рис. 178) картинної площини α. Побудуємо коло, вписане у трикутник ABC. Центр O цього кола є точкою перетину бісектрис CP і BQ трикутника ABC. Проведемо $OK \perp AC$, $OM \perp BC$, $ON \perp AB$. $OK = OM = ON$ – радіуси даного кола, точки K, M і N – точки дотику даного кола відповідно до сторін AC, BC і AB. Згідно теореми 8.6, існує паралельне проектування h, при якому заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням побудованого кола F з центром у точці O. Отже, задача зводиться до побудови зображення

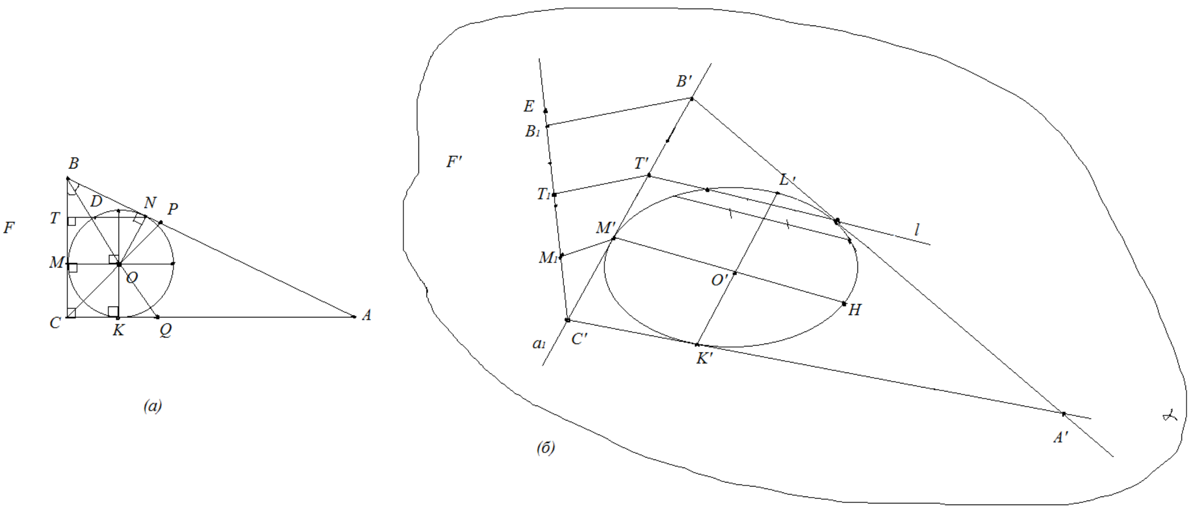


Рис.178

трикутника ABC при паралельному проектуванні h. Оскільки форма прямокутного трикутника ABC є цілком довільною, розв'язати цю задачу без безпосереднього використання оригіналу неможливо.

Побудуємо у еліпсі F' довільний діаметр $K'L$ і спряджений до нього діаметр $M'H$. Згідно наслідку 1 теореми 8.6, радіуси $O'M'$ і $O'K'$ можна вважати зображеннями радіусів OM і OK при паралельному проектуванні h. Через точку M' паралельно до діаметра $K'L$ проведемо пряму a_1, через точку K' паралельно до діаметра $M'H$ проведемо пряму a_2. Ці прямі будуть дотикатися еліпса F', відповідно, у точках M' і K' і будуть, відповідно, зображеннями прямих BC і AC. $a_1 \cap a_2 = C'$, точка C' є зображенням точки C при проектуванні h. Отже, $f(C) = C'$, $f(K) = K'$. За теоремою Фалеса на прямій a_2 можна побудувати точку $A' = f(A)$. Аналогічно, $f(C) = C'$, $f(M) = M'$, на прямій a_1 за теоремою Фалеса можна побудувати точку $B' = f(B)$. Трикутник $A'B'C'$ буде шуканим, пряма $A'B'$ буде дотичною до еліпса F'. Але технічно краще побудувати ще точку $N' = f(N)$ дотику прямої $A'B'$ до еліпса F'. Зручніше за все для цього спочатку провести перпендикуляр NT до прямої BC і за допомогою теореми Фалеса за точками C' і M' на прямій побудувати точки $T' = f(T)$ і $B' = f(B)$ (див. рис. 178б). Далі через точку T' треба провести пряму l, паралельну до діаметра $M'H$, бо у оригіналі $TN \parallel MO$. Звернемо увагу на те, що у оригіналі пряма NT є січною до кола F і перетинає коло F не тільки у точці N, а ще й у точці D, яка лежить між точками T і N. Отже, пряма l перетне еліпс F' у точках $D' = f(D)$ і $N' = f(N)$, точка D' лежатиме між точками T' і N' (рис. 178б). Точка A' утвориться тоді як точка перетину прямих a_2 і $B'N'$.

Задача 10.3. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h рівнобедреного прямокутного трикутника, описаного навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. На відміну від попередньої задачі, у задачі 10.3 форма трикутника-оригінала не є довільною. Це надає можливість розв'язати дану задачу без використання оригіналу у явному вигляді. Насправді, розглянемо коло F з центром у точці O (рис. 179). Проведемо у цьому колі взаємно перпендикулярні діаметри QN і MP. Через точку M паралельно до діаметра QN проведемо пряму BC. Через точку N паралельно до діаметра MP проведемо пряму CA. Зрозуміло, що $BC \perp CA$, коло F є вписаним у прямий кут ACB, чотирикутник $CMON$ є квадратом. Проведемо пряму CO. $CO \perp MN$, бо діагоналі квадрата взаємно перпендикулярними. Але $MN \parallel QP$, бо чотирикутник $MQPN$ є паралелограмом (насправді, навіть, квадратом) – його діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Тоді $CO \perp QP$. Нехай радіус OK кола F лежить на прямій і перетинає хорду QP. Проведемо через точку K паралельно до прямої QP пряму l. $l \perp OK$, отже, l є дотичною до кола F у точці K. Нехай пряма l перетинає пряму CA у точці A, пряму CB у точці B. Трикутник ABC є прямокутним трикутником, описаним навколо кола F. $\angle BAC = \angle QPO$; $\angle ABC = \angle PQO$, як гострі кути з відповідно паралельними сторонами. Але трикутник QOP є прямокутним рівнобедреним трикутником ($OQ = OP$ як радіуси кола F). Отже, $\angle QPO = \angle PQO = 45°$. Але тоді і $\angle BAC = \angle ABC = 45°$, трикутник ABC є рівнобедреним прямокутним трикутником, описаним навколо кола F.

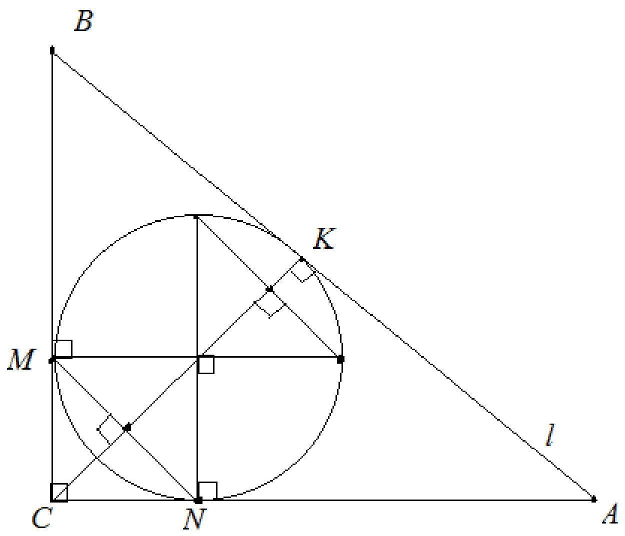


Рис.179

Аналогічні побудови можна виконати для еліпса. Вони повністю відповідають властивостям паралельного проектування і не вимагають явного використання оригіналу.

1. Проведемо довільний діаметр $Q'N'$ еліпса F'.

2. За допомогою допоміжної хорди побудуємо двоїстий діаметр $M'P'$.

3.Через точку M' паралельно до діаметра $Q'N'$ проведемо пряму $B'C'$.

4.Через точку N' паралельно до діаметра $M'P'$ проведемо пряму $C'A'$.

5. Проведемо пряму $C'O'$, позначимо через K' ту точку перетину цієї

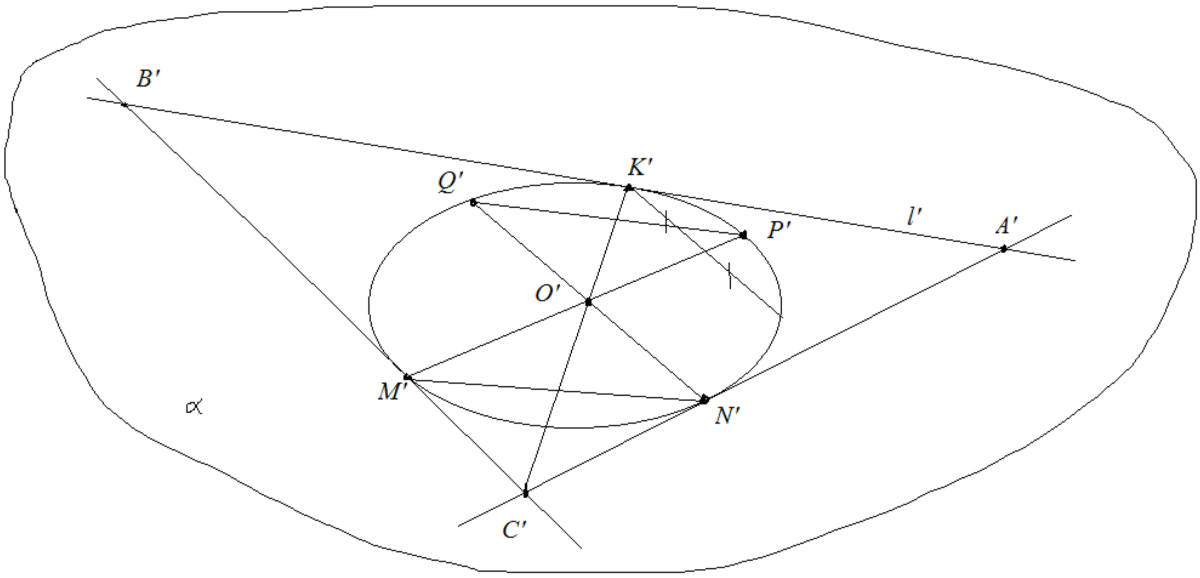


Рис.180

прямої з еліпсом F', яка розташована зовні паралелограма $C'M'O'N'$.

6. Через точку K' паралельно до хорди $Q'P'$ проведемо пряму l'.

7. Нехай $l' \cap C'A' = A'$, $l' \cap C'B' = B'$, трикутник $A'B'C'$ є шуканим (рис. 180).

Задача 10.4. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h квадрата, описаного навколо кола F.*

Розв'язання. Відомо, що, якщо квадрат описано навколо кола F, то сторони квадрата є, відповідно, паралельними до двох взаємно перпендикулярних діаметрів цього кола (рис.181). Якщо еліпс F' є зображенням кола F при певному паралельному проектуванні h, то, згідно теореми 8.3, зображенням двох взаємно перпендикулярних діаметрів кола F може бути будь-яка пара спряджених діаметрів еліпса F'. При невиродженому паралельному проектуванні паралельні прямі зображуються паралельними прямими (теорема 3.6). Звідси випливає справедливість наступного способу розв'язання задачі. Він не вимагає безпосереднього використання оригіналу.

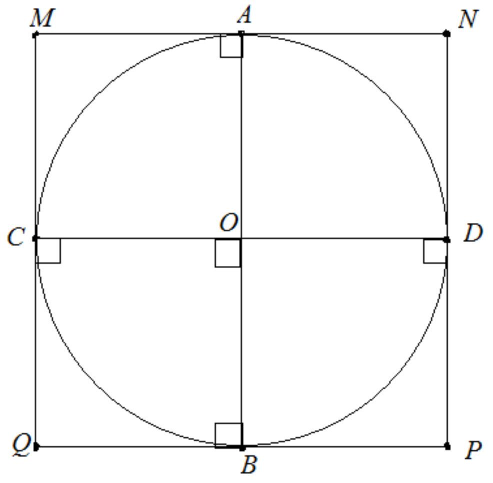


Рис.181

1. Проведемо у еліпсі F' довільний діаметр $A'B'$.

2.Побудуємо діаметр $C'D'$, спряджений до діаметра $A'B'$(рис. 182).

3. Через точку C' паралельно до діаметра $A'B'$ проведемо пряму $M'Q'$. Через точку D' паралельно до діаметра $A'B'$ проведемо пряму $N'P'$.

4. Через точку A' паралельно до діаметра $C'D'$ проводимо пряму $M'N'$. Через точку B' паралельно до діаметра $C'D'$ проводимо пряму $Q'P'$.

5. Паралелограм $Q'M'N'P'$ є зображенням квадрата, описаного навколо кола F.

Відповідно до доведення теореми 8.1, будь-який паралелограм, описаний навколо еліпса F', є зображенням квадрата, описаного навколо кола F при

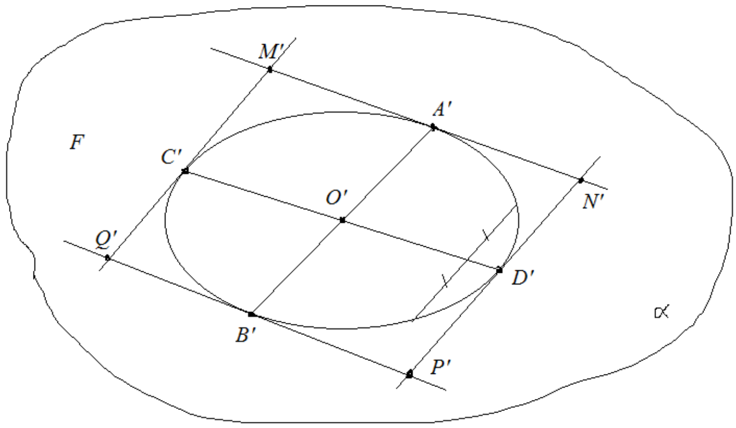


Рис.182

певному паралельному проектуванні.

Задача 10.5. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h прямокутного трикутника кутом у $60°$, описаного навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. Дослідимо спочатку питання про те, як прямокутний трикутник з гострим кутом у $60°$ можна описати навколо кола. Проведемо у колі взаємно перпендикулярні діаметри PQ і MN (рис. 182). Через середину T радіуса OM паралельно до діаметра PQ проведемо хорду KE. $KE \perp OM$. За доведеним раніше, (див. теорему 9. 3) $\angle TKN = 60°$. Через точку M паралельно до діаметра KE проведемо пряму a_1. Через точку Q паралельно до діаметра MN проведемо пряму a_2. $a_1 \perp a_2$. Позначимо через C точку перетину прямих a_1 і a_2. Через середину D хорди KN проведемо радіус OH. $OH \perp KN$. Через точку H паралельно до діаметра KN проведемо пряму b. $b \perp OH$. Отже, пряма b дотикається кола F у точці H. Позначимо через A точку перетину прямих b і a_1, через B – точку перетину прямих b і a_2. Трикутник ABC є шуканим. Дійсно, він є прямокутним трикутником, описаним навколо кола F. $\angle CAB = \angle TKN = 60°$ – гострі кути з відповідно паралельними сторонами. Зрозуміло, що всі аналогічні побудови можна виконати для еліпса F'. Вони повністю відповідають властивостям паралельного проектування і не вимагають безпосереднього використання оригіналу.

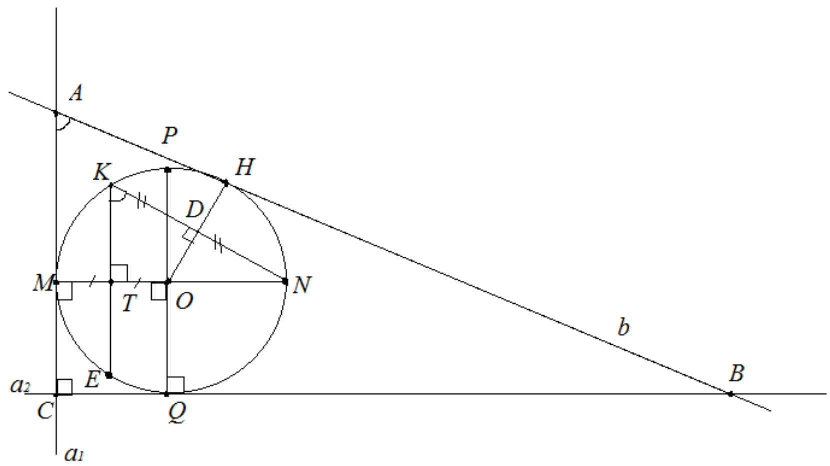


Рис.183

Нехай еліпс F' є зображенням кола F при певному паралельному проектуванні h.

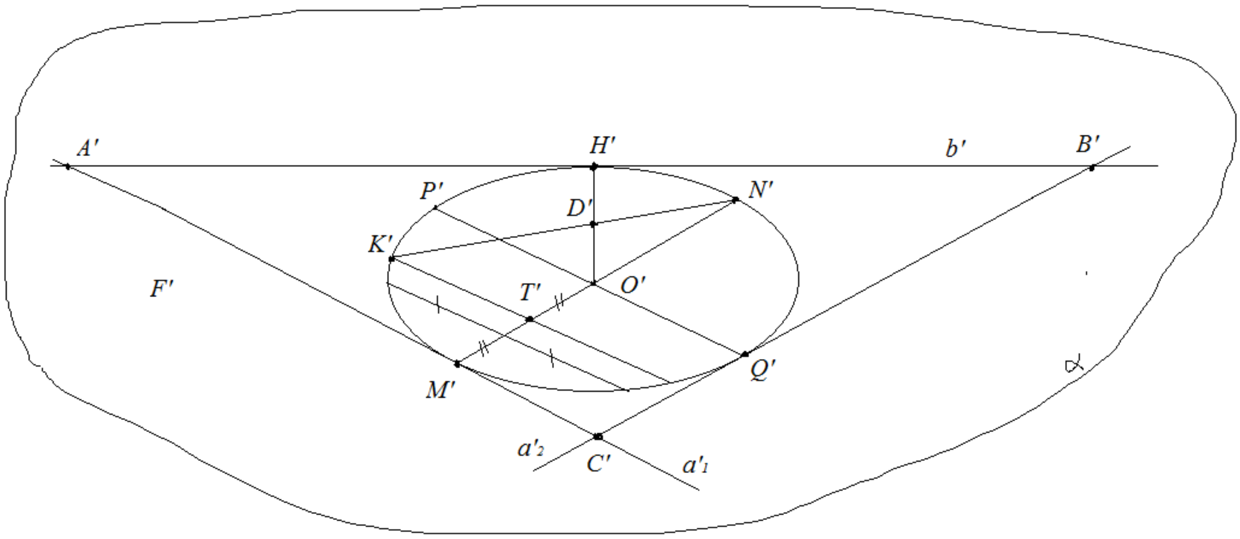


Рис.184

1. Проведемо у еліпсі F' довільний діаметр $P'Q'$. Згідно теореми 8.3 його можна вважати зображенням діаметра PQ кола F при паралельному проектуванні h.

2. Побудуємо спряджений до нього діаметр $M'N'$.

3. Через точку M' паралельно до діаметра $P'Q'$ проведемо пряму a_1'.

4. Через точку Q' паралельно до діаметра $M'N'$ проведемо пряму a_2'.

5. $C' = a_1' \cap a_2'$.

6. Через середину T' радіуса $O'M'$ паралельно до діаметра $P'Q'$ проведемо хорду $K'E'$.

7. Через середину D' хорди $K'N'$ проведемо радіус $O'H'$.

8. Через точку H' паралельно до хорди $K'N'$ проведемо пряму b'.

9. $A' = b' \cap a_1'$; $B' = b' \cap a_2'$.

10. Побудований трикутник $A'B'C'$, описаний навколо еліпса F', є зображенням побудованого трикутника ABC, описаного навколо кола F, і тому є трикутником шуканим (рис. 184).

Задача 10.6. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h прямокутного трикутника, катети якого відносяться як 2:3, описаного навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. Всі прямокутні трикутники з однаковим відношенням катетів є подібними між собою. Отже, можна будувати довільний прямокутний трикутник, катети якого відносяться як 2:3, вписати у цей трикутник коло, прийняти отриману геометричну фігуру за оригінал шуканого зображення, а потім розв'язати дану задачу так само, як було розв'язано задачу 10.2.

Але у даному випадку можна уникнути безпосереднього використання оригіналу.

Дослідимо спочатку питання про те, як прямокутний трикутник з відношенням катетів 2:3 можна описати навколо кола.

Розглянемо довільне коло F. Проведемо у ньому взаємно

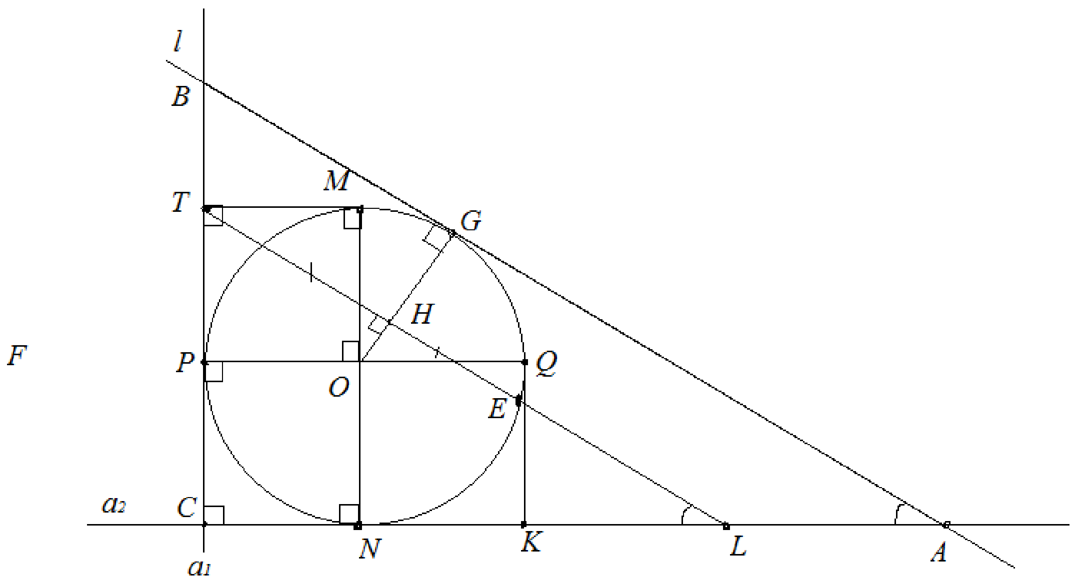


Рис.185

перпендикулярні діаметри MN і PQ (рис. 185). Через точку P паралельно до діаметра MN проведемо пряму a_1. Через точку N паралельно до діаметра

PQ проведемо пряму a_2. Зрозуміло, що $a_1 \perp a_2$. Нехай $C = a_1 \cap a_2$. Проведемо також $MT \perp a_1$, $QK \perp a_2$. Зрозуміло, що чотирикутники $PTMO$, $CPON$, $NOQK$ є рівними між собою квадратами, $TP = PC = CN = NK$, всі ці відрізки дорівнюють радіусу кола F. На промені, доповняльному до променя KC, відкладемо відрізок $KL = NK$. Тоді $TC : CL = 2:3$; $TC \perp CL$. Відрізок TL перетинає коло F за хордою DE. Через середину H даної хорди ($DH = HE$) проведемо радіус OG кола F. Зрозуміло, що $OG \perp DE$. Через точку G паралельно до хорди DE проведемо пряму l. Пряма l буде дотичною до кола F у точці G, тому, що $OG \perp l$. Нехай $B = l \cap a_1$; $C = l \cap a_2$. Трикутник ABC є шуканим. Дійсно, за побудовою – це прямокутний трикутник, описаний навколо кола F. $\angle TLC = \angle BAC$ як відповідні кути при паралельних прямих TL і BA і січній AC. Отже, трикутник ABC є подібним до трикутника LTC. Але катети $\triangle LTC$ відносяться як 2:3. Значить, і у трикутнику ABC катети $BC : CA = 2:3$.

Побудови, аналогічні до проведених для кола F, можна виконати і для еліпса F'. Їх справедливість повністю обумовлена властивостями паралельного проектування, використання оригіналу у явному вигляді для них не є потрібним.

1: Для заданого еліпса F' з центром у точці O' побудуємо пару спряджених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$. Згідно наслідку 5 теореми 8.6, їх можна вважати зображеннями взаємно перпендикулярних діаметрів MN і PQ кола F при певному паралельному проектуванні h.

2: Через точку P' паралельно до діаметра $M'N'$ проведемо пряму a_1'. Через точку N' паралельно до діаметра $P'Q'$ проведемо пряму a_2'. Позначимо $C' = a_1' \cap a_2'$. Згідно властивостей паралельного проектування, $a_1' = f(a_1)$, $a_2' = f(a_2)$, $C' = f(C)$.

3:Проведемо $Q'K' \parallel M'N'$ до перетину з a_2' у точці K'; $M'T' \parallel P'Q'$ до перетину з a_1' у точці T'. $K' = f(K)$, $T' = f(T)$. $N'K' = O'Q' = O'P' = C'N'$, $P'T' = O'M' = O'N' = P'C'$.

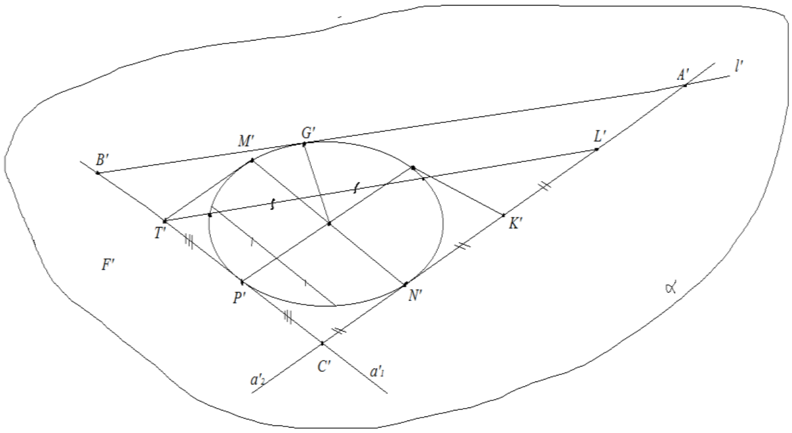


Рис.186

4: На промені, доповняльному до променя, відкладемо відрізок $K'L' = N'K'$. $L' = f(L)$.

5: Розглянемо трикутник $L'T'C'$. Він є зображенням прямокутного трикутника LTC, для якого $TC : CL = 2 : 3$ при паралельному проектуванні h. Сторона $T'L'$ трикутника $L'T'C'$ перетинає еліпс F' за хордою $D'E'$. Через середину H' цієї хорди ($D' = f(D), E' = f(E), H' = f(H)$) проведемо радіус еліпса $O'G'$.

6: Через точку G' паралельно до хорди $D'E'$ проведемо пряму l': $l' = f(l)$, l' є дотичною до еліпса F' у точці G'.

7: $B' = l' \cap a_1', A' = l' \cap a_2', \; B' = f(B), \quad A' = f(A),$ трикутник $A'B'C'$ є шуканим.

Варто відмітити, що вирішальним етапом розв'язання всіх наведених задач на побудову зображення прямокутного трикутника, описаного навколо кола, був етап побудови точки дотику до даного кола гіпотенузи шуканого трикутника.

Задача 10.7. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$ є зображенням певного кола F і вписаного у це коло трикутника ABC при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h описаного навколо кола F прямокутного трикутника, один з кутів якого складає половину кута ABC.*

Розв’язання. За умови даної задачі задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони є зображеннями певного кола F і вписаного у це коло трикутника ABC. Згідно теореми 8.4, за таким зображенням, з точністю до подібності, можна відновити оригінал. На площині оригіналу треба виконати необхідні побудови. (Вони є можливими, тому що кожний кут α довільного трикутника ABC знаходиться у межах $0 < \alpha < 180°$. Але тоді $0 < \frac{\alpha}{2} < 90°$, кут, величина якого дорівнює $\frac{\alpha}{2}$, є гострим кутом певного прямокутного трикутника, тобто, відповідний прямокутний трикутник існує, навколо будь-якого кола можна описати трикутник, подібний до нього). Далі, за допомогою теореми Фалеса, побудови площини оригіналу можна перенести на площину зображень.

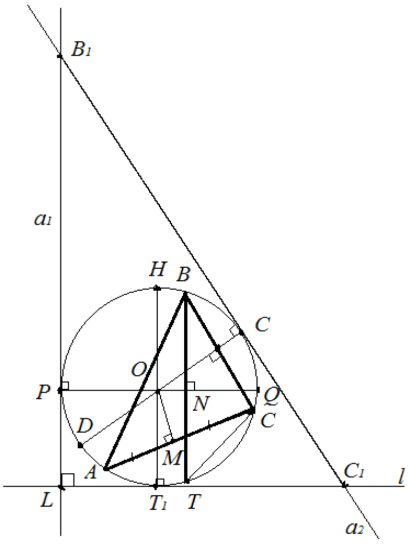


Рис.187

Але поставлену задачу можна розв’язати і без явного використання оригіналу. Для знаходження шляхів такого розв’язання дослідимо, спочатку, спосіб виконання необхідних побудов для оригіналу.

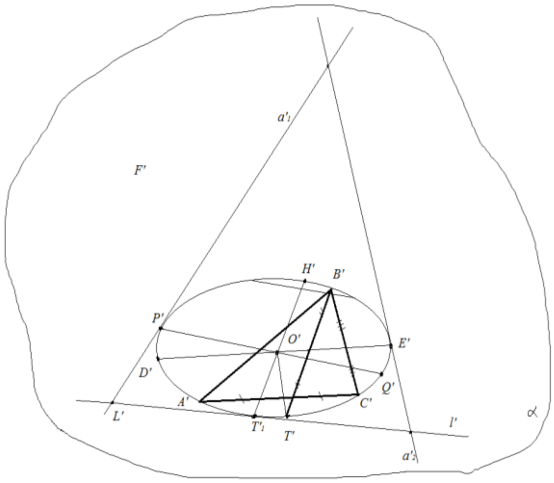


Рис.188

Нехай трикутник ABC вписано у коло F. Через середину M сторони AC проведемо такий радіус BT, що кут ABC, як кут, вписаний у коло F, спирається на дугу A_TC. Тоді промінь BT

є бісектрисою кута ABC, трикутник TBC є вписаним у коло F, $\angle TBC = \frac{1}{2}\angle ABC$.

Через середину N хорди BT проведемо діаметр PQ. Через середину K хорди BC проведемо діаметр DE. (Якщо одна з цих хорд є діаметром кола F, то проведемо діаметр, перпендикулярний до неї). Паралельно до хорди BT проведемо діаметр HT_1 кола F, через точку P паралельно до хорди BT проведемо пряму a_1. Вона буде дотичною до кола F у точці P. Серед точок D і E обрано ту, яка з точкою P лежить по різні сторони відносно прямої HT_1 (Така точка, безумовно, існує, бо діаметр DE перетинає пряму HT_1 у точці O). Нехай, для визначеності, це буде точка E. Паралельно до хорди BC проведемо через точку E пряму a_2. Ця пряма буде дотикатися кола F у точці E. Позначимо через B_1 точку перетину прямих a_1 і a_2 (рис. 188). Така точка, безумовно, буде існувати, бо у точці B перетинаються прямі TB і BC, відповідно, паралельні до прямих a_1 і a_2. При цьому $\angle PB_1E = \angle TBC$ як гострі кути з відповідно паралельними сторонами. Через точку T_1 паралельно до діаметра PQ проведемо пряму l. Вона буде дотичною до кола F у точці T_1. Пряма l перетне пряму a_1 у точці L. Чотирикутник $LPOT_1$ буде квадратом, бо всі його кути є прямими і $OP = OT_1$ як радіуси одного кола. Позначимо через C_1 точку перетину прямих l і a_2. Будуть перетинатися безпосередньо промені LT_1 і B_1E, бо саме ці промені утворюють з січною a_1 внутрішні односторонні кути, сума яких є меншою за $180°$.

Таким чином, утворився описаний навколо кола F прямокутний трикутник B_1LC_1, у якого $\angle LB_1C_1 = \angle TBC = \frac{1}{2}\angle ABC$, тобто, шуканий трикутник.

Властивості паралельного проектування дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса F' і вписаного у нього трикутника $A'B'C'$. Використання оригіналу у явному вигляді для цього не є потрібним.

1. Розглянемо заданий еліпс F' і вписаний у нього трикутник $A'B'C'$. Через середину M' сторони $A'C'$ проведемо такий радіус $O'T'$ еліпса F', що кут $A'B'C'$, як кут, вписаний у еліпс F', спирається на дугу $A'_{T'}C'$.

Вписаний у еліпс F' кут $T'B'C'$ є зображенням вписаного у коло F кута, який складає половину того кута, що зображено кутом $A'B'C'$.

2. Через середину N' хорди $B'T'$ проведемо діаметр $P'Q'$. Через середину K' хорди $B'C'$ проведемо діаметр $D'E'$. Якщо якась з хорд $B'T'$ чи $B'C'$ є діаметром еліпса F', побудуємо відповідний спряджений діаметр. Діаметр $H'T_1'$ проведемо паралельно до хорди $B'T'$. Нехай точки P' і E' лежать по різні сторони відносно прямої $H'T_1'$.

3. Через точку P' паралельно до хорди $B'T'$ проведемо пряму a_1'. Через точку E' паралельно до хорди $B'C'$ проведемо пряму a_2'. Позначимо точку перетину прямих a_1' і a_2' через B_1'.

4. Через точку T_1' паралельно до діаметра $P'Q'$ проведемо пряму l'. Позначимо $L' = a_1' \cap l'$, $C' = a_2' \cap l'$.

Трикутник $L'B_1'C_1'$ є шуканим.

Задача 10.8. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h довільного рівнобедреного трикутника, описаного навколо кола-оригінала.*

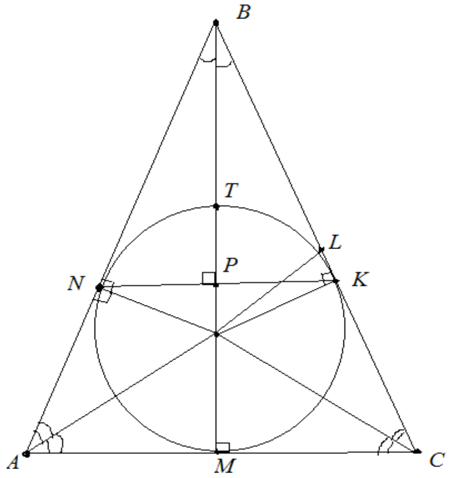


Рис.189

Розв'язання. Розглянемо довільний

рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$). Зрозуміло, що $\angle BAC = \angle BCA$ як кути при основі рівнобедреного трикутника. Знайдемо центр O кола, вписаного у цей трикутник, як точку перетину його бісектрис BM і AL (рис.189). Промінь CO тоді, звичайно, є бісектрисою $\angle BCA$. Бісектрису BM проведемо до основи AC трикутника ABC, тому $BM \perp AC$, $AM = MC$. Проведемо $ON \perp AB$, $OK \perp BC$. Точки M, N і K є точками дотику вписаного кола, відповідно, до сторін AC, AB і BC трикутника ABC. Розглянемо трикутник AON і трикутник COK. Вони є прямокутними трикутниками, $ON = OK$ як радіуси одного кола, $\angle NAO =$ $= \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BCA = \angle KCO$. Звідси випливає, що $\triangle NAO = \triangle KCO$ за катетами і протилежним гострим кутом. Але тоді $AN = CK$ як відповідні катети рівних прямокутних трикутників, і $BN = AB - AN = BC - CK = BK$, трикутник NBK є рівнобедреним. Промінь BM є бісектрисою $\angle ABC$, отже він перетинає відрізок NK у певній точці P, відрізок BP – бісектриса, проведена до основи NK рівнобедреного трикутника NBK. Тому $BP \perp NK$, $NK \parallel AC$. Відрізок NP є висотою прямокутного трикутника ONB, проведеною до його гіпотенузи BO. Основа P такої висоти завжди належить гіпотенузі. З іншого боку точка P лежить в середині вписаного у $\triangle ABC$ кола як точка хорди NK. Гіпотенуза BO трикутника ONB містить радіус OT вписаного кола, доповняльний до радіуса OM. Можна обґрунтувати, що, залежно від форми рівнобедреного трикутника ABC, точка P може бути довільною внутрішньою точкою радіуса OT.

Цей факт ми обґрунтуємо одночасно з міркуваннями про те, як навколо кола можна описати довільний рівнобедрений трикутник.

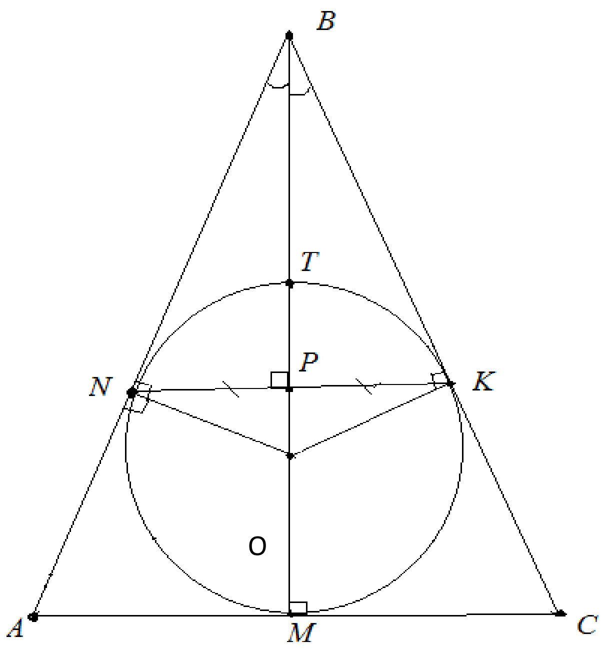


Рис.190

Розглянемо довільне коло F з центром у точці O (рис. 190). Проведемо у ньому довільний діаметр TM. Через точку M перпендикулярно до радіуса OM проведемо пряму l. Ця пряма буде дотичною до кола F у точці M. Оберемо довільну внутрішню точку P радіуса OT. Проведемо через цю точку перпендикулярно до радіуса OT хорду NK. Через точку K перпендикулярно до радіуса OK проведемо пряму a_1. Ця пряма, зрозуміло, буде дотикатися кола F у точці K. Трикутник NOK буде рівнобедреним трикутником з основою NK ($ON = OK$ як радіуси одного кола). Отже, відрізок OP буде одночасно висотою, медіаною і бісектрисою, проведеною до його основи. Але тоді $\angle POK = \frac{1}{2}\angle NOK$, $0 < \angle POK < 90°$. Пряма OK є січною до прямих MN і a_1. По той бік відносно прямої точку OK, що містить точку T, прямі TM і a_1 утворюють з прямою OK внутрішні односторонні кути BOK *і* OKB. Перший з них є гострим, другий – прямим. Отже, у сумі ці кути складають менше, ніж $180°$. За відомою теоремою звідси випливає, що прямі TM і a_1 перетинаються у певній точці B, яка є точкою перетину тих променів цих прямих, які знаходяться по той самий бік відносно прямої OK, що й точка T. У певній точці C пряма a_1 перетне пряму l ($l \parallel NK$, бо це дві прямі, перпендикулярні до однієї і тієї ж прямої, а, якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й іншу). Через точки B і N проведемо пряму a_2. Вона перетне пряму l у певній точці A, утвориться трикутник ABC (точки A, B і C не лежать на одній прямій).

Розглянемо трикутник NBK. Відрізок BP для цього трикутника є, одночасно, і медіаною, і висотою. Звідси випливає, що $\triangle NBK$ є рівнобедреним трикутником з основою NK, $BN = BK$, $\angle NBP = \angle PBK$.

Розглянемо $\triangle ONB$ і $\triangle OKB$. $OK = ON$ як радіуси одного кола, $BN = BK$ – за доведеним, відрізок BO є спільною стороною цих трикутників. Звідси випливає, що $\triangle ONB = \triangle OKB$ за третьою ознакою рівності трикутників, за трьома сторонами. Але тоді $\angle ONB = \angle OKB = 90°$, бо ці кути лежать у рівних трикутників проти спільної сторони, і пряма a_2 є дотичною до кола F у точці N, трикутник ABC є описаним навколо кола F.

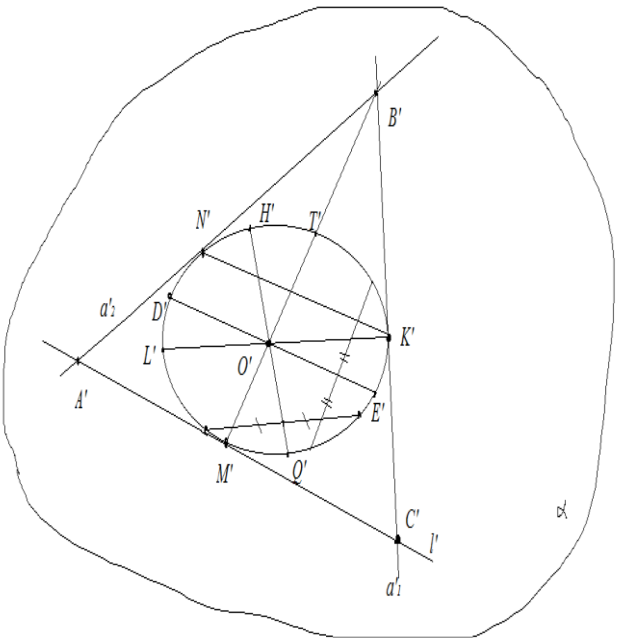


Рис.191

У трикутнику ABC відрізок BM одночасно є висотою і бісектрисою, проведеними до сторони AC. Це означає, що трикутник ABC є рівнобедреним ($AB = BC$), тобто, шуканим.

Побудови, аналогічні до проведених для кола F, можна виконати і для еліпса F'. Їх справедливість обумовлена властивостями паралельного проектування. Побудова оригіналу і його безпосереднє використання при цьому не є потрібним.

1: У заданому еліпсі F' з центром у точці O' побудуємо довільний діаметр $M'T'$ та спряджений до нього діаметр $D'E'$ (рис. 191).

2: Через точку M' паралельно до діаметра $D'E'$ проведемо пряму l'.

3: На відрізку $O'T'$ оберемо довільну точку P'.

4: Через точку P' паралельно до діаметра $D'E'$ проведемо хорду $N'K'$ еліпса F'.

5: Проведемо діаметр $K'L'$ еліпса F'. Побудуємо спряджений до нього діаметр $H'Q'$.

6: Через точку K' паралельно до діаметра $H'Q'$ проведемо пряму a_1'.

7: Позначимо через B' точку перетину прямої a_1' з прямою l'.

8: Через точки B' і N' проведемо пряму a_2'. Позначимо через A' точку перетину прямої a_2' з прямою l'.

9: Трикутник $A'B'C'$ є шуканим зображенням.

Як видно із побудов, виконаних на рис.188, запропонований спосіб розв'язання задачі 10.8 технічно є не дуже простим завдяки необхідності знаходження у еліпсі F' двох пар спряджених діаметрів. Можна обмежитися однією парою спряджених діаметрів, якщо обґрунтувати інший шлях побудови рівнобедреного трикутника, описаного навколо кола F.

У колі F з центром у точці O проведемо пару взаємно перпендикулярних діаметрів MN і PQ (рис. 192). Паралельно до діаметра PQ через точку N проведемо пряму a. $a \perp MN$, пряма a буде дотичною до кола F у точці N. Оберемо довільну точку T на дузі $M_P N$ кола F і проведемо хорду MT. Через середину K цієї хорди проведемо радіус OH. Пряма b_1, що проходить через точку H паралельно до хорди MT,

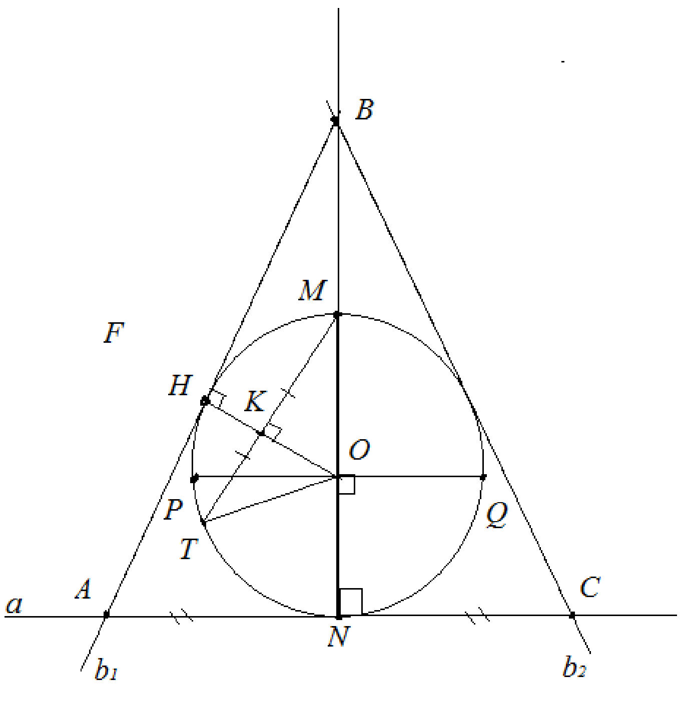


Рис.192

буде дотичною до кола F у точці H. Кут $\angle BOH$ є гострим як половина кута $\angle BOT$ при вершині рівнобедреного трикутника BOT. Звідси випливає, що $\angle BOH$ є меншим за прямий кут $\angle BOP$, точка H належить тій дузі MP кола F, яка містить 90° і є частиною дуги M_PN. Спираючись на цей факт легко обґрунтувати, що для побудови точки H дотику прямої b_1 до кола F обрання довільної точки T на дузі M_PN є рівносильним обранню довільної точки P на радіусі OT (рис. 167) при попередньому варіанті розв'язання даної задачі.

Позначимо $A = a \cap b_1$, $B = b_1 \cap MN$. На промені, доповняльному до променя NA, відкладемо відрізок $NC = NA$. Трикутник ABC буде шуканим рівнобедреним трикутником.

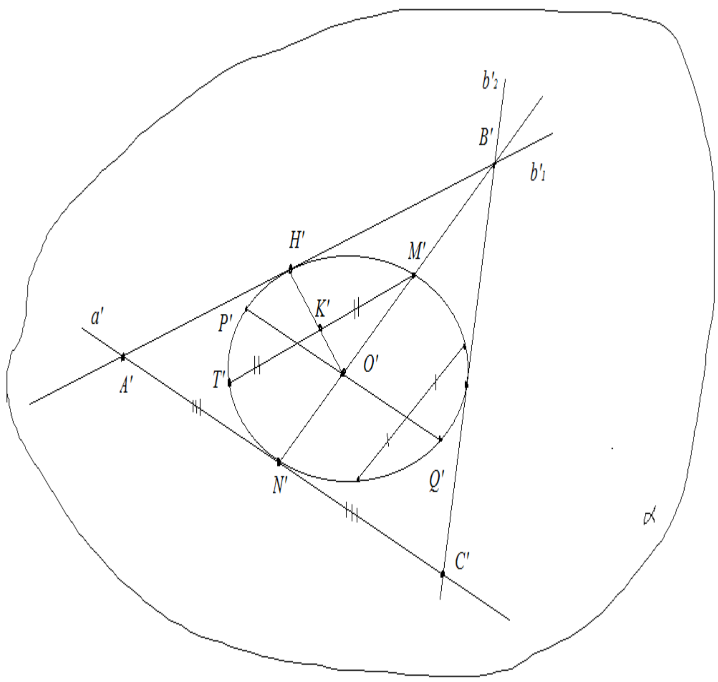


Рис.193

Дійсно, він буде саме рівнобедреним трикутником з основою AC, тому що, за побудовою, відрізок BN одночасно є його медіаною і висотою. Сторона AC дотикається кола F у точці N ($AC \perp ON$), сторона AB дотикається кола F у точці H ($AB \perp OH$) також за побудовою. Півколо M_QN є симетричним до півкола M_PN відносно діаметра MN. Точка C є симетричною точці A відносно прямої MN також за побудовою. Звідси випливає, що відрізок BC є симетричним до відрізка BA відносно прямої MN. А це означає, що він дотикається дуги M_QN у певній точці кола F, бо симетрія відносно прямої є рухом площини, взаємно однозначним відображенням площини на себе. Отже, трикутник ABC є описаним навколо кола F.

Побудови, аналогічні до вищевказаних, легко виконати і для еліпса F'. Завдяки вже відомим властивостям зображень фігур при паралельному проектуванні, таким чином ми отримуємо ще один варіант розв'язання задачі 10.8, який не вимагає безпосереднього використання оригіналу.

1: Для еліпса F' будуємо довільну пару спряджених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$.

2: На дузі $M'_{P'}N'$ еліпса F' оберемо довільну точку H'. Через середину K' хорди $M'T'$ проведемо радіус $O'H'$.

3: Через точку H' еліпса F', паралельно до хорди $M'N'$ проведемо пряму b_1'. Вона буде дотичною до еліпса F' у точці H'.

4: Паралельно до діаметра $P'Q'$ через точку N' проведемо пряму a'. Вона буде дотичною до еліпса F' у точці N'.

5: Позначимо $A' = a' \cap b_1'$, $B' = b_1' \cap M'N'$.

6: На промені, доповняльному до променя $N'A'$, відкладемо відрізок $N'C' = N'A'$.

7: Через точки B' і C' проведемо пряму b'. Вона буде дотичною до еліпса F' у певній точці його дуги $M'_{Q'}N'$. Трикутник $A'B'C'$ буде шуканим.

Задача 10.9. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h рівнобедреного трикутника, подібного до довільного даного, описаного навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. За умови заданої задачі задано еліпс F' з центром у точці O' і рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$). Оскільки форма рівнобедреного трикутника ABC є цілком довільною, безпосереднього використання оригіналу уникнути неможливо.

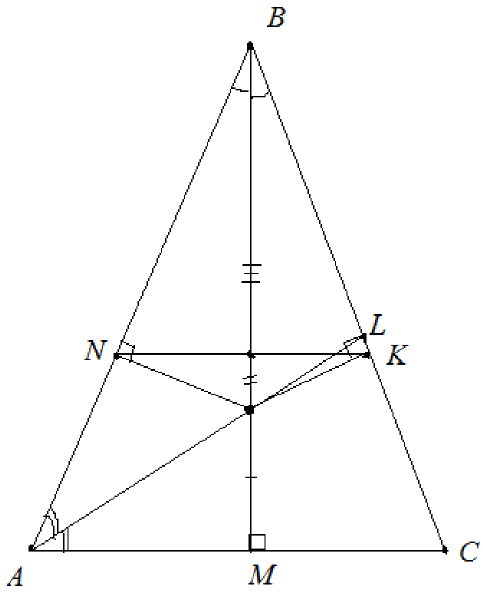


Рис.194

Знайдемо центр O кола, вписаного у трикутник, як точку перетину його бісектрис BM і AL. Проведемо $OK \perp BC$, $KN \parallel AC$ до перетину зі стороною AB у точці N. Відрізки $OM = OK = ON$ є радіусами кола вписаного у $\triangle ABC$, яке можна прийняти за оригінал F для еліпса F'. Позначимо через P точку перетину відрізків NK і OB (рис. 194). Далі задачу можна розв'язувати так само, як попередню. Тільки тепер точку P' на радіусі $O'T'$ не моона повинна бути зображенням саме точки P відрізка OB при паралельному проектуванні h, при якому вписане у $\triangle ABC$ коло F зображується еліпсом F'. Отже, для побудови точки P треба використати оригінал і застосувати теорему Фалеса.

1: Для заданого еліпса F' з центром у точці O' побудуємо довільний діаметр $M'T'$. За наслідком …з теореми 8.3, існує паралельне проектування f, при якому еліпс F' з центром у точці O' є зображенням вписаного у $\triangle ABC$ (рис. 167) кола F з центром у точці O, а точка M' – зображенням точки M.

2: За допомогою теореми Фалеса побудуємо точки $P' = f(P)$ і $B' = f(B)$: на картинній площині α розглянемо промінь $M'Q$, що не лежить на прямій $M'T'$, послідовно відкладемо на ньому відрізки $M'O_1 = MO$, $O_1P_1 = OP$, $P_1B_1 = PB$, проведемо $P_1P' \parallel O_1O'$ до перетину з радіусом $O'T'$ у шуканій точці P' (рис. 188); $B_1B' \parallel O_1O'$ до перетину з прямою $M'T'$ у шуканій точці B' (рис. 192).

3: Побудуємо діаметр $D'E'$ еліпса F', спряджений до діаметра $M'T'$.

4: Паралельно до діаметра $D'E'$ через точку M' проведемо пряму l',

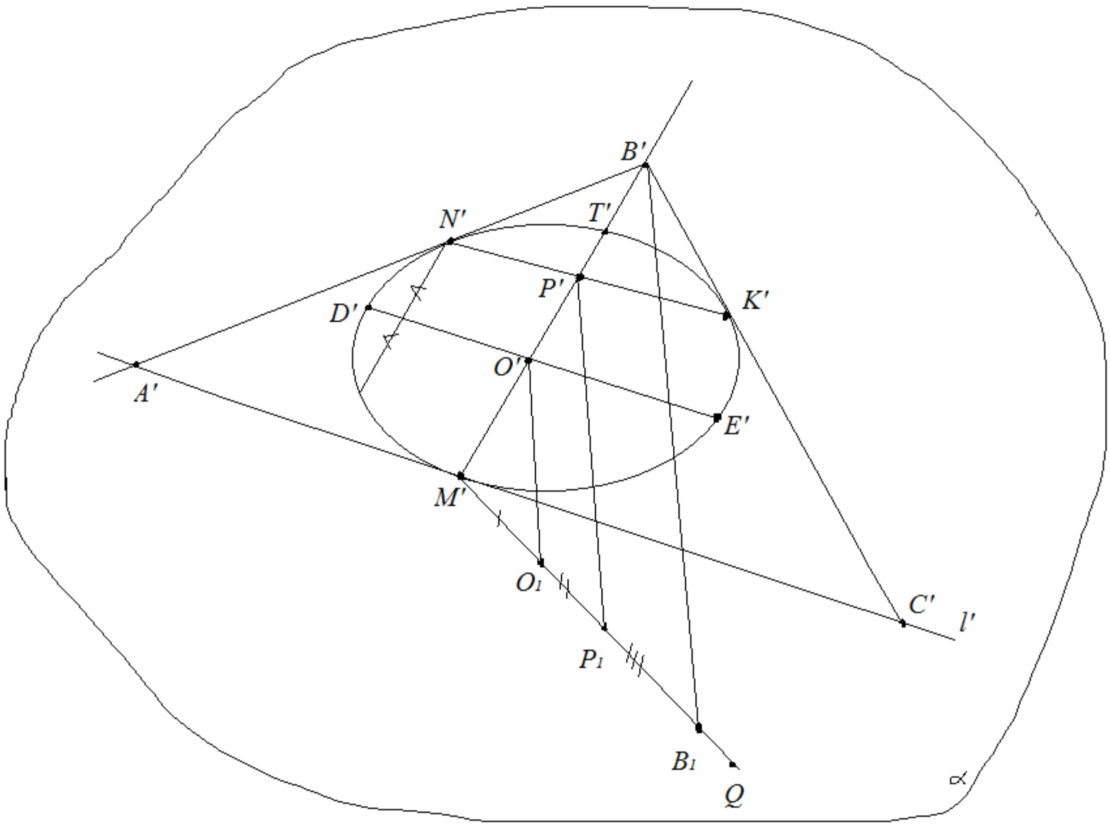


Рис.195

через точку P' – хорду $N'K'$ еліпса F'.

5: Проведемо пряму B' до перетину з прямою l' у точці A', пряму $B'K'$ до перетину з прямою l' у точці C'. Трикутник $A'B'C'$ є шуканим.

Зауважимо, що запропонований спосіб розв’язання хоча і передбачає безпосереднє використання оригіналу, але не вимагає побудови кола F, вписаного у трикутник-оригінал.

Задача 10.10. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h правильного трикутника, описаного навколо кола-оригінала.*

Розв’язання. Зрозуміло, що можна зобразити правильний трикутник і розв’язати задачу 10.10 тим же способом, що й попередню.

Але у даному випадку існує спосіб розв’язання, який не вимагає безпосереднього використання оригіналу.

Розглянемо спочатку питання про те, як правильний трикутник можна описати навколо кола. Проведемо у колі F з центром у точці O довільний діаметр TM. Нехай точка P ділить радіус OT навпіл. Через точку P перпендикулярно до TM проведемо хорду NK (рис. 193). Чотирикутник $NTKO$ буде ромбом, бо його діагоналі є взаємно перпендикулярними і кожна з них точкою перетину ділиться навпіл. $ON = NT = TK = KO = r$, де r – радіус кола F. Але тоді $\triangle ONT$ і $\triangle OKT$ є рівносторонніми, всі їх кути складають по $60°$.

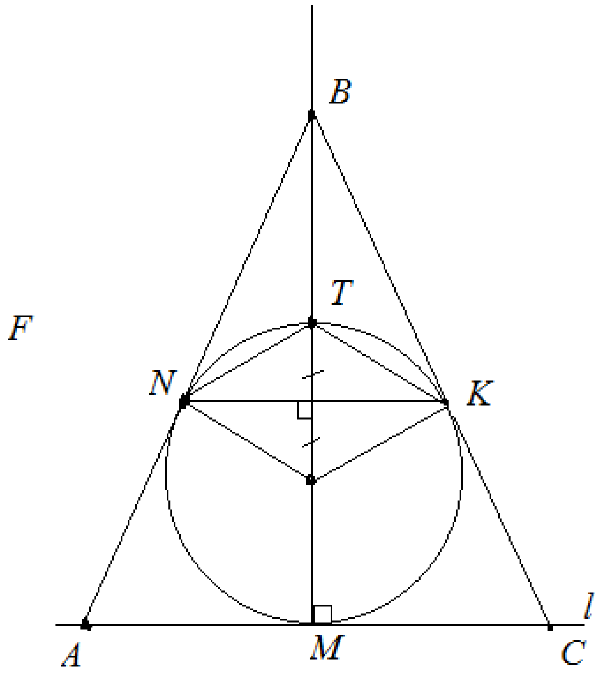


Рис.196

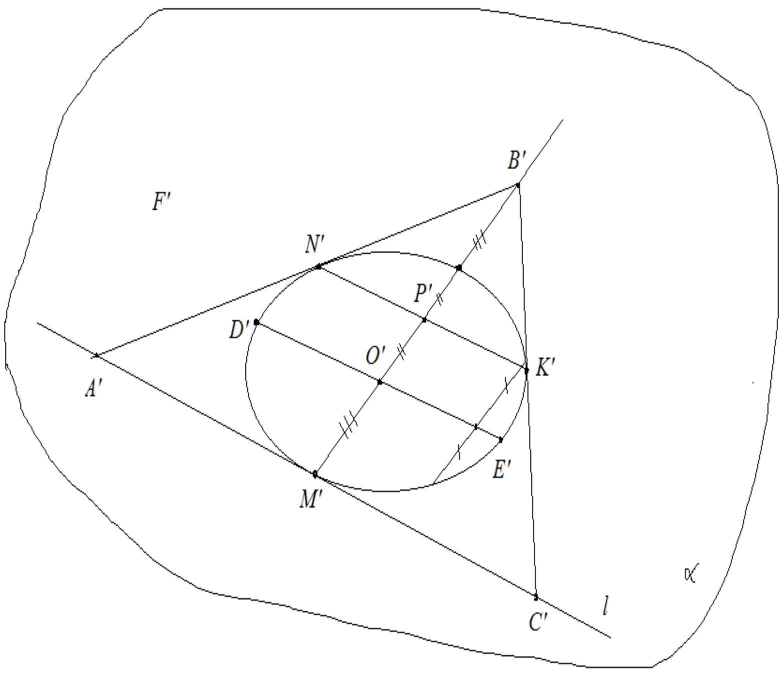


Рис.197

Через точку M перпендикулярно до діаметра TM проведемо пряму l. Ця пряма буде дотичною до кола F у точці M. Від точки T на промені, доповняльному до променя TO, відкладемо відрізок $TB = r$. Проведемо прямі BN і BK. Позначимо через A точку перетину прямої BN

з прямою l, через C точку перетину прямої BK з прямою l. Трикутник ABC буде правильним трикутником, описаним навколо кола F.

Дійсно, згідно проведених побудов $\triangle BTN$ є рівнобедреним: $BT = TN = r$. $\angle NTO = 60^\circ$ і є зовнішнім кутом при вершині T трикутника BTN. Отже, $\angle BTN = \angle NBT = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$. Аналогічні міркування призводять до висновку, що $\angle TBK = \angle TKB = 30^\circ$. Але тоді $\angle NBK = \angle NBT + \angle TBK = 60^\circ$ $\angle ONB = \angle ONT + \angle TNB = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, $BN \perp ON$. Так само $\angle OKB = \angle OKT$ $+ \angle TKB = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, $BK \perp OK$. Отже, прямі BN і BK є дотичними до кола F відповідно у точках N і K, трикутник ABC є описаним навколо кола F. У трикутнику NBK відрізок BP одночасно є медіаною і висотою. Звідси випливає, що $\triangle NBK$ є рівнобедреним і, завдяки тому, що $\angle NBK = 60^\circ$, рівностороннім $NK \parallel AC$ тому, що обидві ці прямі є перпендикулярними до прямої TM. Звідси випливає, що $\triangle ABC$ є подібним до $\triangle NBK$ і, завдяки цьому, трикутником рівностороннім.

Властивості паралельного проектування дозволяють при наявності еліпса F' наступним чином виконати побудову – зображення трикутника ABC без явного використання оригіналу.

1: У заданому еліпсі F' з центром у точці O' побудуємо довільний діаметр $M'T'$ і спряджений до нього діаметр $D'E'$.

2: Через середину P' радіуса $O'T'$ паралельно до діаметра $D'E'$ проведемо хорду $N'K'$ еліпса F'.

3: Через точку M' паралельно до діаметра $D'E'$ проведемо пряму l'.

4: На промені, доповняльному до променя $T'O'$, відкладемо відрізок $T'B' = O'T'$.

5: Проведемо прямі $B'N'$ і $B'K'$, позначимо точки їх перетину з прямою l', відповідно, через A' і C'.

6: Трикутник $A'B'C'$ є шуканим зображенням трикутника ABC (рис. 174).

Задача 10.11. *Відомо, що задані еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$ є зображеннями деякого кола F з центром у точці O і вписаного у це коло трикутника ABC ($A' = f(A)$, $B' = f(B), C' = f(C)$) при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h рівнобедреного трикутника, описаного навколо кола-оригінала, кут при вершині якого дорівнює куту ABC.*

Розв'язання. За умови даної задачі задано еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$, про які відомо, що вони є зображеннями деякого кола F з центром у точці O і вписаного у це коло трикутника ABC. Згідно теореми 8.1, за таким зображенням, з точністю до подібності, можна відновити оригінал. На площині оригіналу можна виконати необхідні побудови, а потім, за допомогою теореми Фалеса, перенести їх на площину зображень.

Але поставлену задачу можна розв'язати і без явного використання

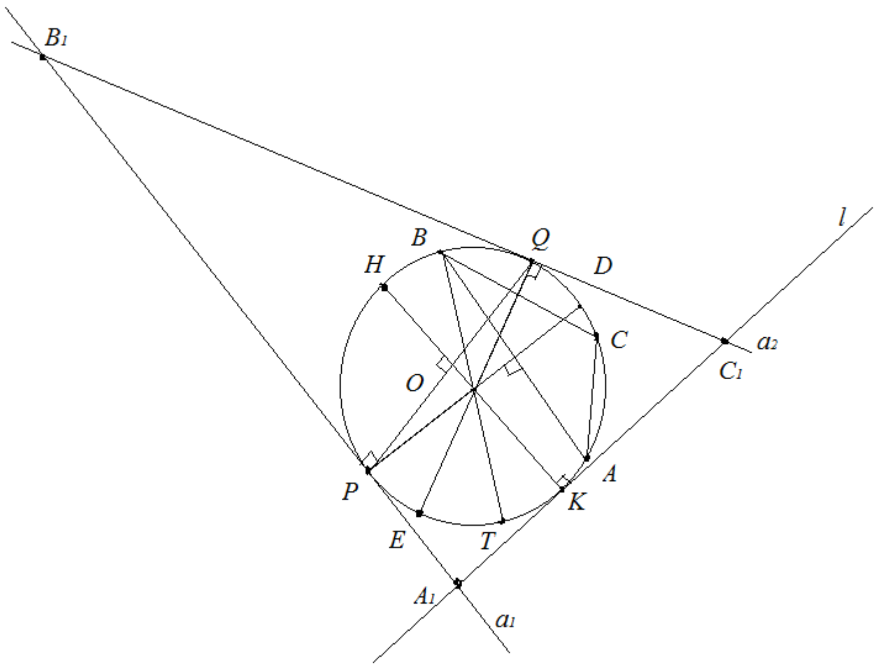


Рис.198

оригіналу. Для знаходження шляхів такого розв'язання дослідимо, спочатку, спосіб виконання необхідних побудов для оригіналу.

Нехай трикутник ABC вписано у коло F (рис. 175). Через середину M сторони AB проведемо діаметр PD. Через середину N сторони BC проведемо діаметр QE (Якщо одна із сторін трикутника є діаметром кола F, то проведемо перпендикулярний до неї діаметр). Через точку P паралельно до сторони AB проведемо пряму a_1. Вона буде дотичною до кола F у точці P. Серед точок E і Q оберемо ту, яка лежить по іншу сторону відносно прямої BT, ніж точка P. Нехай, для визначеності, це буде точка Q. Через точку Q паралельно до сторони BC проведемо пряму a_2. Вона буде дотичною до кола F у точці Q. Перпендикулярно до хорди PQ проведемо діаметр HK. Через точку K паралельно до хорди PQ проведемо пряму l. Вона буде дотичною до кола F у точці K. Нехай $B_1 = a_1 \cap a_2$, $A_1 = a_1 \cap l$, $C_1 = a_2 \cap l$. Трикутник $A_1B_1C_1$ буде шуканим.

Дійсно, згідно проведених побудов, $a_1 \parallel AB,\ a_2 \parallel BC,$ прямі AB і BC перетинаються у точці B, отже, прямі a_1 і a_2 також перетинаються, точка B_1 існує. $\angle PB_1Q = \angle ABC$ як кути з відповідно паралельними і спів напрямленими сторонами. Прямі a_1 і a_2 є дотичними, проведеними з точки B_1 до кола F, точки P і Q є точками дотику, $B_1P = B_1Q$, $\triangle PB_1Q$ є рівнобедреним. За побудовою, $l \parallel PQ$. Отже, точки A_1 і C_1 перетину прямої l з прямими a_1 і a_2 існують, існує $\triangle A_1B_1C_1$, описаний навколо кола F.

З того, що $A_1C_1 \parallel PQ$ випливає, що $\triangle A_1B_1C_1$ є подібним до $\triangle PB_1Q$ і тому є трикутником рівнобедреним: $A_1B_1 = B_1C_1$, $\angle A_1B_1C_1 = \angle PB_1Q = \angle ABC$.

Властивості паралельного проектування дозволяють виконати відповідні побудови для еліпса F' і трикутника $A'B'C'$. Використання оригіналу у явному вигляді для цього є непотрібним.

1: Розглянемо заданий еліпс F' і вписаний у нього трикутник $A'B'C'$. Через середину M' хорди $A'B'$ проведемо діаметр $P'D'$. Через середину N' хорди $B'C'$ проведемо діаметр $E'Q'$. Якщо одна з хорд ($A'B'$ чи $B'C'$) є діаметром еліпса F', то проведемо спряджений до нього діаметр.

2: Проведемо діаметр $B'T'$ еліпса F'. Через точку P' паралельно до хорди $A'B'$ проведемо пряму a_1'. Ця пряма буде дотичною до еліпса F' у точці P'. Із точок E' і Q' оберемо ту, яка з точкою P' лежить по різні сторони відносно $H'K'$ (така точка існує обов'язково, тому що діаметр $E'Q'$ перетинає пряму $H'K'$ у точці O'). Нехай, для визначеності, це буде точка Q' (рис. 176). Через точку Q' паралельно до хорди $B'C'$ проведемо пряму a_2'. Ця пряма буде дотичною до еліпса F' у точці Q'.

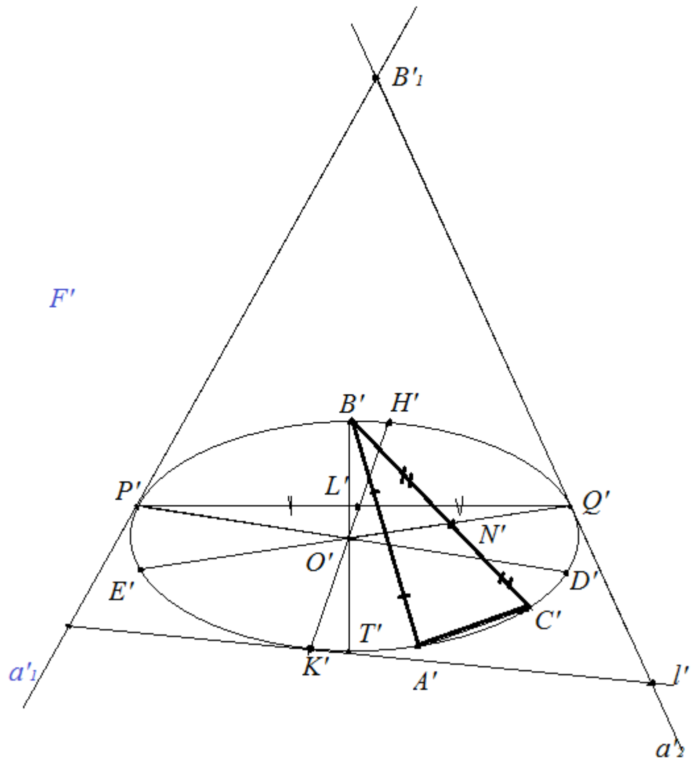


Рис.199

Позначимо через B_1' точку перетину прямих a_1' і a_2'. Така точка буде існувати, тому що у точці B' перетинаються прямі $A'B'$ і $C'B'$, відповідно, паралельні до прямих a_1' і a_2'.

3: Проведемо хорду $P'Q'$. Через її середину L' проведемо діаметр $H'K'$. Через точку K' паралельно до хорди $P'Q'$ проведемо пряму l'. Ця пряма буде дотичною до еліпса F' у точці K'.

4: Позначимо $A_1' = a_1' \cap l'$, $A_2' = a_2' \cap l'$. Трикутник $A_1'B_1'C_1'$ буде шуканим.

Задача 10.12. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h довільного трикутника, описаного навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. Дослідимо спочатку питання про те, як можна довільний трикутник описати навколо кола. Задача ускладнюється тим, що для кожного трикутника існують чотири кола, які дотикаються до прямих, що містять сторони даного трикутника, одне з них є колом, вписаним у трикутник, а три інші – зовнівписаними колами для даного трикутника. Якщо коло F з центром у точці O є вписаним у $\triangle ABC$, то воно

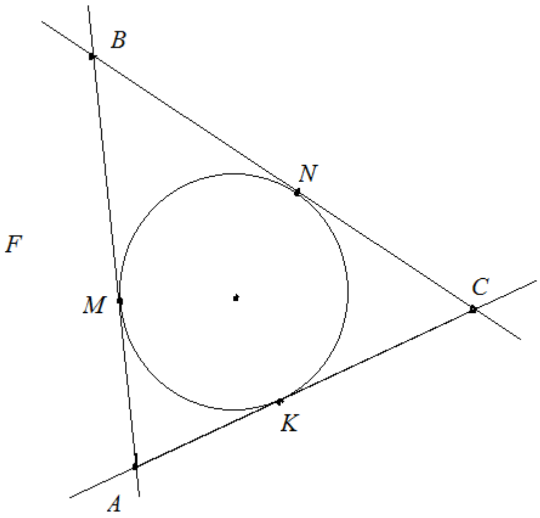


Рис.200

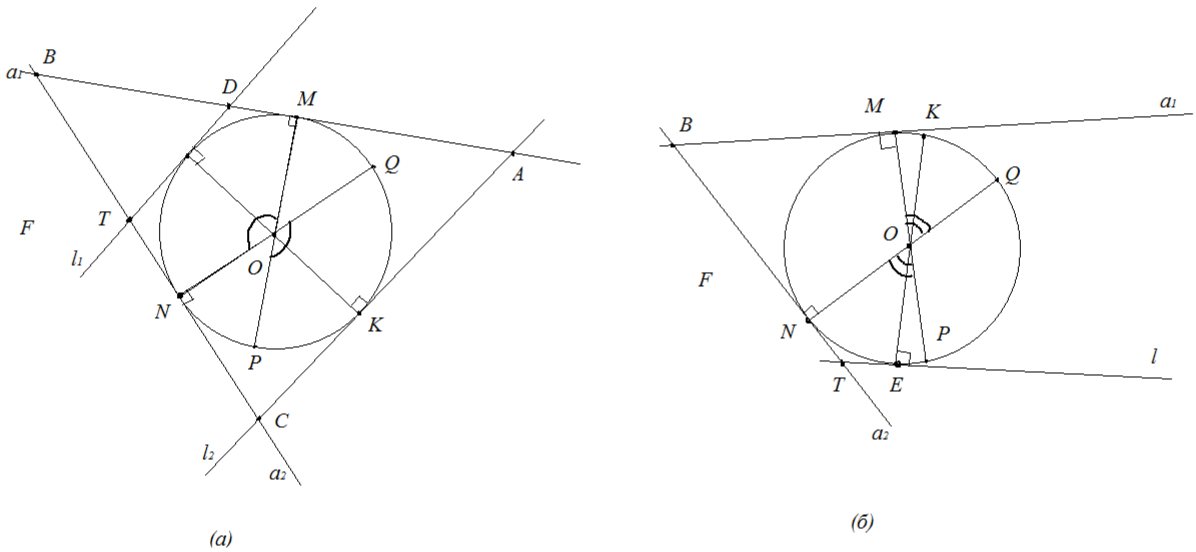


Рис.201

дотикається всіх сторін даного трикутника (рис. 177), центр O кола і вершина C розташовані по одну сторону відносно прямої AB, центр O кола і вершина B розташовані по одну сторону відносно прямої AC, центр O кола і вершина A розташовані по одну сторону відносно прямої BC.

Розглянемо довільне коло F з центром у точці O. Проведемо довільний діаметр MP, через точку M перпендикулярно до прямої MP проведемо пряму a_1. Будемо шукати описаний навколо кола F трикутник так, щоб одна з його сторін дотикалася кола F у точці M. Зрозуміло, що інша сторона шуканого трикутника не може дотикатися кола F у точці P. Оберемо на колі F довільну точку $N \notin MP$. Проведемо діаметр NQ. Через точку N перпендикулярно до діаметра NQ проведемо пряму a_2 (рис. 178а). $a_2 \nparallel a_1$, нехай $B = a_1 \cap a_2$. Зрозуміло, що $B \notin MP$ і $B \notin NQ$. Прямі MP і NQ ділять площину оригіналу на чотири області, нехай, для визначеності, це будуть внутрішні області наступних кутів: $\angle NOM$, $\angle MOQ$, $\angle QOP$, $\angle PON$ (рис.178а). $\angle NOM = \angle QOP$, $\angle MOQ = \angle PON$ як вертикальні.

Задача 10.12.1 *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h довільного трикутника, описаного навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. Дослідимо спочатку питання про те, як можна довільний трикутник описати навколо кола. Задача ускладнюється тим, що для кожного трикутника існують чотири кола, які дотикаються до прямих, що містять сторони даного трикутника, одне з них є колом, вписаним у трикутник, а три інші – зовнівписаними колами для даного трикутника. Якщо коло F з центром у точці O є вписаним у $\triangle ABC$, то воно дотикається всіх сторін даного трикутника (рис. 197), центр O кола і вершина C розташовані по одну сторону відносно прямої AB, центр O кола і вершина B розташовані по одну сторону відносно прямої AC, центр O кола і вершина A розташовані по одну сторону відносно прямої BC.

Розглянемо довільне коло F з центром у точці O. Проведемо довільний діаметр MP, через точку M перпендикулярно до прямої MP проведемо пряму a_1. Будемо шукати описаний навколо кола F трикутник так, щоб одна з його сторін дотикалася кола F у точці M. Зрозуміло, що інша сторона шуканого трикутника не може дотикатися кола F у точці P. Оберемо на колі F довільну точку $N \notin MP$. Проведемо діаметр NQ. Через точку N перпендикулярно до діаметра NQ проведемо пряму a_2 (рис. 198a). $a_2 \nparallel a_1$, нехай $B = a_1 \cap a_2$. Зрозуміло, що $B \notin MP$ *і* $B \notin NQ$. Прямі MP і NQ ділять площину оригіналу на чотири області, нехай, для визначеності, це будуть внутрішні області наступних кутів: $\angle NOM$, $\angle MOQ$, $\angle QOP$, $\angle PON$

Нехай точка B належить внутрішній області кута NOM. На дузі кола F, яка лежить всередині кута NOM, оберемо довільну точку E. Проведемо діаметр EK. Точка K кола F буде внутрішньою точкою кута QOP. Через точку E проведемо дотичну пряму l_1 до кола F ($l_1 \perp OE$). Нехай $D = l_1 \cap a_1$, $T = l_1 \cap a_2$. У евклідовій геометрії доведено, що $BD < BM$, $BT < BN$. А це означає, що коло F є зовнівписаним колом для трикутника TBD. Через точку K проведемо дотичну l_2 до кола F ($l_2 \perp OK$). Позначимо $A = l_2 \cap a_1$, $C = l_2 \cap a_2$. У даному випадку $BA > BM, BC > BN$, коло F буде вписаним у трикутник ABC (рис. 198*a*).

Тепер на дузі кола F, яка лежить всередині кута PON, оберемо довільну точку E_2 (рис. 198*b*). Проведемо діаметр E_2K. Точка K кола F у даному випадку буде внутрішньою точкою кута MOQ. Через точку E_2 проведемо дотичну пряму , до кола F ($l \perp OE_2$). Пряма l перетинає промінь BN у такій точці T, що $BT > BN$ (рис. 178*b*).

У тій півплощині відносно прямої a_2, що містить коло F, знаходяться промінь BM прямої a_2 і промінь TE_2 прямої l. Чотирикутник $NBMO$ є вписаним, отже, $\angle MBN = 180° - \angle MON$. Чотирикутник E_2TNO також є вписаним, отже, $\angle NTE_2 = 180° - \angle NOE_2$. Але тоді $\angle MBN + \angle NTE_2 = 360° - -(\angle MON + \angle NOE_2)$. Але промінь OE_2 є внутрішнім променем кута PON,

$\angle NOE_2 < \angle PON$, $(\angle MON + \angle NOE_2) < (\angle MON + \angle PON) = 180°$, $360° -$ $-(\angle MON + \angle NOE_2) > 180°$. Це означає, що промені BM і TE_2, відповідно, прямих a_1 і l не перетинаються, трикутник, описаний навколо кола F, не утворюються.

Аналогічні міркування справедливими і у випадку обрання довільної точки тієї дуги кола F, яка знаходиться у внутрішній області кута MOQ.

Звідси випливає спосіб побудови трикутника, описаного навколо кола.

Властивості паралельного проектування дозволяють виконати аналогічні побудови для знаходження необхідного зображення такого трикутника.

1: На картинній площині α розглянемо заданий еліпс F' з центром у

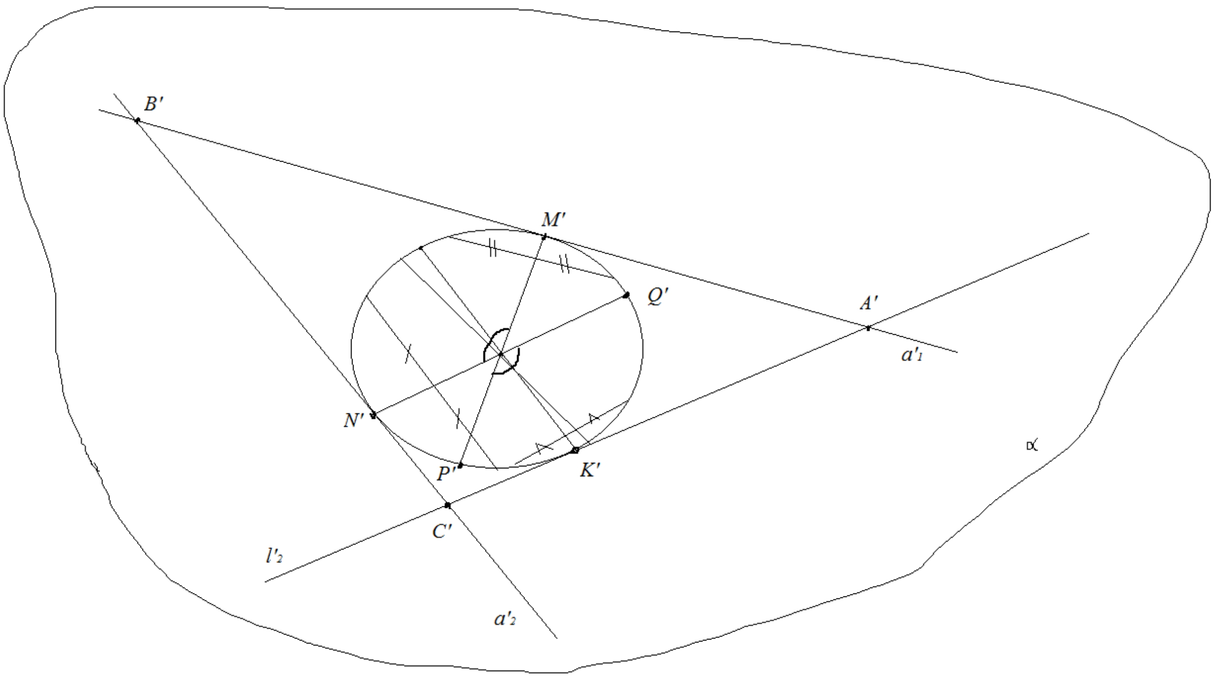


Рис.202

точці O'. Побудуємо для нього довільні діаметри $M'P'$ і $N'Q'$. Із використанням допоміжних хорд через точку M' проведемо дотичну до еліпса F' пряму a_1', через точку N' проведемо дотичну до еліпса F' пряму a_2'. Позначимо $B' = a_1' \cap a_2'$.

2: Нехай точка B' лежить в середині кута $N'O'M'$. Розглянемо кут $P'O'Q'$, вертикальний до кута $N'O'M'$. На дузі еліпса F', що знаходиться всередині кута $P'O'Q'$, оберемо довільну точку K'. Проведемо через точку K' дотичну до еліпса F' пряму l_2'. $A' = l_2' \cap a'$, $C' = l_2' \cap a_2'$, трикутник $A'B'C'$ є шуканим.

Зрозуміло, що трикутник $A'B'C'$ на рис. 197 є зображенням якогось трикутника, описаного навколо кола F (за потреби, форму цього трикутника можна відновити однозначно), у загальному випадку не того трикутника ABC, який побудовано на рис. 198*а*.

З технічної точки зору запропонований спосіб розв'язання задачі 10.12.1 є не дуже простим. Оскільки при невиродженому паралельному проектуванні довільний трикутник і лише трикутник може бути зображенням трикутника, розв'язання задачі 10.12.1 полягає у тому, щоб описати довільний трикутник навколо еліпса F'. Для цього зручніше за все вписати у

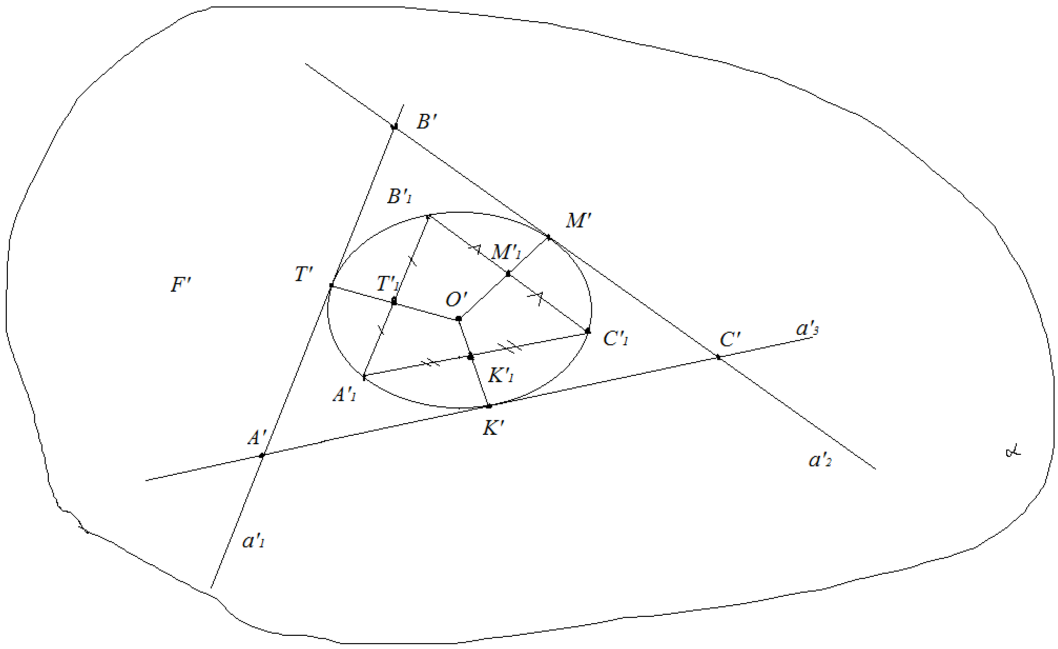


Рис.203

еліпс F' довільний трикутник, а вже потім – описати навколо F' трикутник, подібний до вписаного (рис. 180).

1: Розглянемо заданий еліпс F' з центром у точці O'. Оберемо на ньому довільні точки A_1', B_1', C_1'. Утвориться вписаний у еліпс F' трикутник $A_1'B_1'C_1'$.

2: Через відповідні середини T_1', M_1', K_1' хорд $A_1'B_1'$, $B_1'C_1'$, $A_1'C_1'$ проведемо радіуси $O'T'$, $O'M'$, $O'K'$.

3: Через точку T_1' паралельно до хорди $A_1'B_1'$ проведемо пряму a_1'. Через точку M_1' паралельно до хорди $B_1'C_1'$ проведемо пряму a_2'. Через точку K_1' паралельно до хорди $A_1'C_1'$ проведемо пряму a_3'.

4: Позначимо $A' = a_1' \cap a_3'$, $B' = a_1' \cap a_2'$, $C' = a_2' \cap a_3'$. Трикутник $A'B'C'$ є шуканим трикутником, описаним навколо еліпса F'.

Задача 10.11.1 Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f трикутника, подібного до довільного, описаного навколо кола-оригінала.

Розв'язання. За умови даної задачі задано еліпс F' з центром у точці O' і трикутник-оригінал ABC. Оскільки форма трикутника є цілком довільною розв'язання поставленої задачі вимагає явного використання оригіналу.

Проведемо у трикутнику ABC бісектриси AA_1 і BB_1. Точка O перетину цих бісектрис буде центром кола F, вписаного у трикутник ABC (рис. 181).

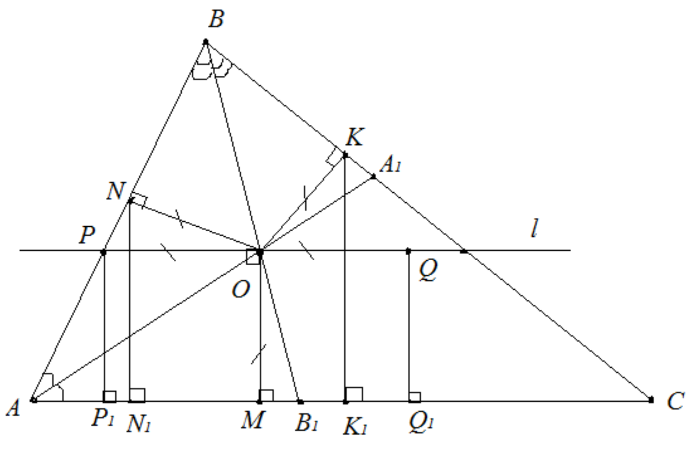


Рис.204

Проведемо $OM \perp AC$, $ON \perp AB$, $OK \perp BC$, $OM = ON = OK = r$, де r – радіус кола F, точки M, N, K – точки дотику кола F відповідно до сторін AC, AB, BC трикутника ABC. Через точку O перпендикулярно до радіуса OM проведемо пряму l. Відкладемо на ній по обидва боки від точки O відрізки $OP = OQ = r$. Проведемо $PP_1 \perp AC$, $NN_1 \perp AC$, $KK_1 \perp AC$,

$NN_1 > PP_1$, $NN_1 > OM$, $KK_1 > PP_1$, $KK_1 > OM$. Оберемо на заданому еліпсі F' довільну точку M'. Згідно наслідку … теореми 8.3, існує паралельне проектування f, при якому зображенням кола F є заданий еліпс F', а зображенням точки M є точка M'.

Розглянемо діаметр $M'T$ еліпса F'. Із використанням допоміжної хорди побудуємо спряджений до нього діаметр $P'Q'$. За властивостями паралельного проектування можна вважати, що $P' = f(P), Q' = f(Q)$ (рис. 182). Через точку M' паралельно до діаметра $P'Q'$ проведемо пряму l'. Вона буде дотичною прямою до еліпса F' у точці M', згідно теореми 8.3 зображенням прямої AC при паралельному проектуванні f. Проведемо паралельно до діаметра $M'T$ відрізки $P'P_1'$ і $Q'Q_1'$ до перетину з прямою l', відповідно, у точках P_1' і Q_1'. $P_1' = f(P_1), Q_1' = f(Q_1)$. $M'P_1' = M'Q_1' = O'P'$.

Розглянемо довільний промінь $M'D$, який не належить прямій l'. Послідовно відкладаємо на цьому промені відрізки $M'N_2 = MN_1$, $N_2P_2 = N_1P_1$,

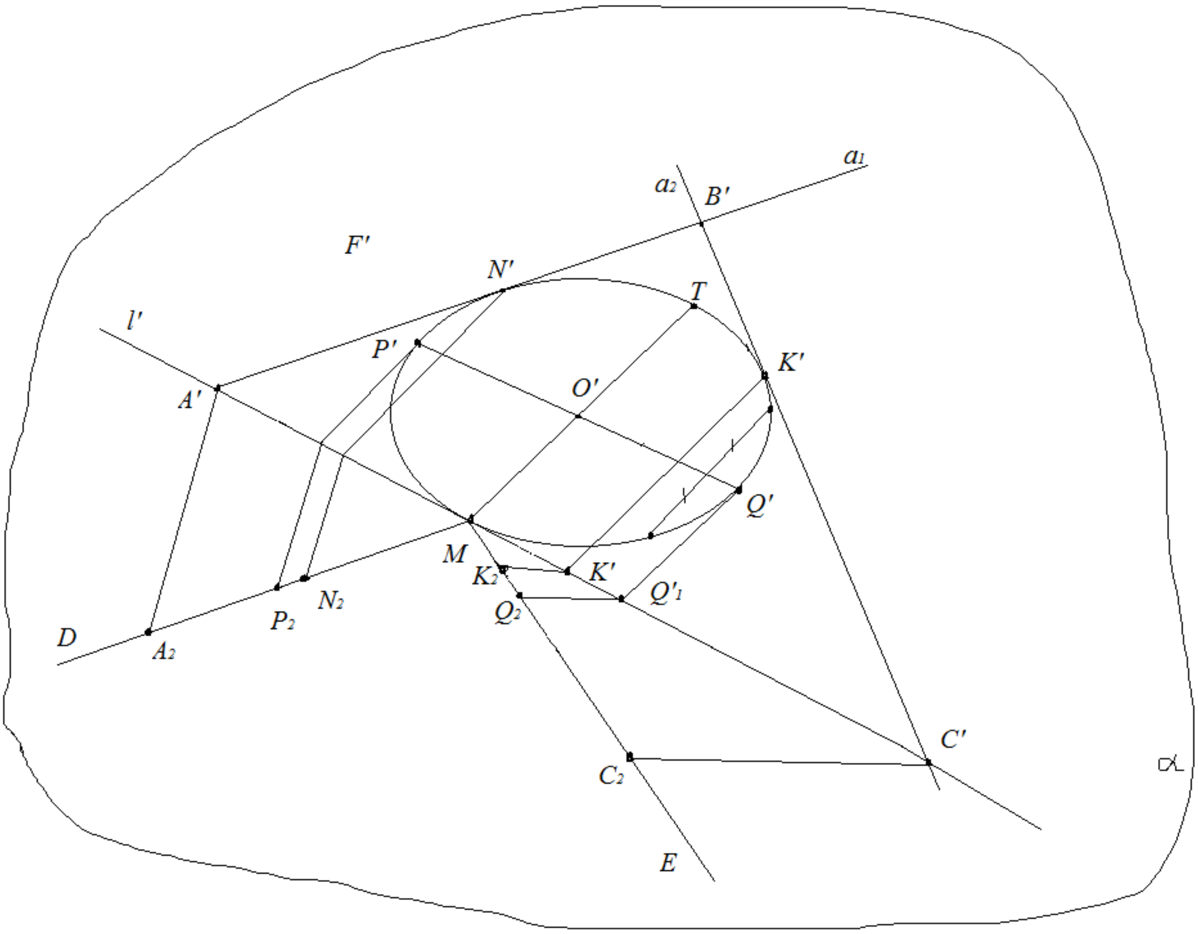


Рис.205

$P_2A_2 = P_1A$. Паралельно до прямої P_2P_1' проведемо прямі N_2N_1' і A_2A' до перетину прямою l', відповідно, у точках N_1' і A'. Згідно теореми Фалеса і властивостей паралельного проектування, $A' = f(A)$, $N_1' = f(N_1)$. Через точку N_1' паралельно до діаметра $M'T$ проведемо пряму $N_1'N'$ до перетину з еліпсом F' у точці N', що $N_1'N' > O'M'$ ($N_1N > OM$, при паралельному проектуванні зберігається відношення відрізків, які лежать на паралельних прямих). Через точки A' і N' проведемо пряму a_1, $a_1 = f(AN)$.

Розглянемо довільний промінь $M'E$, який не належить прямій l (Теоретично, це може бути і промінь $M'D$, але з технічної точки зору це не дуже зручно). Послідовно відкладемо на промені $M'E$ відрізки $M'K_2 = MK_1$, $K_2Q_2 = K_1Q_1$, $Q_2C_2 = Q_1C$. Паралельно до прямої Q_2Q_1' проведемо прямі K_2K_1' і C_2C' до перетину з прямою l', відповідно, у точках K' і C'. Згідно теореми Фалеса і властивостей паралельного проектування, $K_1' = f(K_1)$, $C' = f(C)$. Через точку K' паралельно до діаметра $M'T$ проведемо пряму $K_1'K'$ до перетину з еліпсом F' у такій точці K', що $K_1'K' > O'M'$. Через точки K' і C' проведемо пряму a_2, $a_2 = f(CK)$. Позначимо через B' точку перетину прямих a_1' і a_2', $B' = f(B)$, трикутник $A'B'C'$ є шуканим.

Задача 10.12.2 *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h довільного ромба, описаного навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. Відомо, що, якщо навколо кола описано паралелограм (або коло вписано у паралелограм), то цей паралелограм є ромбом. За теоремою 7.1, довільний паралелограм і лише паралелограм може бути зображенням ромба при паралельному проектуванні. За теоремою 8.1, навколо кожного еліпса можна описати паралелограм. Під час доведення теореми 8.1 було вказано конкретний спосіб побудови такого паралелограма. Він і буде шуканим зображенням ромба.

Задача 10.13. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h ромба, подібного до довільного даного, описаного навколо кола-оригінала.

Розв'язання. За умови даної задачі задано еліпс F' з центром у точці O' і ромб-оригінал $ABCD$. Оскільки форма ромба $ABCD$ є довільною, уникнути безпосереднього використання оригіналу при розв'язанні даної задачі неможливо.

Розглянемо заданий ромб $ABCD$. Його діагоналі AC і BD, як відомо, є взаємно перпендикулярними (рис. 203). Позначимо через O точку їх перетину, $AO = OC$, $BO = OD$, точка O є центром кола, вписаного у ромб $ABCD$. Проведемо $ON \perp AB$, $OK \perp BC$. Пряма ON перетинає сторону CD в точці E, пряма OK перетинає сторону AD в точці M, $ON = OK = OE = OM$, ці відрізки є радіусами кола, вписаного у ромб $ABCD$, $NK \parallel AC$. На промені OB відкладемо відрізок $OT = ON$.

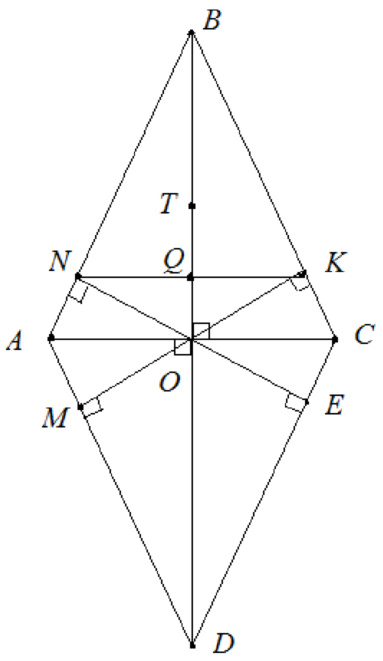


Рис.206

Згідно теореми…, коло, вписане у ромб $ABCD$, можна вважати оригіналом F для еліпса F' при певному паралельному проектуванні h. Тоді $f(O) = O'$, ромб $ABCD$ є оригіналом шуканого зображення при паралельному проектуванні h.

Оберемо у еліпсі F' довільний діаметр $T'H'$. Побудуємо спряджений до нього діаметр $P'L'$. Згідно наслідку … теореми 8.3, прямі $T'H'$ і $P'L'$ можна вважати зображеннями прямих BD і AC при паралельному проектуванні h. Проведемо довільний промінь $O'G$, що не лежить на прямій $T'H'$. Послідовно відкладемо на ньому відрізки $O'Q_1 = OQ$, $Q_1T_1 = QT$, $T_1B_1 = TB$. Паралельно до прямої T_1T' проведемо пряму Q_1Q' до перетину з променем

$O'T'$ у точці Q'. Паралельно до прямої T_1T' проведемо пряму B_1B' до перетину з променем $O'T'$ у точці B'. $Q' = f(Q)$, $B' = f(B)$.

Через точку Q' паралельно до діаметра $P'L'$ проведемо хорду $N'K'$ еліпса F'. $N' = f(N)$, $K' = f(K)$. Проведемо пряму $B'N'$ до перетину з прямою $P'L'$ у точці A'. $A' = f(A)$. Проведемо пряму $B'K'$ до перетину з

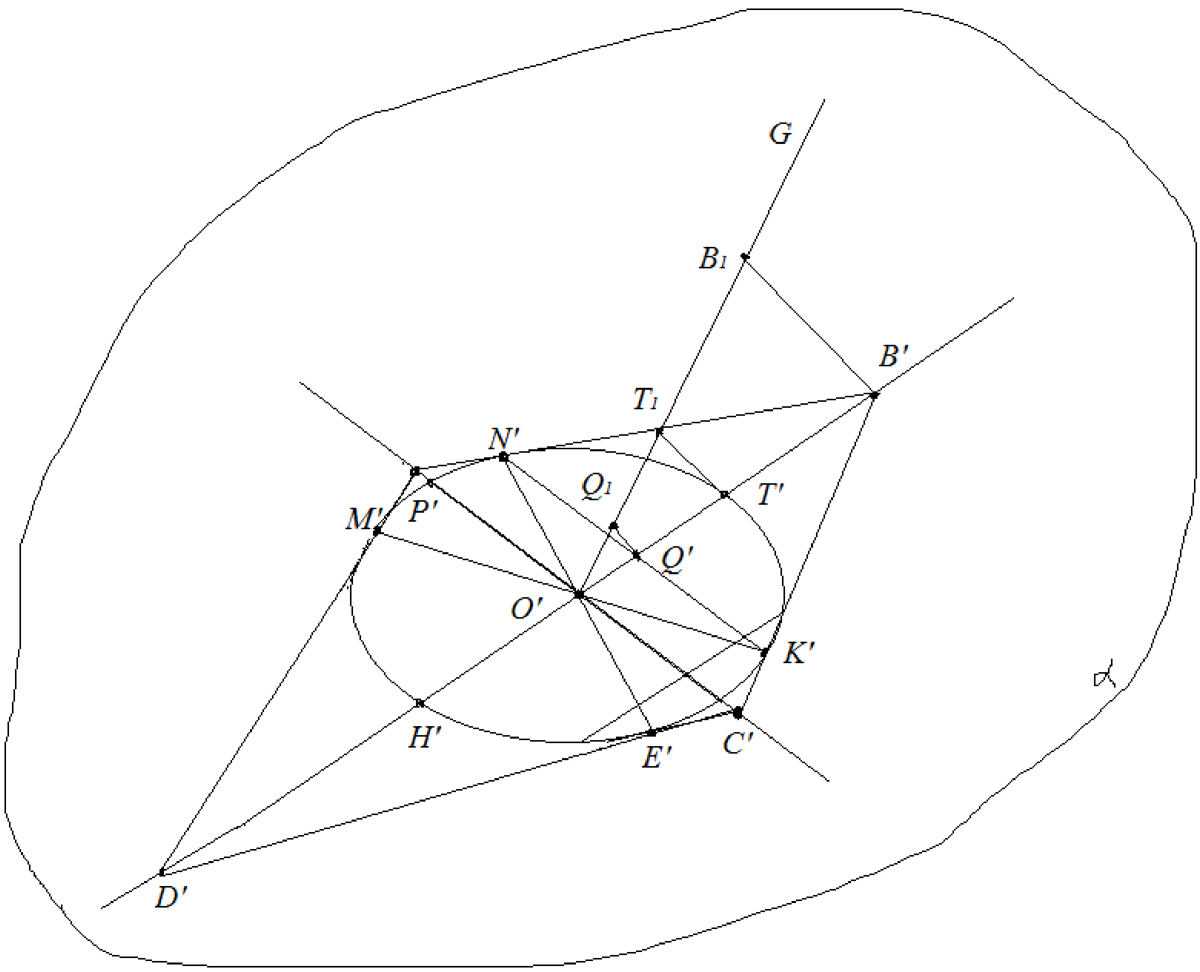


Рис.207

прямою $P'L'$ у точці C'. $C' = f(C)$. Проведемо діаметри $N'E'$ і $K'M'$ еліпса F'. $E' = f(E)$, $M' = f(M)$. Прямі $A'M'$ і $C'E'$ перетнуться у точці D' на прямій $H'T'$. $D' = f(D)$. Паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням ромба $ABCD$ при паралельному проектуванні h.

Задача 10.14. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h ромба кутом у $60°$, описаного навколо кола-оригінала.

Розв’язання. За умови даної задачі задано лише еліпс F' з центром у точці O'. Але всі ромби з кутом у $60°$ є подібними між собою. Отже, будь-який з таких ромбів можна прийняти за оригінал шуканого зображення і розв’язати задачу 10.14 тим же способом, що й задачу 10.13. Але задачу 10.14 можна розв’язати і без явного використання оригіналу.

Дослідимо, спочатку, питання про те, як ромб з кутом у $60°$ можна описати навколо кола.

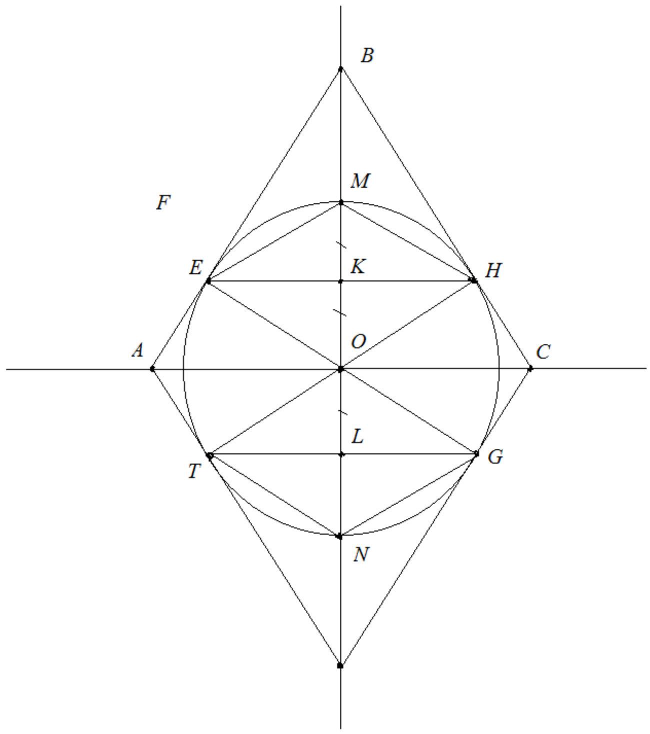


Рис.208

Зауважимо, спочатку, що, оскільки всі сторони ромба є рівними між собою, менша діагональ даного ромба ділить його на два однакових рівносторонніх трикутника.

Проведемо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри MN і PQ. Через середину K радіуса OM і через середину L радіуса ON паралельно до діаметра PQ, відповідно, проведено хорди EH і TG (рис. 185). На промені OM поза колом F відкладемо відрізок $BM = OM$. Проведемо промені BE і BH до перетину з прямою PQ, відповідно, у точках A і C. Промені AT і CG перетнуться у точці D, яка належить прямій MN. Чотирикутник $ABCD$ буде описаним навколо кола F ромбом, у якого $\angle ABC = 60°$.

Дійсно, по-перше, з того, що $EH \parallel PQ$ випливає, що $EH \perp OM$. Але радіус кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл. Тоді відрізок BK одночасно є, відповідно, висотою і медіаною трикутника EBH, трикутник EBH є рівнобедреним, $EB = BH$, $\angle EBK = \angle KBH$.

У чотирикутнику $OEMH$ діагоналі точкою перетину діляться навпіл і є взаємно перпендикулярними. Отже, це ромб. Але тоді $OE =$ $EM =$ $MH =$ $= HO =$ r, де r – радіус кола F. І, одночасно, OM $=$ MB $=$ r. Тому трикутники OEM і OHM є рівносторонніми, $\angle EMO = \angle HMO = 60°$. $\angle EMO$ є зовнішнім кутом при вершині рівнобедреного трикутника EMB, $\angle BEM = \angle EBM$ $=$ $\frac{1}{2}\angle EMO = 30°$. Але тоді $\angle EBH$ $=$ $2 \cdot \angle EBM$ $=$ $60°$, рівнобедрений трикутник EBH є рівностороннім, $\angle HEB = 60°$. З іншого боку, відрізок EK є медіаною рівностороннього трикутника OEM, а тому і його бісектрисою, $\angle OEK = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$, $\angle OEB = \angle OEK$ $+$ $\angle KEB = 30°$ $+$ $+ 60° = 90°$, $OE \perp AB$, відрізок AB дотикається кола F у точці E. Трикутник OHB дорівнює трикутнику OEB за трьома сторонами. Це означає, що $\angle OHB = 90°$, $OH \perp BC$, відрізок BC дотикається кола F у точці H. Трикутник ABC є рівнобедреним, бо в ньому відрізок BO одночасно є бісектрисою і висотою. Але $\angle ABC = 60°$, отже, це рівносторонній трикутник, сторони AB і BC якого дотикаються до кола F.

Чотирикутник $OTNG$ є таким саме ромбом, як і ромб $OEMH$, $\angle TON = \angle NOG = 60°$. Але тоді $\angle POT = 90° - \angle TON = 90° - 60° = 30°$. $\angle QOG$ $=$ $90°$ $-$ $\angle NOG = 30°$. І, одночасно, $\angle POE = 90° -$ $\angle MOE = 30°$, $\angle QOH = 90° - \angle MOK = 30°$. У цьому випадку $\triangle AOE = \triangle AOT = \triangle COH$ $=$ $= \triangle COG$ за двома сторонами і кутом між ними, $\angle OTA = \angle OEA = 90°$, $\angle OGC =$ $\angle OHC = 90°$, $AD \perp OT$, $CD \perp OG$, всі сторони чотирикутника $ABCD$ дотикаються кола F.

$\angle OAD \equiv \angle OAT = \angle OAE = 60°$, $\angle OCD \equiv \angle OCG = \angle OCH = 60°$. Це означає, що $\triangle ADC$ є рівнобедреним і, навіть, рівностороннім, $AD = DC$.

Останнє означає, що точка D лежить на серединному перпендикулярі до відрізка AC, тобто, на прямій MN.

$\triangle ABC = \triangle ADC$ як рівносторонні трикутники, що мають спільну сторону AC. Звідси випливає, що рівними між собою є всі сторони чотирикутника $ABCD$, він є шуканим ромбом, описаним навколо еліпса F'.

Властивості паралельного проектування дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса F' без явного використання оригіналу.

1: Побудуємо для еліпса F' з центром у точці O' пару спряджених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$.

2. Через середину K' радіуса $O'M'$ паралельно до діаметра $P'Q'$ проведемо хорду $E'H'$. Через середину L' радіуса $O'N'$ паралельно до

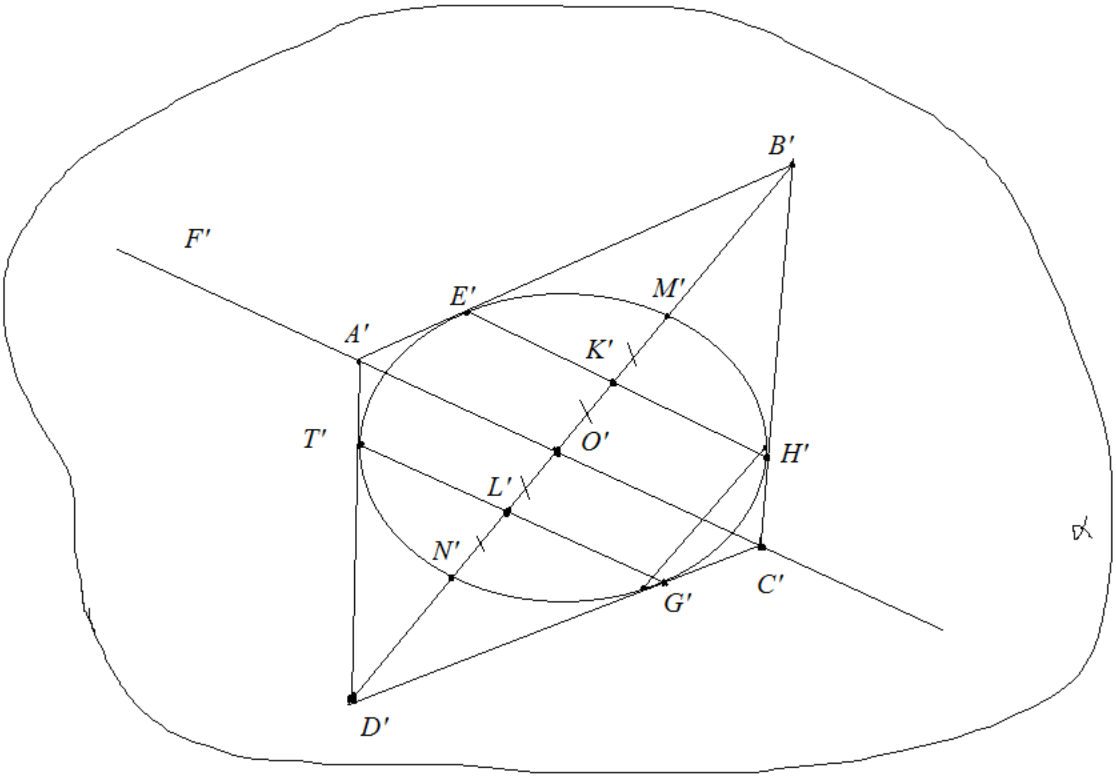


Рис.209

діаметра $P'Q'$ проведемо хорду $T'G'$.

3. На промені, доповняльному до променя $O'M'$ відкладемо відрізок $M'B' = O'M'$.

4. Проведемо прямі $B'E'$ і $B'H'$, позначимо, відповідно, через A' і C' точки перетину з прямою $P'Q'$.

5. Проведемо прямі $A'T'$ і $C'G'$, позначимо через D' точку їх перетину. Чотирикутник паралелограм $A'B'C'D'$ є шуканим.

Задача 10.15. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h ромба кутом у $45°$, описаного навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. Так само, як і у попередній задачі, у задачі 10.15 задано лише еліпс F' з центром у точці O', умова задачі дозволяє з точністю до перетворення подібності відновити оригінал і розв'язати дану задачу за зразком задачі 10.13. Але однозначна визначеність умовою задачі 10.15 форми оригіналу, так само, як і у попередній задачі, дозволяє знайти розв'язок, який не вимагає безпосереднього використання оригіналу. Рис.210

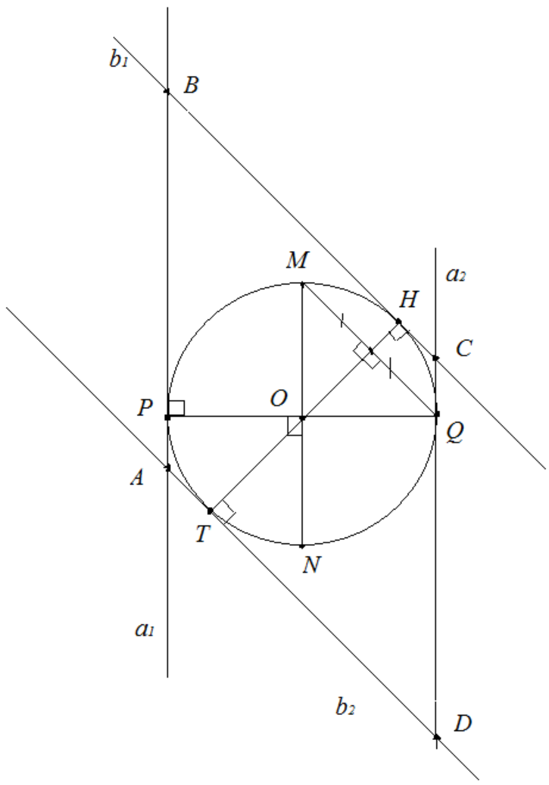


Рис.210

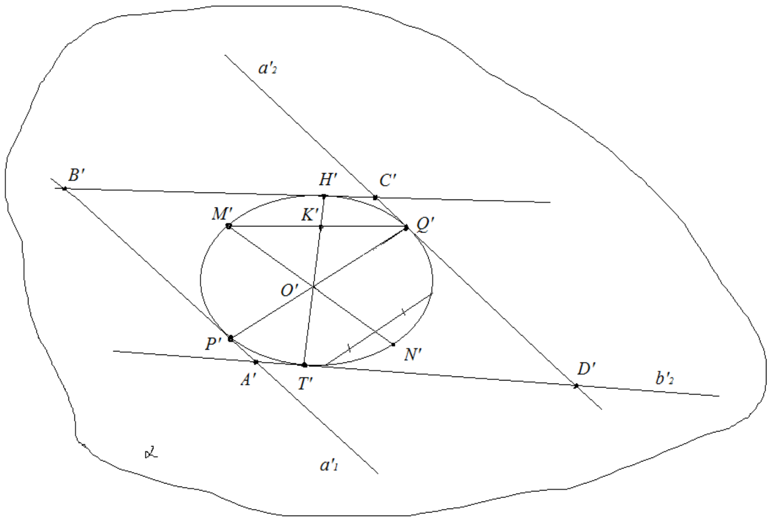


Рис.211

Дослідимо спочатку питання про те, як шуканий ромб можна описати навколо кола. Розглянемо довільне коло F з центром у точці O. Проведемо у ньому взаємно перпендикулярні діаметри MN і PQ. Трикутник MOQ є прямокутним рівнобедреним трикутником, $\angle OMQ = 45°$ (рис. 207). Навколо кола F треба описати паралелограм, суміжні сторони якого є, відповідно, паралельними до прямих MN і MQ. За необхідністю, такий паралелограм буде шуканим ромбом. Паралельно до діаметра MN через точку P проведемо пряму a_1, через точку Q – пряму a_2. Ці прямі будуть дотичними до кола F, відповідно, у точках P і Q. Через середину K хорди MQ проведемо діаметр TH. За відомою теоремою, $TH \perp MQ$. Паралельно до хорди MQ через точку H проведемо пряму b_1, через точку T – пряму b_2. Зрозуміло, що $TH \perp b_1$, $TH \perp b_2$, прямі b_1 і b_2 є дотичними до кола F, відповідно, у точках H і T. Позначимо $A = a_1 \cap b_2$ $B = a_1 \cap b_1$ $C = a_2 \cap b_1$, $D = a_2 \cap b_2$. Чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, описаним навколо кола F, $\angle ABC$ = $\angle NMQ$ = 45° як гострі кути з відповідно паралельними сторонами, тобто, $ABCD$ є шуканим ромбом.

Властивості паралельного проектування дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса F'.

1. Побудуємо для еліпса F' пару спряджених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$ (рис. 208).

2. Паралельно до діаметра $M'N'$ через точку P' проведемо пряму a_1', через точку Q' – пряму a_2'.

3. Через середину K' хорди $M'Q'$ проведемо діаметр $T'H'$.

4. Паралельно до хорди $M'Q'$ через точку H' проведемо пряму b_1', через точку T' – пряму b_2'.

Позначимо $A' = a_1' \cap b_2'$, $B' = a_1' \cap b_1'$, $C' = a_2' \cap b'$, $D' = a_2' \cap b_2'$. Чотирикутник (паралелограм) $A'B'C'D'$ є шуканим.

Задача 10.16. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h довільної прямокутної трапеції, описаної навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. По-перше, дослідимо питання про те, як прямокутну трапецію можна описати навколо кола. При цьому треба пам'ятати, що не будь-яку трапецію можна вписати коло, у трапецію можна вписати коло тоді та тільки тоді, коли сума довжин основ трапеції дорівнює сумі довжин її бічних сторін. Тому, на відміну від задачі 10…., технічно зручніше починати пошуки відповіді не з побудови відповідної трапеції, а одразу з кола.

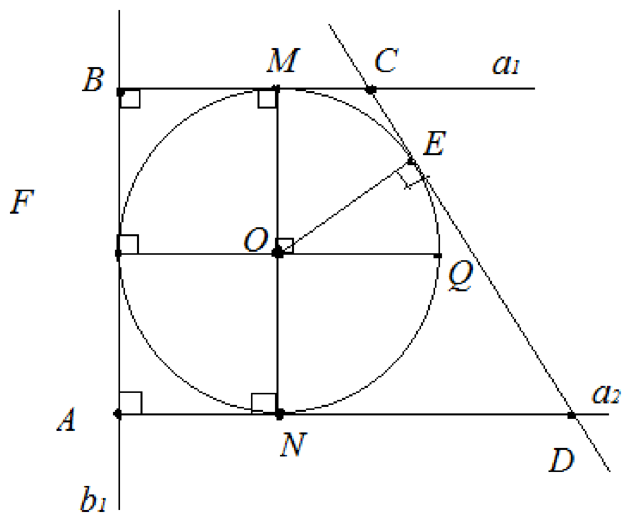


Рис.212

Розглянемо довільне коло F з центром у точці O (рис. 212). Проведемо у ньому взаємно перпендикулярні діаметри MN і PQ. Паралельно до діаметра PQ через точки M і N проведемо, відповідно, прямі a_1 і a_2. Пряма a_1 буде дотикатися кола F у точці M, пряма

a_2 – у точці N. Паралельно до діаметра MN через точку P проведемо пряму b_1. Ця пряма буде дотикатися кола F у точці P. Зрозуміло, що $b_1 \perp a_1$, $b_1 \perp a_2$. Позначимо $A = b_1 \cap a_2$, $B = b_1 \cap a_1$. Якщо відрізок AB прийняти за бічну сторону шуканої трапеції, то основи такої трапеції будуть належати променям BM і AN, відповідно, прямих a_1 і a_2. За умови даної задачі мова йде про побудову довільної трапеції, описаної навколо кола F. Отже, для побудови тієї бічної сторони шуканої трапеції, що не є перпендикулярною до основ, достатньо довільним чином на дузі $M_Q N$ кола F обрати точку дотику E цієї сторони до кола F. Не можна тільки у якості точки E обирати точку Q, бо утвориться квадрат, а не прямокутна трапеція. Далі треба провести радіус OE, через точку E пряму b_2, перпендикулярну до OE. Нехай $C = a_1 \cap b_2$, $D = a_2 \cap b_2$. Трапеція $ABCD$ є шуканою.

Властивості паралельного проектування дозволяють виконати всі аналогічні побудови для еліпса F'. Оскільки мова йде про побудову

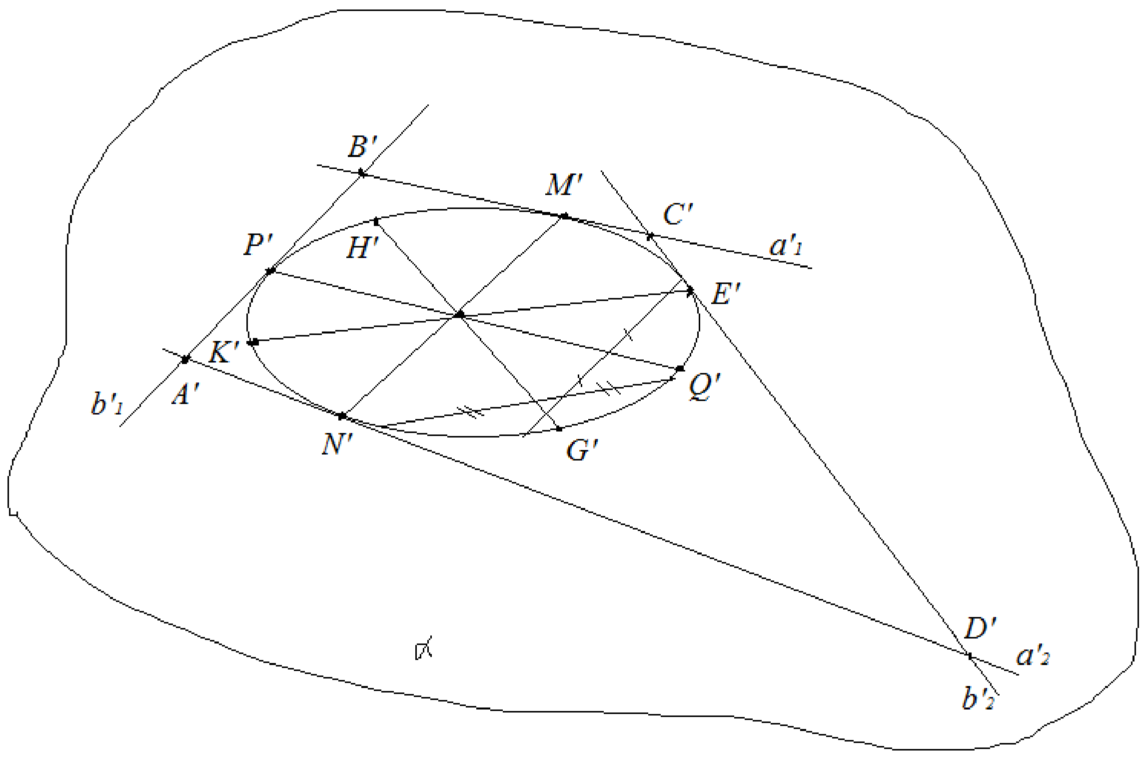


Рис.213

зображення довільної трапеції, використання оригіналу для цього не є потрібним.

1. У заданому еліпсі F' з центром у точці O' побудуємо пару спряджених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$ (рис. 213)

2. Паралельно до діаметра $P'Q'$ через точку M' проведемо пряму a_1', через точку N' – пряму a_2'. Пряма a_1' буде дотикатися еліпса F' у точці M', пряма a_2' буде дотикатися еліпса F' у точці N'.

3. Паралельно до діаметра $M'N'$ через точку P' проведемо пряму b_1'. Пряма b_1' буде дотикатися еліпса F' у точці P'.

4. На дузі $M'_{Q'}N'$ еліпса F' оберемо довільну точку E', відмінну від точки Q'. Проведемо діаметр $E'K'$. Побудуємо спряджений до нього діаметр $H'G'$.

5. Через точку E' паралельно до діаметра $H'G'$ проведемо пряму b_2'. Пряма b_2' буде дотикатися еліпса F' у точці E'.

6. Позначимо $A' = a_2' \cap b_1'$, $B' = a_1' \cap b_1'$, $C' = a_1' \cap b_2'$, $D' = a_2' \cap b_2'$. Чотирикутник $A'B'C'D'$ є трапецією, шуканою трапецією, описаною навколо еліпса F'.

Задача 10.17. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h заданої прямокутної трапеції, описаної навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. За умови даної задачі задано певну прямокутну трапецію $ABCD$, описану навколо кола F з центром у точці O, і еліпс F' з центром у точці O' (рис. 214). Форма трапеції $ABCD$ визначена лише характером її задання на рис. 209*а*. Отже, уникнути безпосереднього використання оригіналу при розв'язанні даної задачі неможливо.

Проведемо у колі F діаметр MN, перпендикулярний до основ BC і AD описаної трапеції $ABCD$ і перпендикулярний до нього діаметр PQ. Якщо відрізок AB є бічною стороною трапеції, перпендикулярною до основ, то $PQ \perp AB$. Нехай бічна сторона CD трапеції $ABCD$ дотикається кола F у

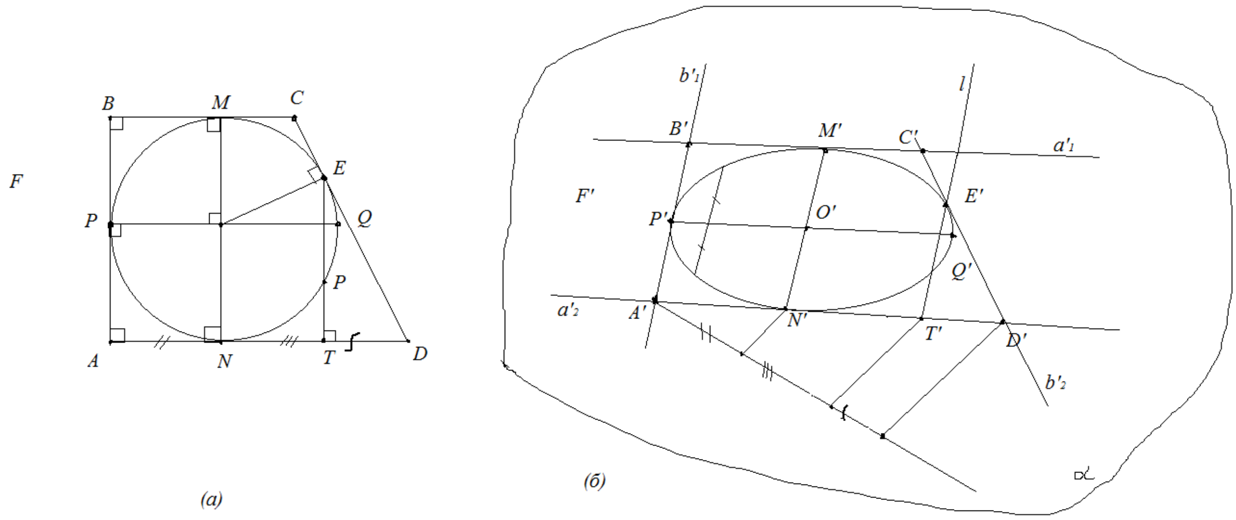


Рис.214

точці E. Точка E належить дузі $M_Q N$ кола F, але не співпадає з точкою Q. Проведемо $ET \perp AD$. Якщо основа AD є більшою основою трапеції $ABCD$ (рис. 214*a*), то точка T є внутрішньою точкою відрізка ND, пряма ET, як січна кола F, перетинає його ще у такій точці P, яка належить відрізку ET.

Побудуємо у заданому еліпсі F' пару спряджених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$. Згідно наслідку теореми 8.3, існує паралельне проектування h, при якому еліпс F' є зображенням кола F, діаметр $M'N'$ – зображенням діаметра MN, діаметр $P'Q'$ – зображенням діаметра PQ ($f(O)=O'$, $f(M)=M'$, $f(N)=N'$, $f(P)=P'$, $f(Q)=Q'$). Паралельно до діаметра $P'Q'$ через точки M' і N' проведемо, відповідно, прямі a_1' і a_2'. Паралельно до діаметра $M'N'$ через точку P' проведемо пряму b_1'. Нехай $A'=a_2' \cap b_1'$, $B'=a_1' \cap b_1'$. Згідно властивостям паралельного проектування, $A'=f(A), B'=f(B)$. Проведемо довільний промінь $A'L$ з початком у точці A', який не належить прямій a_2'. Послідовно відкладемо на ньому відрізки $A'N_1 = AN$, $N_1T_1 = NT$, $T_1D_1 = TD$. Паралельно до прямої N_1N' проведемо прямі T_1T' і D_1D' до перетину з прямою a_2', відповідно, у точках T' і D'. За властивостями паралельного проектування $T' = f(T)$, $D' = f(D)$. Паралельно до діаметра $M'N'$ через точку T' проведемо пряму l. $l = f(TE)$. Пряма l буде січною для еліпса F', перетне його у двох точках: P' і E'. Нехай точка P' лежить між точками T' і E'. Це означає, що $E' = f(E)$, $P' = f(P)$, бо для кола F саме точка P лежить між точками E і T. Через точки D' і E' проведемо пряму b_2' до перетину з прямою a_1' у точці C'. $C' = f(C)$.

Отже, чотирикутник $A'B'C'D'$ є зображенням трапеції при паралельному проектуванні f і тому він є чотирикутником (точніше, трапецією) шуканим.

Задача 10.18. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h прямокутної трапеції з кутом у $30°$, описаної навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. Умова задачі 10.18 однозначно визначає форму трапеції-оригінала (можна довести, що всі прямокутні трапеції, які мають кут у $30°$ і у які можна вписати коло, є подібними між собою). Але саму трапецію-оригінала не задано. Дослідимо, спочатку, питання про те, як таку трапецію можна описати навколо кола F.

Проведемо у колі F з центром у точці O взаємно перпендикулярні

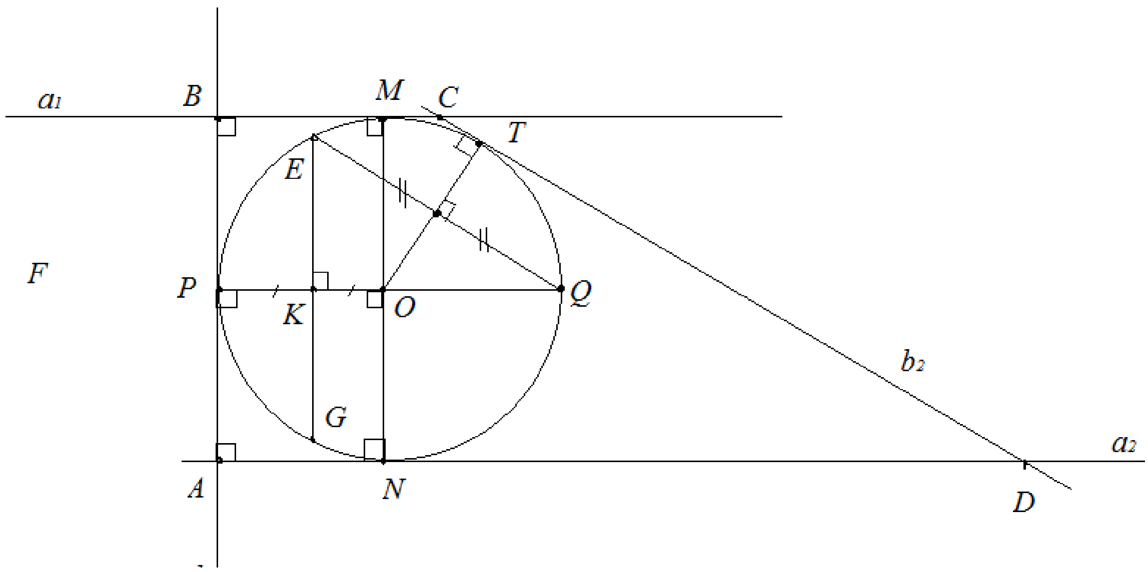


Рис.215

діаметри MN і PQ (рис. 215). Паралельно до діаметра MN через точку P проведемо пряму b_1. Позначимо $A = a_2 \cap b_1$, $B = a_1 \cap b_1$. Паралельно до діаметра MN через середину K радіуса OP проведемо хорду EG. Доведено (наприклад, при розв'язанні задачі 10.3), що $\angle EQP = 30°$. Через середину H хорди EQ проведемо радіус OT. Паралельно до хорди EQ через точку T проведемо пряму b_2. Позначимо $C = a_1 \cap b_2$, $D = a_2 \cap b_2$. Чотирикутник $ABCD$ є прямокутною трапецією ($BC \parallel AD$, $AB \perp AD$), описаною навколо кола F. $\angle CDA = \angle EQP$, бо це гострі кути з відповідно паралельними сторонами. Отже, $\angle CDA = 30°$ і трапецію $ABCD$ можна прийняти за оригінал шуканого зображення.

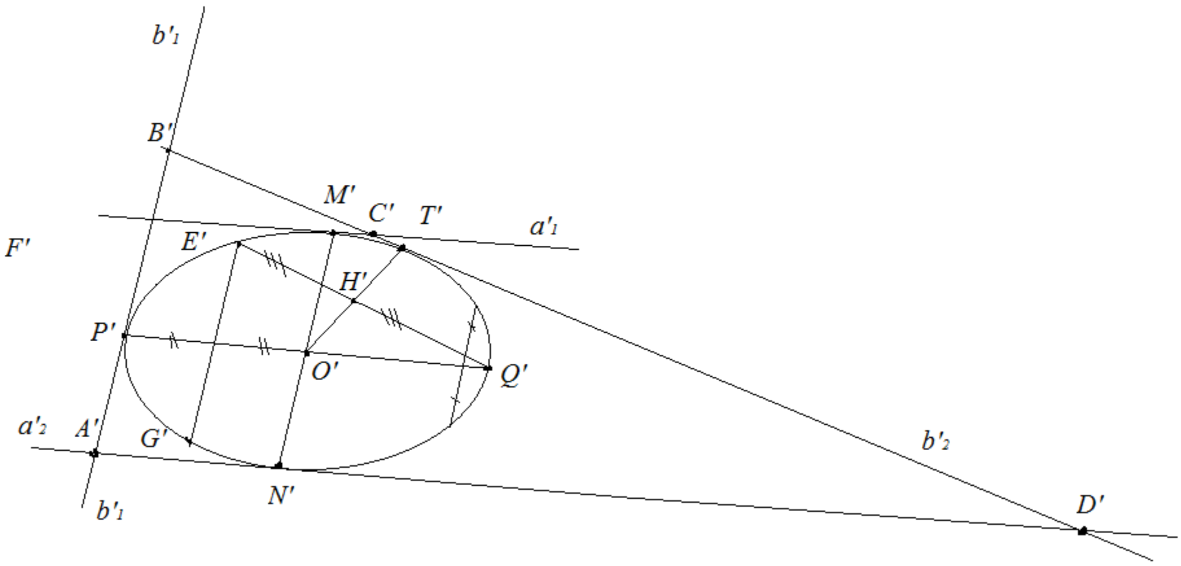


Рис.216

Тепер задачу 10.18 можна розв'язати тим же способом, що й задачу 10.17. Але властивості паралельного проектування дозволяють наступним чином для заданого еліпса F' виконати всі побудови, аналогічні до проведених на рис. 213 для кола F, і розв'язати задачу 10.18 без використання оригіналу у явному вигляді. 1. Побудуємо у заданому еліпсі F' з центром у точці O' пару спряджених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$ (рис. 216).

2.Паралельно до діаметра $P'Q'$ через точки M' і N', відповідно, проведемо прямі a_1' і a_2'. Паралельно до діаметра $M'N'$ через точку P' проведемо пряму b_1'. Позначимо $A' = a_2' \cap b_1'$, $B' = a_1' \cap b_1'$. 3. Паралельно до діаметра $M'N'$ через середину K' радіуса $O'P'$ проведемо хорду $E'G'$. 4. Через середину H' хорди $E'Q'$ проведемо радіус $O'T'$. 5. Паралельно до хорди $E'Q'$ через точку T' проведемо пряму b_2'. Позначимо $C' = a_1' \cap b_2'$, $D' = a_2' \cap b_2'$.

Трапеція $A'B'C'D'$ є шуканою.

Задача 10.19. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h довільної рівнобічної трапеції, описаної навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. Дослідимо спочатку питання про те, як рівнобічну трапецію можна описати навколо кола. У курсі евклідової геометрії доведено, що, якщо рівнобічну трапецію $ABCD$ ($AB = CD$) описано навколо кола F, то хорда, яка сполучає точки M і N дотику кола F, відповідно, до основ BC і AD трапеції $ABCD$, є діаметром кола F (зрозуміло, перпендикулярним до основ трапеції), точки M і N є, відповідно, серединами основ трапеції $ABCD$ ($BM = MC$, $AN = ND$), точки H і T дотику кола F, відповідно, до бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ є взаємно симетричними відносно діаметра MN ($HT \perp MN$, $HT \cap MN = L$, $HL = LT$) (рис. 217). Звідси випливає простий спосіб побудови довільної рівнобічної трапеції, описаної навколо кола F з центром у точці O.

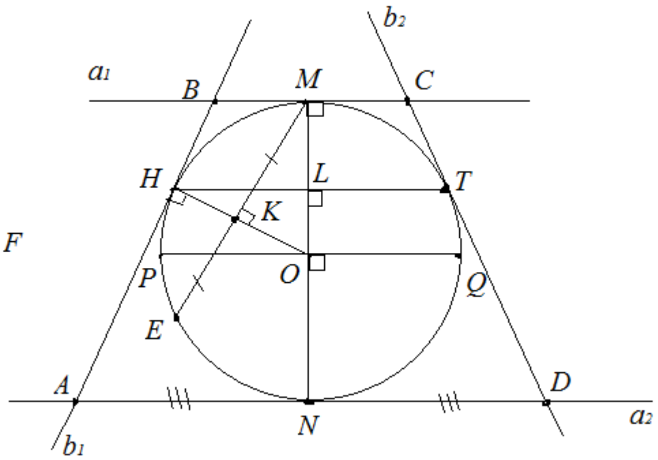


Рис.217

Треба провести довільний діаметр MN кола F, обрати на ньому

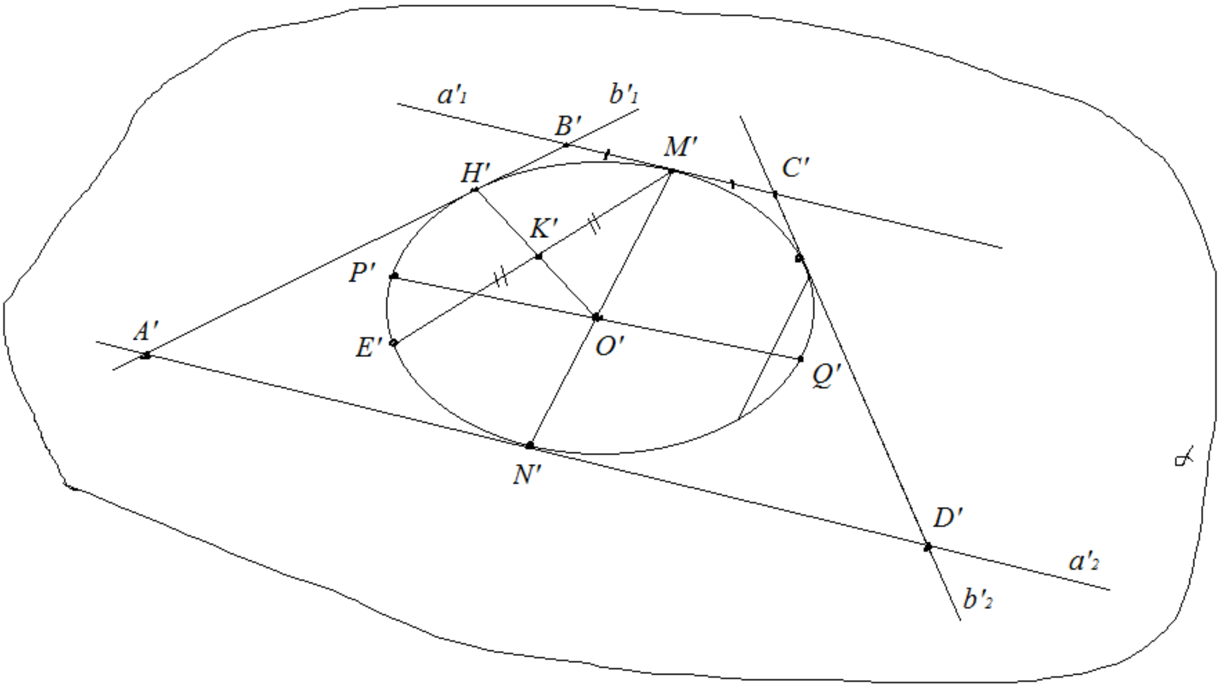


Рис.218

довільну точку L, відмінну від точки O (інакше, утвориться квадрат, а не трапеція), через точку L, перпендикулярно до діаметра MN, провести хорду HT, у точках H і T провести дотичні до кола F – відповідно, прямі b_1 і b_2, перпендикулярні до радіусів OH і OT, у точках M і N провести дотичні до кола F – відповідно, прямі a_1 і a_2, $a_1 \perp MN$, $a_2 \perp MN$, $a_1 \parallel a_2 \parallel HT$, позначити $A = a_2 \cap b_1$, $B = a_1 \cap b_1$, $C = a_1 \cap b_1$, $D = a_2 \cap b_2$, $ABCD$ – шукана рівнобічна трапеція. Форма трапеції $ABCD$ повністю визначається місцеположенням точки L на діаметрі MN (і дозволяють виконати аналогічні побудови для заданого $L \neq 0$). Властивості зображень фігур при паралельному проектуванні дозволяють виконати аналогічні побудови для заданого еліпса F' без явного використання оригіналу.

Але з технічної точки зору, особливо стосовно виконання аналогічних побудов для еліпса, простішим вимагає меншої кількості кроків виявляється трішки інший шлях знаходження рівнобічної трапеції $ABCD$.

Проведемо у колі F з центром у точці O взаємно перпендикулярні діаметри MN і PQ. Паралельно до діаметра PQ через точку M проведемо пряму a_1, через точку N – пряму a_2. Оберемо довільну точку E на дузі $M_P N$ кола F. Через середину K хорди ME проведемо радіус OH. Через точку H, паралельно до хорди ME проведемо пряму b_1. Позначимо $A = a_2 \cap b_1$, $B = a_1 \cap b_1$. На промені, доповняльному до променя MB, відкладемо відрізок MC = MB. Чотирикутник $ABCD$ є шуканою рівнобічною трапецією.

Виконаємо побудови, аналогічні до запропонованих другим варіантом, для еліпса F' (рис. 216).

1. Проведемо у еліпсі F' з центром у точці O' пару спряджених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$.

2. Паралельно до діаметра $P'Q'$ через точку M' проведемо пряму a_1', через точку N' – пряму a_2'.

3. На дузі $M'_{P'}N'$ еліпса F' оберемо довільну точку E'. Через середину K' хорди $E'M'$ проведемо радіус $O'H'$.

4. Через точку H' паралельно до хорди $E'M'$ проведемо пряму b_1'. Позначимо $A' = a_2' \cap b_1'$, $B' = a_1' \cap b_1'$. 5. На промені, доповняльному до променя $N'A'$, відкладемо відрізок $N'D'$ = $N'A'$. На промені, доповняльному до променя $M'B'$, відкладемо відрізок $M'C'$ = $M'B'$. 6. Через точки C' і D' проведемо пряму b_2'. Чотирикутник $A'B'C'D'$ є шуканим, трапецією, зображенням певної рівнобічної трапеції, описаної навколо кола F, яке зображено еліпсом F'.

Задача 10.20. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h заданої рівнобічної трапеції, описаної навколо кола F.*

Розв'язання. За умови даної задачі задано рівнобічну трапецію $ABCD$, описану навколо кола F з центром у точці O, і еліпс F' з центром у точці O' (рис. 196). Форму оригінала визначено лише тим, що оригінал задано у явному вигляді. Тому при розв'язанні поставленої задачі неможливо уникнути безпосереднього використання оригіналу.

Розглянемо задану рівнобічну трапецію $ABCD$ ($AB = CD$), описану навколо кола F з центром у точці O. Нехай точка M є серединою основи BC ($BM = MC$), точка N – серединою основи AD ($AN = ND$). Відрізок MN є діаметром кола F, перпендикулярним до основ трапеції ($MN \perp BC$; $MN \perp AD$). Проведемо у колі F діаметр $PQ \perp MN$. Нехай бічна сторона AB трапеції дотикається кола F у точці H, а бічна сторона CD – у точці T. Нехай саме точка H кола F належить дузі $M_{P}N$. Проведемо $PK \perp AD$, $HL \perp AD$ (рис. 216).

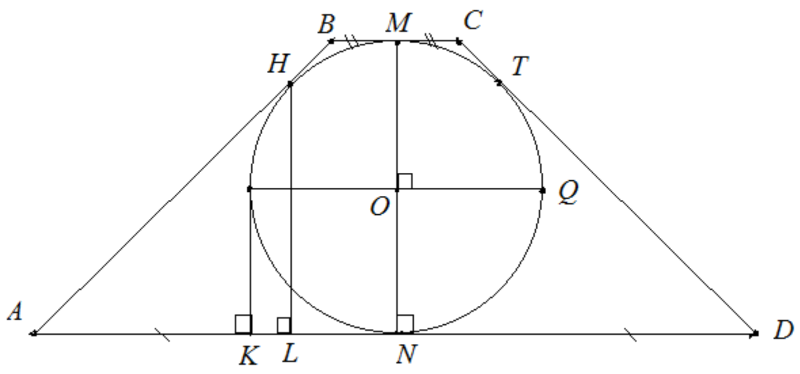


Рис.219

Розглянемо заданий еліпс F' з центром у точці O' (рис. 197). Побудуємо у ньому довільну пару спряджених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$. Згідно

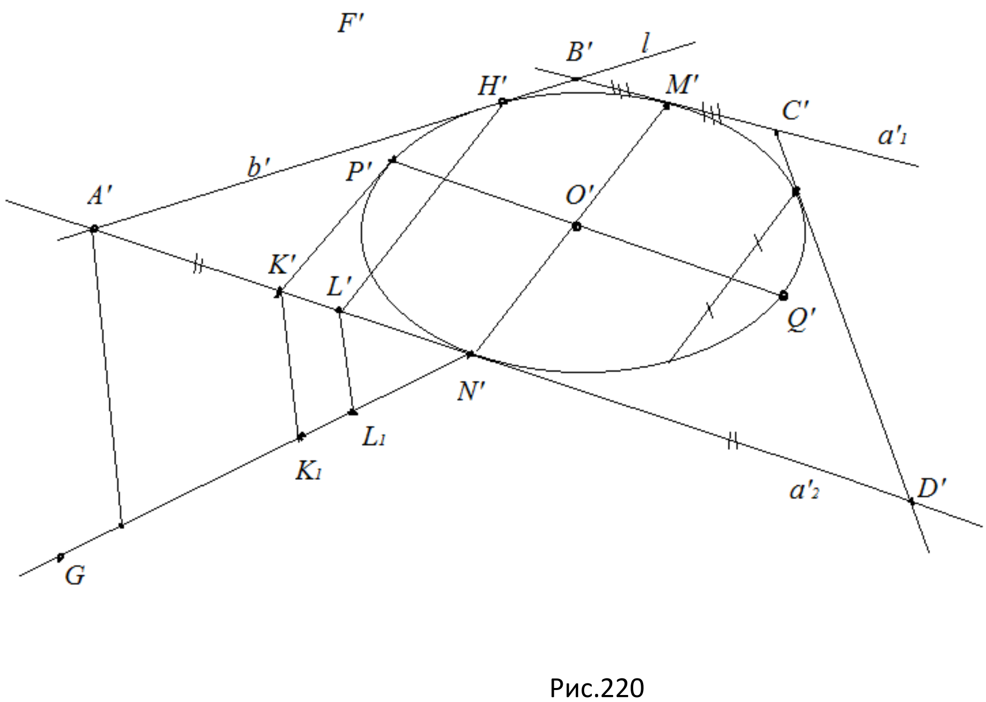


Рис.220

наслідку … теореми 8.3, можна вважати, що, якщо еліпс F' є зображенням кола F при певному паралельному проектуванні h, то $M' = f(M)$, N' = $f(N)$, $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$. Паралельно до діаметра $P'Q'$ через точку M' проведемо пряму a_1'; через точку N' – пряму a_2'. a_1' = $f(BC)$, a_2' = $f(AD)$. Паралельно до діаметра $M'N'$ через точку P' проведемо пряму $P'K'$ до перетину з прямою a_2' у точці K'. K' = $f(K)$. Побудуємо довільний промінь $N'G$, який не лежить на прямій a_2'. Послідовно відкладемо на ньому відрізки $N'L_1$ = NL, L_1K_1 = LK, K_1A_1 = KA.

Пряма HL буде січною для кола F. Вона перетне його у двох точках H і E. Якщо основа BC трапеції $ABCD$ є меншою за основу AD (як на рис. 194), то точка E буде внутрішньою точкою відрізка HL, точки K і L будуть внутрішніми точками відрізка AN.

Паралельно до прямої K_1K' проведемо прямі A_1A' і L_1L' до перетину з прямою a_2', відповідно, у точках K' і L'. Згідно властивостей зображення фігур при паралельному проектуванні, $A' = f(A), L' = f(L)$. Паралельно до діаметра $M'N'$ через точку L' проведемо пряму l. Вона буде січною для еліпса F', перетне його у двох точках. Позначимо ці точки через E' і H', при цьому таким чином, що точка E' буде внутрішньою точкою відрізка $L'H'$. Згідно властивостей зображення фігур при паралельному проектуванні $E' = f(E)$, $H' = f(H)$. Через точки A' і H' проведемо пряму b' до перетину з прямою a_1' у точці B'. $B' = f(B)$. На промені, доповняльному до променя $M'B'$ відкладемо відрізок $M'C'$ = $M'B'$. $C' = f(C)$. На промені, доповняльному до променя $N'A'$ відкладемо відрізок $N'D'$ = $N'A'$. $D' = f(D)$. Трапеція $A'B'C'D'$ є шуканим зображенням трапеції $ABCD$ при паралельному проектуванні h.

Задача 10.21. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному* *проектуванні* h. *Побудуйте зображення при проектуванні* h *рівнобічної трапеції з кутом у* $45°$, *описаної навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. За умови даної задачі задано лише еліпс F' з центром у точці O'. Тобто, спочатку треба дослідити, як можна (і чи можна взагалі) описати навколо кола рівнобічну трапецію з кутом у $45°$, а потім, бажано, знайти такий спосіб подібного описання, аналог

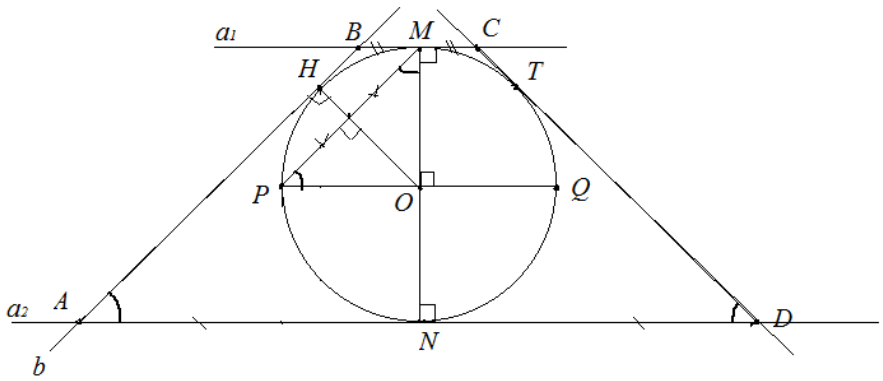


Рис.221

якого, завдяки властивостям зображення фігур при паралельному проектуванні h, не вимагає явного використання оригіналу при його реалізації для еліпса.

Розглянемо коло F з центром у точці O (рис. 221). Проведемо у ньому взаємно перпендикулярні діаметри MN і PQ. Паралельно до діаметра PQ

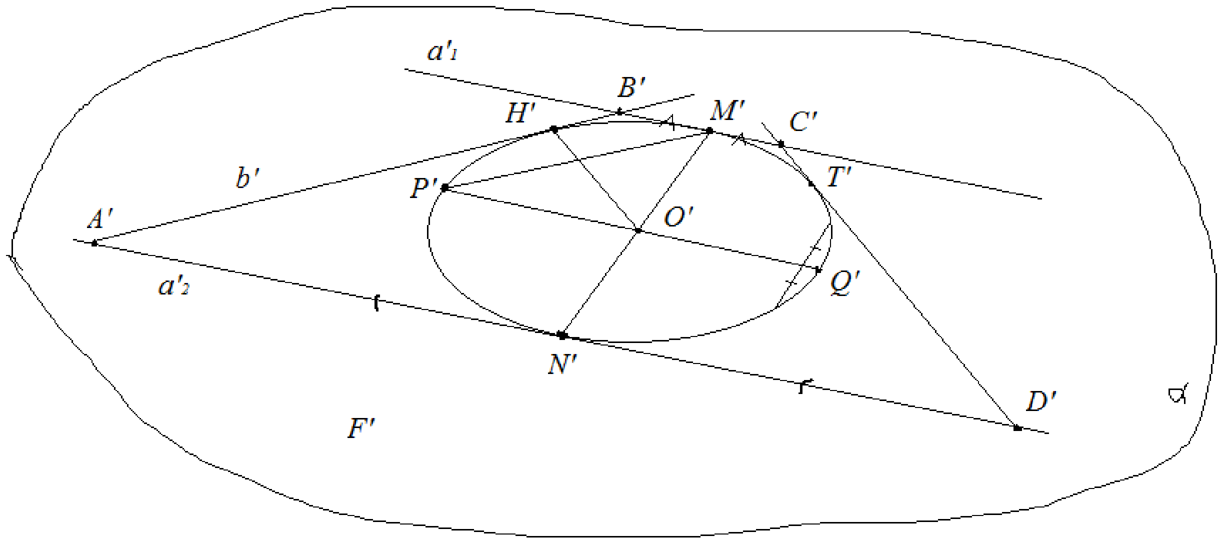


Рис.222

через точку M проведемо пряму a_1, через точку N – пряму a_2. Ці прямі будуть дотичними до кола F, відповідно, у точках M і N. Трикутник MOP буде прямокутним рівнобедреним трикутником, $\angle MPO = \angle PMO = 45°$. Через середину K хорди MP проведемо радіус OH ($OH = MP$). Через точку H паралельно до хорди MP проведемо пряму b. Вона буде дотичною до кола F у точці H. Позначимо $A = a_2 \cap b$, $B = a_1 \cap b$. На промені, доповняльному до променя MB, відкладемо відрізок $MC = MB$. На промені, доповняльному до променя NA, відкладемо відрізок $ND = NA$. Чотирикутник $ABCD$ буде трапецією з кутом у $45°$, описаною навколо кола F. Дійсно, $\angle BAN = \angle MPO$ – гострі кути з відповідно паралельними сторонами. Згідно виконаних побудов, точки C і D є, відповідно, симетричними до точок B і A відносно прямої MN. Отже, трапеція $MCDN$ є симетричною до трапеції $MABN$ відносно прямої MN. Дуга M_QN кола F також симетрична дузі M_PN цього кола відносно прямої MN. Симетрія відносно прямої є рухом. При русі зберігаються довжини відрізків, приналежність точок до геометричних фігур, величини кутів. Звідси випливає, що $CD = BA$, $\angle CDN = \angle BAN = 45°$, відрізок CD дотикається дуги так само, як відрізок BA дотикається дуги M_PN.

Таким чином, навколо будь-якого кола можна описати рівнобічну трапецію з кутом у $45°$. Знайдено такий спосіб подібного описання, аналог якого, завдяки властивостям зображення фігур при паралельному проектуванні, можна реалізувати і для еліпса. Така реалізація не вимагає безпосереднього використання оригіналу.

1. Побудуємо у еліпсі F' пару спряджених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$. Згідно наслідку … теореми 8.3, можна вважати, що, якщо еліпс F' є зображенням кола F при паралельному проектуванні h, $M' = f(M)$, $N' = f(N)$, $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$ (рис. 219, 217).

2. Паралельно до діаметра $P'Q'$ через точку M' проведемо пряму a_1', через точку N' – пряму a_2'. $a_1' = f(a_1)$, $a_2' = f(a_2)$.

3. Через середину K' хорди $P'M'$ ($K' = f(K)$), проведемо радіус $O'H'$ еліпса F'. $H' = f(H)$. Через точку H' паралельно до хорди $P'M'$ проведемо пряму b'. $b' = f(b)$.

4. Позначимо $A' = a_2' \cap b'$, $B' = a_1' \cap b'$. $A' = f(A)$, $B' = f(B)$.

5. На промені, доповняльному до променя $M'B'$, відкладемо відрізок $M'C' = M'B'$. На промені, доповняльному до променя $N'A'$, відкладемо відрізок $N'D' = N'A'$. $C' = f(C)$,

$D' = f(D)$. Чотирикутник $A'B'C'D'$ є шукана трапеція.

Задача 10.22. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h довільної трапеції (не прямокутної і не рівнобічної), описаної навколо кола-оригінала.*

Розв'язання. Дослідимо спочатку питання про те, як довільну трапецію (не прямокутну і не рівнобічну) можна описати навколо кола.

У колі F з центром у точці O проведемо взаємно перпендикулярні діаметри MN і PQ. Паралельно до діаметра PQ через точку M проведемо пряму a_1, через точку N – пряму a_2. Пряма a_1 дотикається кола F у точці M, пряма a_2 дотикається кола F у точці N, $a_1 \parallel a_2$. Будемо намагатися побудувати трапецію, основи якої лежать на прямих a_1 і a_2. Для побудови прямих, що містять бічні сторони шуканої трапеції, достатньо

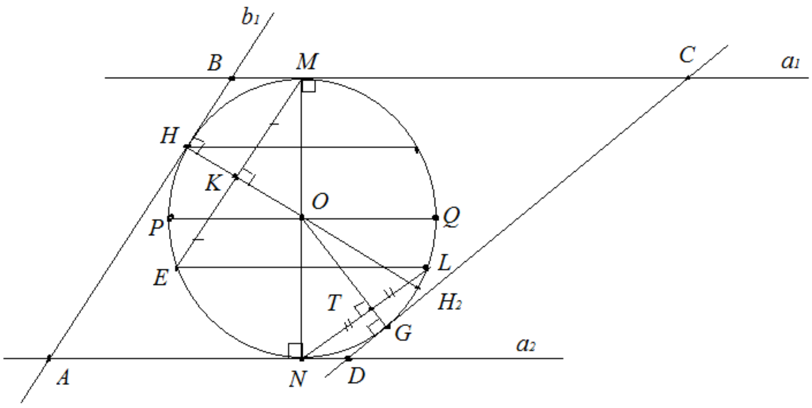


Рис.223

обрати точки дотику цих прямих до кола F. Одну точку, наприклад, H, на дузі M_PN, іншу точку, наприклад, G, на дузі M_QN. За точку H можна прийняти довільну точку дуги M_PN, відмінну від точки P (у випадку обрання точки P мова може йти тільки про побудову прямокутної трапеції). За точку G можна обрати довільну точку дуги M_QN за виключенням точки Q (буде прямокутна трапеція), точки H_1, симетричної точці H відносно прямої MN (буде рівнобічна трапеція), точки H_2, симетричної точці H відносно точки O (буде ромб). Потім треба побудувати дотичні прямі до кола F у точках H і G. З технічної точки зору, особливо з метою виконання аналогічних побудов для еліпса F', для проведення дотичної прямої зручніше мати пряму, паралельно до якої проходить така дотична. Отже, зручніше обрати на дузі M_PN довільну точку E, провести хорду ME, через середину K хорди ME провести радіус OH. Дотична пряма b_1 до кола F точці H буде паралельною до хорди ME (рис. 223). Потім треба так обрати точку L на дузі M_QN, щоб точка L не була симетричною до точки E відносно прямої MN у випадку наступного обрання хорди ML (утвориться рівнобічна трапеція), точка L не була симетричною до точки E відносно точки O у випадку наступного обрання хорди NL (утвориться ромб). На рис. 200 обрано саме хорду NL.

Далі, через середину T обраної хорди проводимо радіус OG. Дотична пряма b_2 у точці G до кола F буде паралельною до хорди NL. Нехай $A = a_2 \cap b_1$, $B = a_1 \cap b_1$, $C = a_1 \cap b_2$, $D = a_2 \cap b_2$. Чотирикутник $ABCD$ є довільною (не прямокутною і не рівнобічною) трапецією, описаною навколо кола F.

Властивості зображень фігур при паралельному проектуванні дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса F'. Такі побудови не вимагають безпосереднього використання оригіналу.

Проведемо у еліпсі F' з центром у точці O' довільну пару спряджених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$. Паралельно до діаметра $P'Q'$ через точку M' проведемо пряму a_1', через точку N' – пряму a_2'. Пряма a_1' буде дотичною до еліпса F' у точці M', пряма a_2' – дотичною до еліпса F' у точці N'. На дузі $M'_{P'}N'$ еліпса F' оберемо довільну точку E', проведемо хорду $M'E'$. Через середину K' хорди $M'E'$ проведемо радіус $O'H'$. Паралельно до хорди $E'M'$ через точку H' проведемо пряму b_1'. Ця пряма буде дотичною до еліпса F' у точці H'. На дузі $M'_{Q'}N'$ еліпса F' оберемо таку точку L', яка не є симетричною до точки E' відносно центра у точці O' еліпса F'. Проведемо хорду $N'L'$. Через середину T' хорди $N'L'$ проведемо радіус $O'G'$. Паралельно до хорди $N'L'$ через точку G' проведемо пряму b_2'. Позначимо

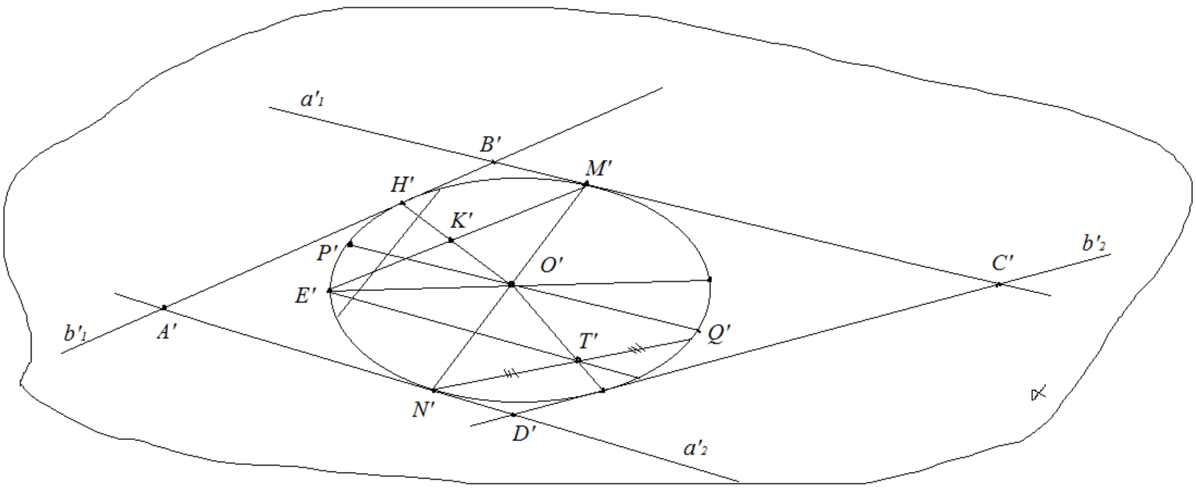


Рис.224

$A' = a_2' \cap b_1'$, $B' = a_1' \cap b_1'$, $C' = a_1' \cap b_2'$, $D' = a_2' \cap b_2'$.

Трапеція $A'B'C'D'$ є шуканою.

Задача 10.23. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h заданої довільної трапеції, описаної навколо кола F.

Розв'язання. За умови даної задачі задано коло F з центром у точці O разом з описаною навколо нього довільною (не прямокутною і не рівнобічною) трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$) і еліпс F' з центром у точці O' (рис. 202).

Проведемо у колі F паралельно до основ трапеції $ABCD$ діаметр PQ. Проведемо перпендикулярний до нього діаметр MN. Основа BC трапеції $ABCD$ дотикається кола F у точці M, основа AD – у точці N. Нехай бічна сторона AB даної трапеції дотикається кола F у точці H, бічна сторона CD даної трапеції дотикається кола F у точці T (рис. 202a). Проведемо $PK \perp AD$, $HG \perp AD$, $TE \perp AD$, $QL \perp AD$. Прямі HG і TE є січними до кола F. Нехай пряма HG перетинає коло F ще й у точці H_1, пряма TE – ще й у точці T_1. Нехай, як на рис. 202a, точка H_1 належить відрізку HG, точка T_1 – відрізку TE.

Побудуємо у еліпсі F' довільну пару спряджених діаметрів $M'N'$ і $P'Q'$. Згідно наслідку … теореми 8.3, можна вважати , що, якщо еліпс F' є зображенням кола F при паралельному проектуванні h, то $M' = f(M)$,

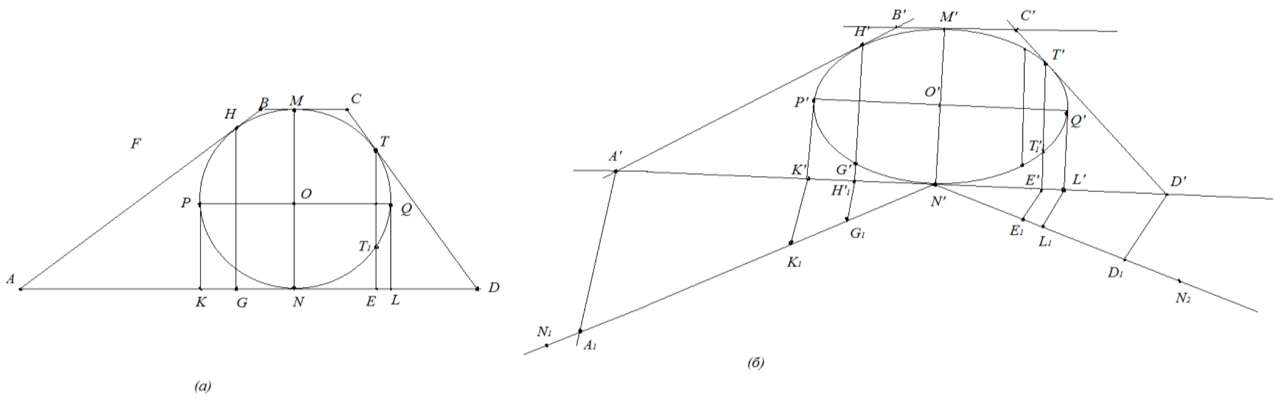


Рис.225

$N' = f(N)$, $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$. Паралельно до діаметра $P'Q'$ через точку M' проводимо пряму a_1', через точку N'– пряму a_2'. Пряма a_1' буде дотичною до еліпса F' у точці M', пряма a_2' буде дотичною до еліпса F' у точці N'.

Паралельно до діаметра $M'N'$ проведемо пряму $P'K'$ до перетину з прямою a_2' у точці K' і пряму $Q'L'$ до перетину з прямою a_1' у точці L'. $K' = f(K)$, $L' = f(L)$. Побудуємо довільний промінь $N'N_1$, який не лежить на прямій a_2' . Послідовно відкладемо на ньому відрізки $N'G_1 = NG$, $G_1K_1 = GK$, $K_1A_1 = KA$. Паралельно до прямої проведемо прямі G_1G' і A_1A' до перетину з прямою a_2' , відповідно, у точках G' і A'.

Згідно властивостей зображення фігур при паралельному проектуванні, $G' = f(G)$, $A' = f(A)$. Паралельно до діаметра $M'N'$ через точку G' проведемо пряму, яка перетне еліпс F' у двох точках: H_1' і H'. Нехай саме точка H_1' буде належати відрізку $G'H'$. Тоді $H_1' = f(H')$, $H' = f(H)$. Через точки A' і H' проведемо пряму b_1' до перетину з прямою a_1' у точці B'. $b_1' = f(AB)$, пряма b_1' буде дотичною до еліпса F' у точці H', $B' = f(B)$.

Проведемо довільний промінь $N'N_2$, який не лежить на прямій a_2' і не співпадає (для уникнення плутанини) з променем $N'N_1$. Послідовно відкладемо на промені $N'N_2$ відрізки $N'E_1 = NE$, $E_1L_1 = EL$, $L_1D_1 = LD$. Паралельно до прямої L_1L' проведемо прямі E_1E' і D_1D' до перетину з прямою a_2' , відповідно, у точках E' і D'. $E' = f(E)$, $D' = f(D)$. Паралельно до діаметра $M'N'$ проведемо пряму $E'T'$. Ця пряма буде січною для еліпса F' і перетне його у двох точках T_1' і T'. Нехай саме точка T_1' належить відрізку $E'T'$. Тоді $T' = f(T)$, $T_1' = f(T_1)$. Через точки D' і T' проведемо пряму b_2' до перетину з прямою a_1' у точці C'. $b_2' = f(CD)$, пряма b_2' буде дотичною до еліпса F' у точці T', $C' = f(C)$.

Тоді трапеція $A'B'C'D'$ є шуканим зображенням трапеції $ABCD$ при паралельному проектуванні f. Уникнути безпосереднього використання оригіналу при побудові такого зображення неможливо.

Аналіз розв'язків представлених у §10 задач дозволяє зробити висновок про те, що у більшості випадків розв'язання задач на побудову зображень описаних навколо кола $n-$кутників, $n \in N, n \geq 3$, загальна ідея знаходження шляхів розв'язання співпадає з тією, яку було сформульовано наприкінці §9 як результат аналізу задач на побудову зображень вписаних у коло $n-$кутників. Цей факт обумовлений дослідженим у теоремах 8.7 і 8.8 характером повноти зображень, що містять еліпс, про який відомо, що він є зображенням кола при певному паралельному проектуванні. Вони є доцільними для всіх зображень, що містять такий еліпс.

Питання і завдання для самоконтролю до §10

10.1: Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення довільного прямокутного трикутника, описаного навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.2. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення рівнобедреного прямокутного трикутника, описаного навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.3. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення квадрата, описаного навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.4. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення довільного ромба, описаного навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.5. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення довільного рівнобедреного трикутника, описаного навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.6. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення правильного трикутника, описаного навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10. 7. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення довільного трикутника, описаного навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10. 8. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення довільної прямокутної трапеції, описаної навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10. 9. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення довільної рівнобічної трапеції, описаної навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.10. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення довільної трапеції, описаної навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.11. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення трапеції, подібної до довільної даної, описаної навколо кола-оригінала? Відповідь обґрунтуйте.

10.12. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Які загальні пропозиції є доцільними щодо знаходження шляхів розв’язання задач на побудову зображень описаних многокутників при паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте

§ 9. Зображення вписаних многокутників при невиродженому паралельному проектуванні

Наведемо розв’язки певної кількості стандартних задач на побудову зображень n-кутників, $n \in N$, $n \geq 3$, вписаних у коло, при невиродженому паралельному проектуванні. У кожній із задач під відповідним n-кутником будемо розуміти n-кутник-каркас.

За умови кожної із запропонованих задач буде задано еліпс, про який відомо, що він є зображенням кола при певному паралельному проектуванні. При цьому завжди будемо вважати, що одночасно з еліпсом (і колом, як окремим випадком еліпса) задано і його центр (при наявності еліпса можливість побудови його центру за допомогою циркуля і лінійки була обґрунтована раніше).

Задача 9.1. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h довільного прямокутного трикутника, вписаного у коло-оригінал.*

Розв’язання. W За умови даної задачі задано лише еліпс F' з центром у точці O' на картинній площині α. Відомо, що він є зображенням кола F. Вписаний у коло трикутник є

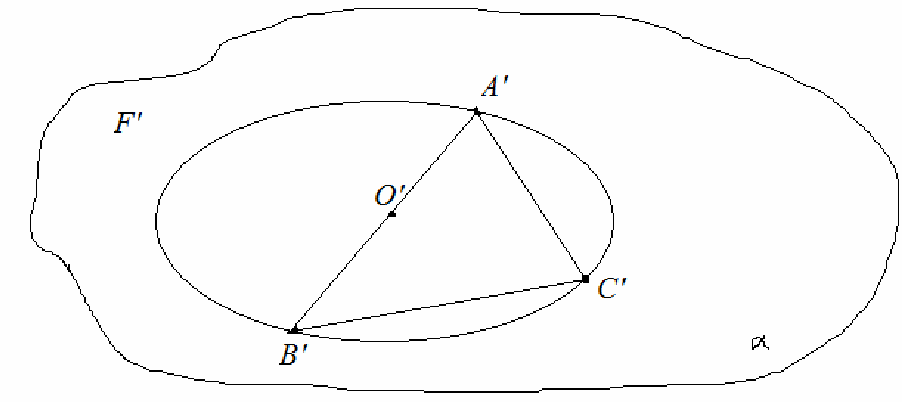


Рис.141

прямокутним тоді та тільки тоді, коли одна із його сторін цього трикутника (гіпотенуза) є діаметром даного кола. При паралельному проектуванні діаметр кола F зображується діаметром еліпса F'. Тому для побудови зображення довільного прямокутного трикутника, вписаного у коло F, достатньо побудувати довільний діаметр $A'B'$ еліпса F', за зображення вершини прямого кута обрати довільну точку еліпса, відмінну від точок A' і B'. Трикутник $A'B'C'$ є шуканим. (Рис.141) W

Задача 9.2. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h довільного прямокутника, вписаного у коло-оригінал.*

Розв'язання. W За умови даної задачі задано лише еліпс F' з центром у точці O' на картинній площині α (рис. 143). Відомо, що еліпс F' є зображенням кола F. Для того, щоб вписати у коло прямокутник, достатньо провести два довільних діаметра цього кола і послідовно з'єднати їх кінці. Так, на рис. 142 у колі F, розташованому на площині β, проведені діаметри MN і PQ. Чотирикутник $MPNQ$ є прямокутником, бо він має рівні діагоналі, які перетинаються у точці O і цією точкою перетину діляться навпіл. Якщо еліпс F' є зображенням кола F при паралельному проектуванні, то зображенням діаметрів кола F є діаметри еліпса F', кожний діаметр еліпса F' є зображенням певного діаметра кола (теорема 8.6, наслідки 1 і 6). Отже, для побудови зображення довільного прямокутника, вписаного у коло-оригінал, достатньо побудувати два довільних діаметра еліпса F' і послідовно з'єднати їх кінці.

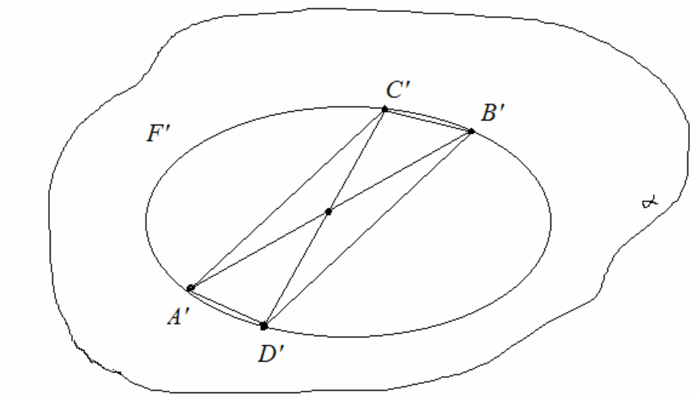


Рис. 142

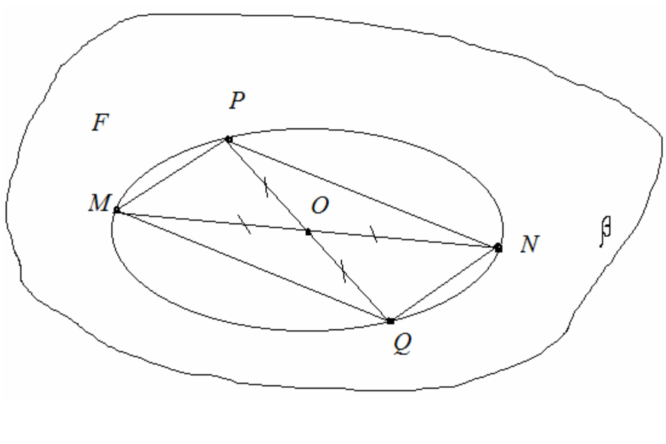


Рис. 143

Так, на рис. 143 побудовані діаметри $A'B'$ і $C'D'$, чотирикутник $A'B'C'D'$ є шуканим. Реально, він є паралелограмом, бо його діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. W

Задача 9.3. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F при певному паралельному проектуванні. Побудувати зображення рівнобедреного прямокутного трикутника, вписаного у коло-оригінал.*

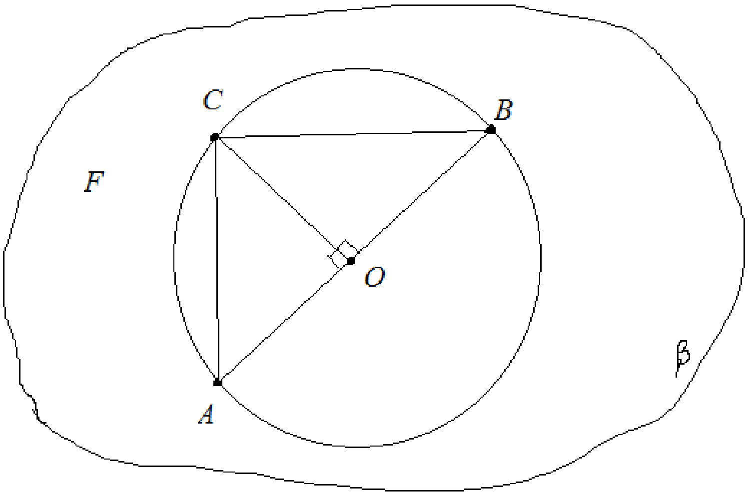


Рис. 144

Розв'язання. WСпочатку розглянемо довільне коло F з центром у точці O на площині β. Основою рівнобедреного прямокутного трикутника, вписаного у коло F є діаметр цього кола. Для того, щоб трикутник був рівнобедреним, як відомо, необхідно і достатньо, щоб медіана, проведена до його основи, одночасно, була і його висотою. Таким чином, для того, щоб вписати у коло рівнобедрений прямокутний трикутник, достатньо побудувати довільний діаметр AB (рис. 144) і провести радіус $CO \perp AB$, $\triangle ABC$ буде шуканим. Всі рівнобедрені прямокутні трикутники, вписані у одне й те ж коло, є рівними між собою. За теоремою 8.6, якщо еліпс F' є зображенням кола F при паралельному

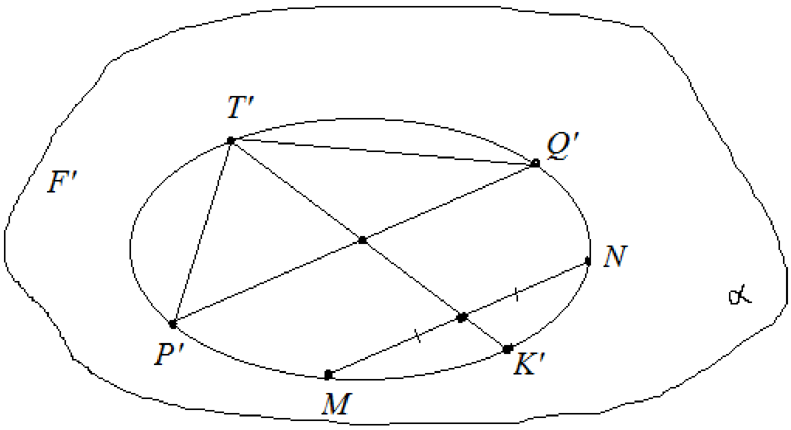


Рис. 145

проектуванні, то зображенням будь-якого діаметра кола F може бути довільний діаметр еліпса F', зображенням пари взаємно перпендикулярних діаметрів кола F – довільна пара спряджених діаметрів еліпса F'. Звідси випливає наступний шлях розв’язання поставленої задачі.

1. У даному еліпсі F' будуємо довільний діаметр $P'Q'$.

2. За допомогою хорди $M'N' \parallel P'Q'$ будуємо діаметр $T'K'$, спряджений до діаметра $P'Q'$.

3. Будуємо трикутник $P'T'Q'$, який є шуканим зображенням рівнобедреного прямокутного трикутника, вписаного у коло-оригінал (рис. 145). Зауважимо, що наведене розв’язання задачі 9.3 передбачає виконання необхідних побудов лише на картинній площині α, не передбачає виконання жодних побудов на площині оригіналу.

Задача 9.4. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F при певному паралельному проектуванні h. Задано також прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$). Побудуйте зображення при проектуванні h прямокутного трикутника, подібного до заданого, вписаного у коло-оригінал.*

Розв’язання. W Розглянемо заданий прямокутний $\triangle ABC$. Проведемо у ньому висоту CH до гіпотенузи ($CH \perp AB$) (рис. 146). У заданому еліпсі F' побудуємо довільний діаметр $A'B'$ і, за допомогою хорди $MN \parallel A'B'$, спряджений до

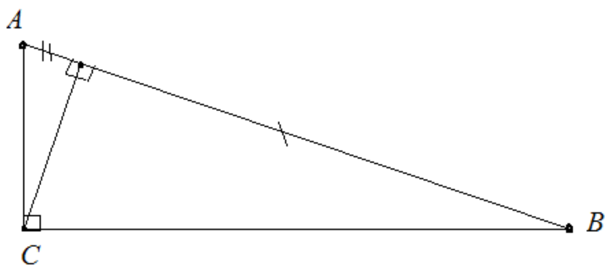


Рис. 146

нього діаметр PQ (рис. 147). Проведемо довільний промінь з початком у точці B'. Послідовно відкладемо на ньому відрізки $B'H_1 = BH$ і $H_1A_1 = HA$. Проведемо пряму $H_1H' \parallel A_1A'$ до перетину з діаметром $A'B'$ у точці H'. За теоремою Фалеса, $B'H' : H'A' = B'H_1 : H_1A_1 = BH : HA$. Проведемо півхорду

$H'C' \parallel PQ$. Трикутник $A'B'C'$ буде шуканим. Дійсно, $\triangle A'B'C'$ вписано у еліпс F'. Отже, оригінал цього трикутника при зображенні за допомогою паралельного проектування h вписано у коло F. Сторона $A'B'$ трикутника ABC є діаметром еліпса F'. Значить, відповідна сторона трикутника-оригінала є діаметром кола F, трикутник-оригінал є прямокутним. Діаметр PQ еліпса F' є спряженим до діаметра $A'B'$. Отже, оригінали діаметрів PQ і $A'B'$ є взаємно перпендикулярними діаметрами кола F.

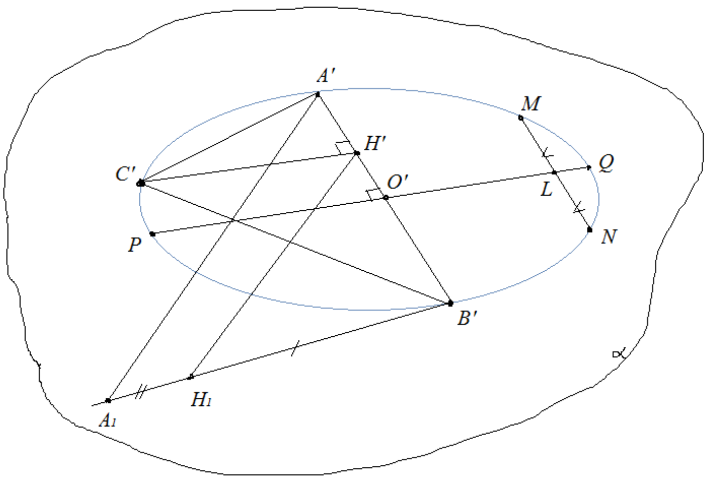


Рис. 147

Відрізок $C'H'$ є паралельним до діаметра PQ. Це означає, що оригінал цього відрізка є висотою трикутника-оригінала, проведеною до його гіпотенузи. При невиродженому паралельному проектуванні зберігається відношення довжин відрізків, які лежать на одній прямій (теорема 3.9). Це означає, що у трикутнику-оригіналі основа висоти, проведеної до гіпотенузи, ділить гіпотенузу у відношенні $BH : HA$, тобто у такому самому відношенні, як і у трикутнику ABC. За відомою теоремою шкільного курсу геометрії, у прямокутному трикутнику ABC, $AC^2 = AH \cdot AB$, $BC^2 = BH \cdot AB$, $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BH}{AH}$, $\frac{BC}{AC} = \sqrt{\frac{BH}{AH}}$. Аналогічні міркування для трикутника-оригінала дозволять зробити висновок про те, що катети цього трикутника також відносяться як $\sqrt{\frac{BH}{AH}}$. Отже, трикутник-оригінал є подібним до трикутника ABC, трикутник $A'B'C'$ дійсно є шуканим. W

Наведене розв’язання задачі 9.4 не є єдиним можливим. Але, здається, воно є одним з найбільш раціональних. Розв’язання вважається тим більш раціональним, чим меншу кількість разів під час його реалізації доводиться використовувати оригінал чи фігуру, подібну до оригіналу. Найраціональнішим вважається таке розв’язання, реалізація якого взагалі не потребує використання оригіналу. У той же час розв’язання задачі 9.4 вимагає обов’язкового використання оригіналу, тому що заданий прямокутний трикутник ABC є довільним.

Задача 9.5. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h прямокутного трикутника, у якого висота, проведена до гіпотенузи, ділить гіпотенузу у відношенні 3:4, вписаного в коло-оригінал.*

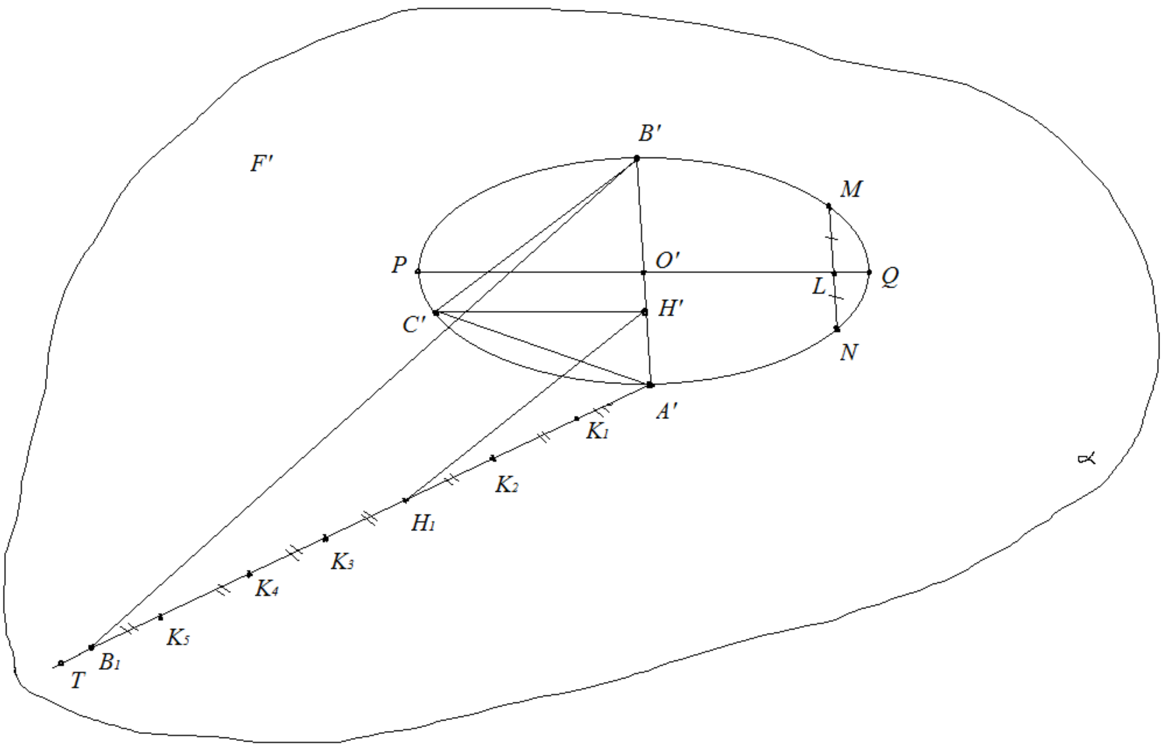


Рис. 148

Розв’язання. W Зрозуміло, що для розв’язання задачі 9.5 можна застосувати ту ж саму схему, що й для розв’язання задачі 9.4. Очевидно (було, фактично, доведено при розв’язання задачі 9.4), що всі прямокутні трикутники, у яких висота, проведена до гіпотенузи, ділить гіпотенузу у відношенні 3:4, є подібними між собою. Отже, будь-який з таких трикутників можна прийняти за трикутник-оригінал.

Але можна запропонувати таке розв’язання даної задачі, для якого використання оригіналу не є потрібним. У цьому випадку точку   на діаметрі треба просто побудувати як точку, що ділить діаметр   у відношенні 3:4. Такі побудови стандартним чином виконуються за допомогою теореми Фалеса. Безпосередньо, запропонований спосіб розв’язання продемонстровано на рис. 148. Нижче описані послідовні кроки виконаних побудов.

1. Для заданого еліпса F' з центром у точці O' будуємо довільний діаметр $A'B'$.

2. За допомогою допоміжної хорди $MN \parallel A'B'$ будуємо спряджений до діаметра $A'B'$ діаметр PQ.

3. Проводимо довільний промінь $A'T$, який не належить прямій $A'B'$.

4. На промені $A'T$, від його початку, послідовно відкладаємо сім довільних, рівних між собою, відрізків: $A'K_1 = K_1K_2 = K_2H_1 = H_1K_3 = K_3K_4 = = K_4K_5 = K_5B_1$. $A'H_1 : H_1B_1 = 3:4$.

5. Будуємо пряму B_1B'.

6. Проводимо пряму $H_1H' \parallel B_1B'$ до перетину з відрізком $A'B'$ у точці H'.

7. Паралельно до діаметра проводимо півхорду $H'C'$ еліпса F'.

8. Трикутник $A'B'C'$ є шуканим. W

Задача 9.6. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h прямокутного трикутника, катети якого відносяться як 2:3, вписаного у коло-оригінал.*

Розв’язання. W За умови даної задачі задано лише еліпс F' з центром у точці O'. Відомо, що всі прямокутні трикутники з однаковим відношенням катетів, як і всі кола, є подібними між собою. Отже, можна розглянути довільний прямокутний трикутник, катети якого відносяться як 2:3, описати

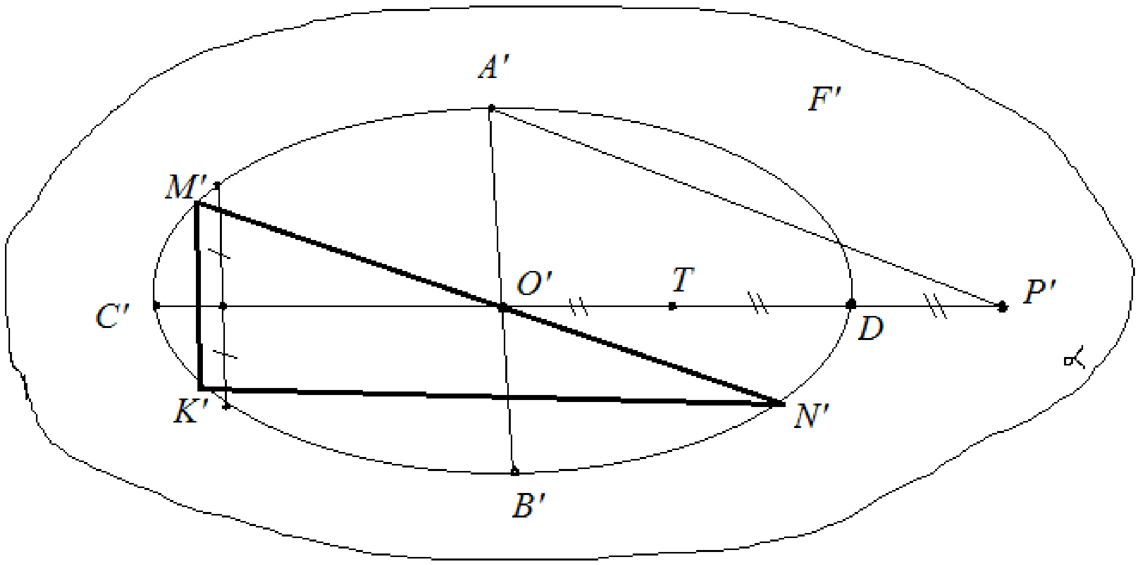


Рис. 149

навколо нього коло і прийняти отриману фігуру за оригінал. Можна, навіть, не описувати коло, а просто провести висоту до гіпотенузи. Далі задачу можна розв’язувати за допомогою теореми Фалеса за зразком розв’язання задачі 9.4.

Задачу можна розв’язати і за зразком розв’язання задачі 9.5, якщо використати той, доведений при розв’язанні задачі 9.4, факт, що у прямокутному трикутнику основа висоти, проведеної до гіпотенузи, ділить гіпотенузу у відношенні, що дорівнює відношенню квадратів відповідних катетів цього прямокутного трикутника. У випадку даної задачі відношення складатиме 4:9.

Але цікавим є інший шлях розв’язання сформульованої задачі.

1. У заданому еліпсі F' побудуємо пару спряджених діаметрів $A'B'$ і $C'D'$.

2. Поділимо радіус $O'D'$ навпіл ($O'T = TD'$), на промені, доповняльному до променя $D'O'$, відкладемо відрізок $D'P' = O'T$.

3. Розглянемо трикутник $A'O'P'$. Оскільки відрізки $O'A'$ і $O'P'$ належать прямим, що містять спряджені діаметри даного еліпса, оригінали AO і OP цих відрізків при зображенні за допомогою паралельного проектування h є взаємно перпендикулярними, оригіналом для трикутника $A'O'P'$ є прямокутний трикутник AOP з катетами AO і OP. Відрізок $O'A'$ є радіусом еліпса F', отже, оригінал OA цього відрізка є радіусом кола F, $OA = R$, де $R-$ довжина радіуса кола F. Відрізок $O'P'$ містить радіус $O'D'$ еліпса F', $O'P' = \frac{3}{2}O'D'$. Значить, оригінал OP цього відрізка містить радіус OD кола F, $OP = \frac{3}{2}OD$, $OP = \frac{3}{2}R$. Але тоді, для прямокутного трикутника AOP, $AO : OP = R : \frac{3}{2}R = 2:3$.

4. Проведемо у еліпса F' діаметр $M'N' \parallel A'P'$. Паралельно до діаметра $A'B'$ проведемо хорду $M'K'$. Побудуємо хорду $K'N'$.

5. Трикутник $M'N'K'$ є шуканим.

Дійсно, оригіналом цього трикутника є трикутник MNK, вписаний у коло F. Оригінал MN відрізка $M'N'$ є діаметром кола F. Отже, трикутник MNK є прямокутним трикутником з катетами MK і KN.

За побудовою, відрізки $A'B'$ і $C'D'$ є спрядженими діаметрами еліпса F'. Значить, їх оригінали AB і CD є взаємно перпендикулярними діаметрами кола F. За побудовою, $M'N' \parallel A'B'$. Це означає, що для кола-оригінала F $MN \parallel AB$. Але тоді $KN \parallel CD$ бо $\angle MKN = 90°$, а $CD \perp AB$. Це означає, що для еліпса F' $K'N' \parallel C'D'$. Отже, сторони трикутників $M'N'K'$ і $A'O'P'$ є попарно паралельними. За відомою теоремою елементарної геометрії звідси випливає, що ці трикутники є подібними, їх відповідні сторони є пропорційними: $\frac{M'N'}{A'P'} = \frac{M'K'}{A'O'} = \frac{K'N'}{O'P'}$.

Оскільки при невиродженому паралельному проектуванні зберігається відношення відрізків, що належать паралельним прямим, то $\dfrac{MK}{AB}=\dfrac{M'K'}{A'B'}$; $\dfrac{KN}{CD}=\dfrac{K'N'}{C'D'}$. Але із подібності трикутників $M'N'K'$ і $A'P'O'$ випливає, що $\dfrac{M'K'}{K'N'}=\dfrac{A'O'}{O'P'}$. Отже, $\dfrac{MK}{KN}=\dfrac{A'O'\cdot C'D'}{A'B'\cdot O'P'}=\dfrac{A'O'\cdot 2O'D'}{2A'O'\cdot\dfrac{3}{2}O'D'}=\dfrac{2}{3}$. W

Задача 9.7. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h прямокутного трикутника з кутом у $30°$, вписаного у коло-оригінал.*

Розв'язання. W За умови даної задачі задано лише еліпс F' з центром у точці O'. Але відомо, що всі прямокутні трикутники з гострим кутом у $30°$ є подібними між собою. Отже, можна прийняти за оригінал довільний з них і розв'язати задачу 9.7 за зразком розв'язка задачі 9.4. Такий шлях розв'язання передбачає використання оригіналу у явному вигляді (тому потрібна точна, а не схематична його побудова) і застосування теореми Фалеса.

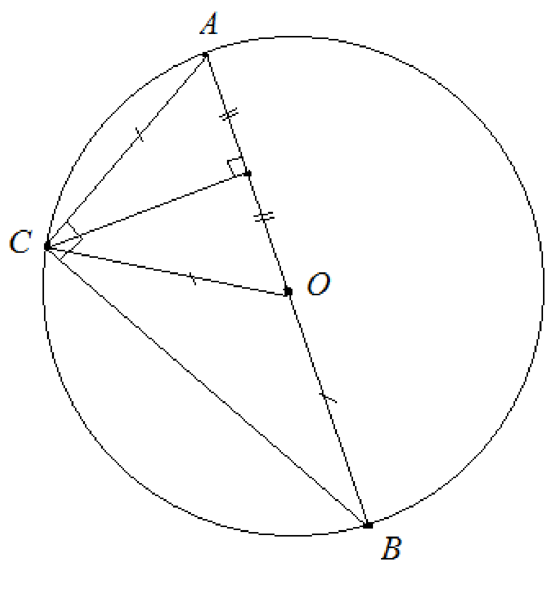


Рис. 150

Але для даної задачі можливим є й інший спосіб розв'язання, який не передбачає явного використання трикутника-оригінала. Для знаходження подібного способу доцільним є наступне відповідне дослідження оригіналу.

Розглянемо прямокутний трикутник ABC з катетами AC і BC, у якого $\angle ABC = 30°$ (рис. 150). Відомо, що тоді катет AC (який є протилежним до $\angle ABC$) дорівнює половині гіпотенузи AB. Опишемо навколо трикутника ABC коло F. Як відомо, його центр O знаходиться посередині гіпотенузи AB: $AO = BO = CO$. Але тоді $AO = CO = AC$, трикутник AOC є рівностороннім, його висота CH ділить його сторону AO навпіл: $AH = HO$. Звідси випливає наступна відповідь на питання, як у коло вписати прямокутний трикутник з гострим кутом у $30°$. У колі з центром у точці O треба побудувати довільний діаметр AB. Радіус AO треба поділити навпіл, припустимо, точкою H: $AH = HO$. Далі треба провести півхорду $CH \perp AB$ і розглянути трикутник ABC. У цьому трикутнику $\angle ACB = 90°$ тому, що цей кут є кутом, вписаним у дане коло, який спирається діаметр. Трикутник ACO є рівнобедреним з основою AO тому, що, за побудовою, його висота CH одночасно є і його медіаною. Отже, $AC = CO$. Але $CO = AO = BO$, бо точка O є центром кола, описаного навколо трикутника ABC. Тому $AC = \frac{1}{2}AB$. За відомою теоремою шкільного курсу геометрії звідси випливає, що $\angle ABC = 30°$ (рис.151).

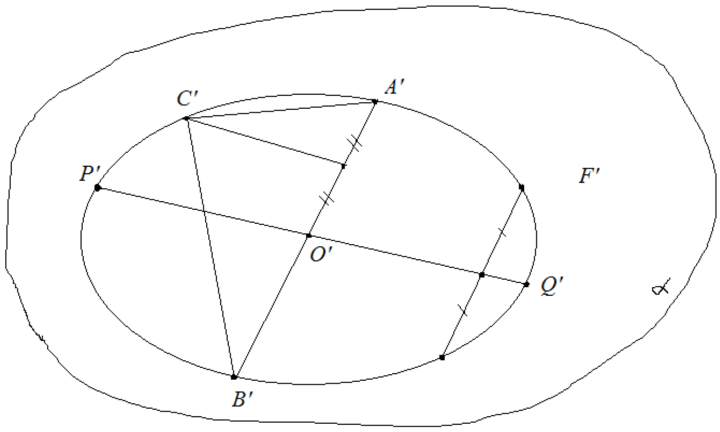


Рис. 151

Властивості паралельного проектування дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса і таким чином розв'язати поставлену задачу 9.7 (рис. 151).

1. У заданому на картинній площині α еліпсі F' будуємо довільний діаметр $A'B'$.

2. За допомогою допоміжної хорди будуємо спряджений діаметр $P'Q'$.

3. Знаходимо середину H' радіуса $O'A'$.

4. Будуємо півхорду $H'C' \parallel P'Q'$.

5. Будуємо сторони $A'C'$ і $C'B'$ трикутника $A'B'C'$, який є шуканим.

Обґрунтування вірності таких побудов є очевидним. W

Задача 9.8. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h довільного рівнобедреного трикутника, вписаного у коло-оригінал.*

Розв'язання. W Оскільки серединний перпендикуляр, проведений до основи рівнобедреного трикутника, містить висоту, проведену до основи цього трикутника, центр кола, описаного навколо даного трикутника, лежить на прямій, яка містить висоту даного трикутника, проведену до його основи. Звідси випливає наступний легкий спосіб побудови рівнобедреного трикутника, вписаного у коло:

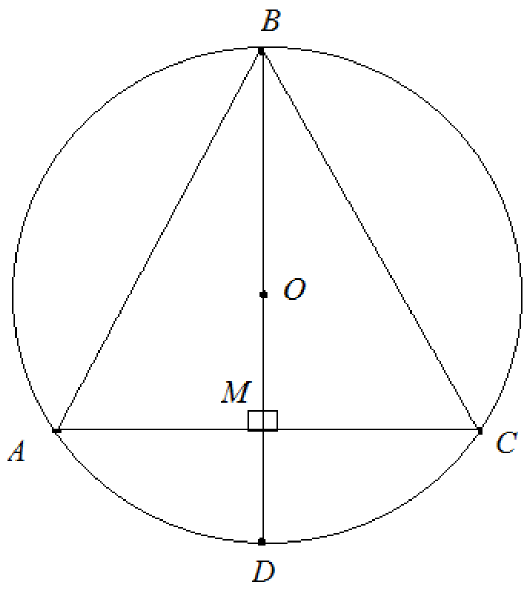


Рис. 152

1. Побудувати довільний діаметр BD даного кола (рис. 152).

2. На діаметрі BD обрати довільну точку M (відмінну, зрозуміло, від точок B і D).

3. Через обрану точку M провести хорду $AC \perp BD$.

4. Трикутник ABC є вписаним у дане коло.

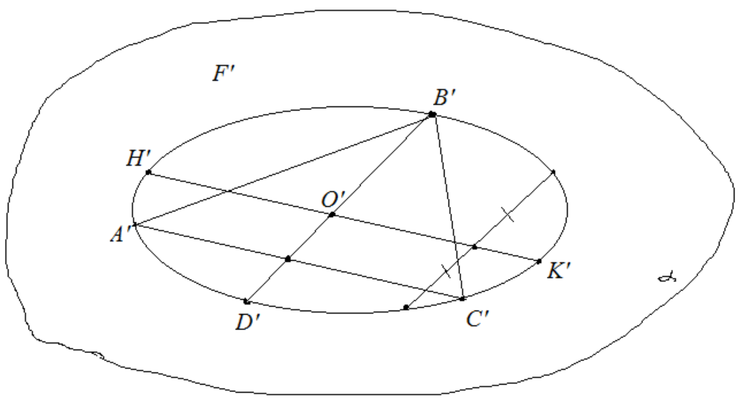


Рис. 153

Відомо, що діаметр кола,

перпендикулярний до хорди даного кола, ділить цю хорду навпіл. Отже, у трикутнику ABC відрізок BM одночасно є медіаною і висотою. Значить, трикутник ABC є рівнобедреним трикутником з основою AC. Форма цього рівнобедреного трикутника залежить від положення точки M на діаметрі BD.

При паралельному проектуванні, згідно наслідку 1 з теореми 8.6, якщо еліпс F' є зображенням кола F, то зображенням кожного діаметра PQ кола F є діаметр $P'Q'$ еліпса F', зображенням хорди кола F, перпендикулярної до діаметра PQ, хорда еліпса F', паралельна до діаметра еліпса, спрядженого до його діаметра $P'Q'$. Звідси випливає справедливість наступного розв'язання задачі 9.8.

1. У даному еліпсі F' будуємо довільний діаметр $B'D'$ (рис. 153).

2. За допомогою допоміжної хорди будуємо спряджений до діаметра $B'D'$ діаметр $H'K'$.

3. На діаметрі $B'D'$ обираємо довільну внутрішню точку M'.

4. Через точку M' паралельно до діаметра $H'K'$ проводимо хорду $A'C'$ еліпса F'.

5. Трикутник $A'B'C'$ є шуканим.

Дійсно, трикутник $A'B'C'$ є вписаним у еліпс F'. Якщо еліпс F' є зображенням кола F при певному паралельному проектуванні h, то оригіналом для трикутника $A'B'C'$ є трикутник ABC, вписаний у коло F. За побудовою, сторона $A'C'$ трикутника $A'B'C'$ є паралельною до діаметра $H'K'$, спрядженого до діаметра $B'D'$, який містить відрізок BM. Це означає, що подібна паралельність має місце і для кола-оригінала. Але для кола-оригінала це означає , що сторона AC трикутника ABC є перпендикулярною до відрізка BM (який є оригіналом для відрізка $B'M'$), відрізок BM є висотою трикутника ABC, проведеною до сторони AC.

Для еліпса F' відрізки $A'M'$ і $M'C'$ є рівними, тому що кожний діаметр еліпса ділить навпіл всі хорди, паралельні до спрядженого до нього діаметра, відрізок $B'M'$ є медіаною трикутника $A'B'C'$. Звідси випливає, що відрізок BM є медіаною трикутника ABC. Отже, у трикутнику ABC висота, проведена до сторони AC, одночасно є і медіаною цього трикутника. Звідси випливає, що трикутник ABC є рівнобедреним ($AB = BC$), тобто, дійсно є шуканим. W

Задача 9.9. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h рівнобедреного трикутника, подібного до довільного даного, вписаного у коло-оригінал.*

Розв'язання. W За умовами задачі 9.9 задано еліпс F' з центром у точці

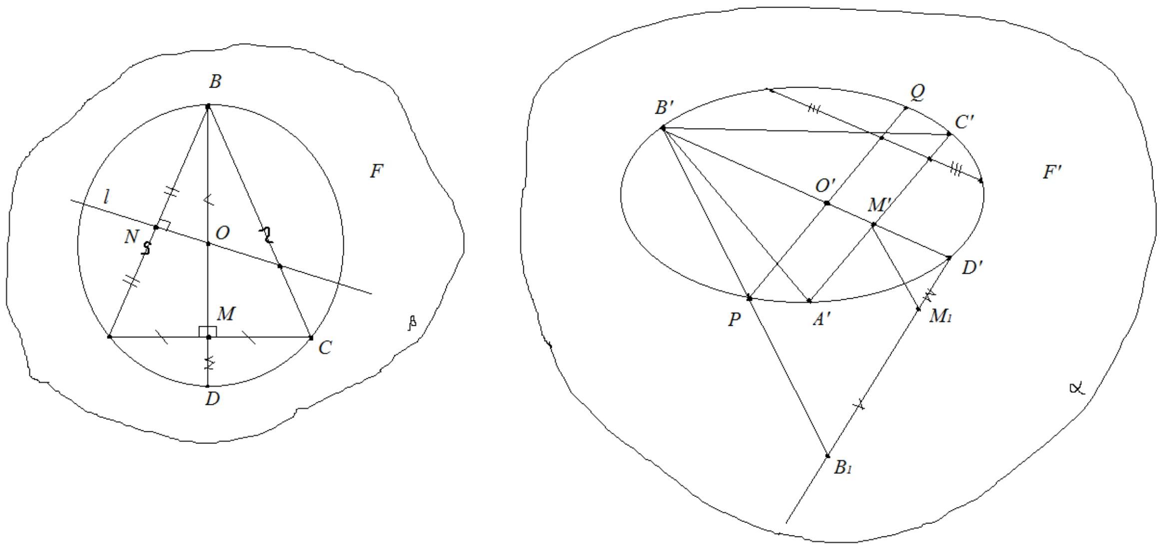


Рис. 154

O' і трикутник ABC, у якого $AB = BC$ (рис. 154). Як відомо, центр O кола, описаного навколо трикутника ABC, є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін даного трикутника. Оскільки $AB = BC$, серединний перпендикуляр до сторони AC містить медіану BM даного трикутника. Нехай точка N є серединою сторони AB. Проведемо через цю точку пряму l, перпендикулярну до прямої AB. Точка O є точкою перетину прямих l і BM. Коло з центром у точці O радіусу OB є колом, описаним навколо ABC.

Нехай відрізок BD є діаметром даного кола. Оскільки всі кола є подібними між собою, побудоване коло з центром у точці O можна прийняти за оригінал F зображення F'. Заданий рівнобедрений трикутник ABC є вписаним у коло F. Треба побудувати зображення цього трикутника на картинній площині α. Проведемо довільний діаметр $B'D'$ еліпса F'. Згідно наслідку 5 теореми 8.6, діаметр $B'D'$ можна вважати зображенням діаметра BD кола F. За допомогою теореми Фалеса побудуємо на діаметрі $B'D'$ зображення M' точки M діаметра BD ($\frac{D'M'}{M'B'} = \frac{DM}{MB}$). Через точку M' проведемо хорду $A'C'$, паралельну до діаметра PQ, спрядженого до діаметра $B'D'$. Трикутник $A'B'C'$ є шуканим.(рис. 154б)

Дійсно, згідно теореми 8.6, оригіналом діаметра PQ еліпса F' є діаметр кола F, перпендикулярний до діаметра BD. Хорда $A'C'$ еліпса проходить через точку M' і є паралельною до діаметра PQ. Отже, оригіналом цієї хорди еліпса F' є хорда кола F, яка проходить через точку M перпендикулярно до діаметра BD. А такою хордою є хорда AC.

Оскільки конкретна форма заданого рівнобедреного трикутника є невідомою, використання оригіналу для розв'язання даної задачі є неминучим.

Задача 9.10. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h правильного трикутника, вписаного у коло-оригінал.*

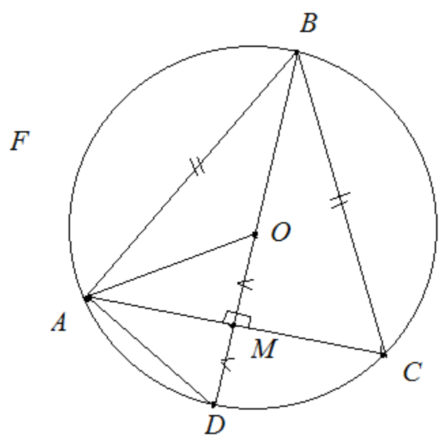


Рис. 155

Розв'язання. Всі правильні трикутники є подібними між собою (за третьою ознакою подібності трикутників, відношення довжин їх сторін є постійним – 1:1:1). Отже, будь-який з них можна прийняти за оригінал шуканого зображення, описати навколо такого трикутника коло і проводити подальше розв’язання даної задачі таким саме чином, як було розв’язано попередню задачу 9.9.

Але існує достатньо простий спосіб побудови вписаного у коло правильного трикутника. Цей спосіб заслуговує особливої уваги, тому що його аналог є придатним для проведення відповідних побудов на еліпсі без будь-якого використання оригіналу.

У колі F з центром у точці O побудуємо довільний діаметр BD. Через середину M радіуса OD проведемо хорду $AC \perp OD$. Трикутник ABC є шуканим. Дійсно, відрізок BM одночасно є висотою і медіаною цього трикутника, проведеною до сторони AC, бо у колі радіус, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл. Тому трикутник ABC є рівнобедреним, $AB = BC$. Відрізок BM є також і бісектрисою цього трикутника, $\angle ABM = \angle MBC$.

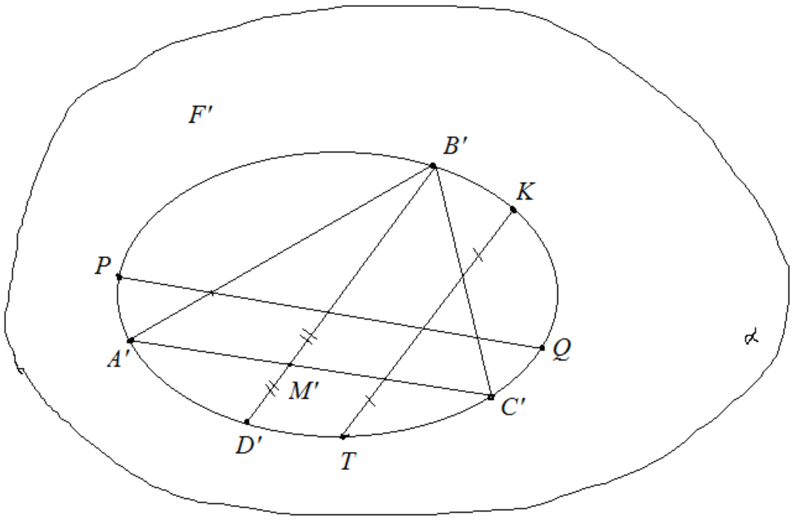


Рис. 156

З іншого боку, $\triangle OAD$ також є рівнобедреним ($OA = OD$), бо відрізок AM одночасно, за побудовою, є медіаною і висотою цього трикутника. Але $OA = AD$ як радіуси одного кола. Тому трикутник OAD рівностороннім, всі його кути, у тому числі і $\angle AOD$ дорівнюють $60°$. Але $\angle AOD$ є центральним кутом даного кола, що спирається на дугу AD. $\angle AOD$, він же $\angle ABM$, є кутом, вписаним у дане коло, який спирається на ту ж саму дугу. Тому $\angle ABM = \frac{1}{2}\angle AOD = 30°$. Але тоді $\angle ABC = 2\angle ABM = 60°$, у рівнобедреному трикутнику ABC один з кутів дорівнює $60°$. Звідси випливає, що всі інші кути цього трикутника також дорівнюють $60°$, трикутник ABC є правильним.

Згідно теореми 8.6 і її наслідку 5, еліпс F' з центром у точці O' можна вважати зображенням кола F, довільний діаметр $B'D'$ цього еліпса – зображенням діаметра BD кола F. Тоді зображенням точки M буде точка M', що є серединою радіуса $O'D'$, зображенням хорди AD кола F – хорда $A'C'$ еліпса F', яка проходить через точку M' паралельно до діаметра PQ еліпса F', спрядженого до його діаметра $B'D'$ (на рис. 156 діаметр PQ побудовано за допомогою хорди KT, паралельної до діаметра $B'D'$). Отже, трикутник $A'B'C'$, вписаний у еліпс F', є зображенням правильного трикутника ABC, вписаного у коло F.

Зрозуміло, що всі вищевказані побудови на картинній площині α не вимагають проведення жодних реальних побудов у колі F.

Задача 9.11. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h правильного шестикутника, вписаного у коло-оригінал.*

Розв’язання. W Задачу можна розв’язати багатьма різними способами. Але найбільш цікавим здається спосіб, ідея якого підказана задачею 9.10. З’ясуємо, спочатку, як можна правильний шестикутник вписати у коло (Зрозуміло, загальновідомим є той факт, що сторона вписаного у коло правильного шестикутника дорівнює радіусу цього кола. Звідси випливає легкий традиційний шлях розв’язання поставленої задачі. Але

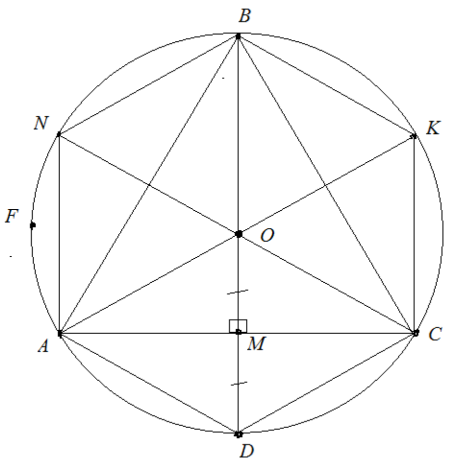


Рис. 157

подібний спосіб розв’язання важко перенести на еліпс вже тому, що побудова еліпса за допомогою циркуля і лінійки є неможливою).

Проведемо у колі F довільний діаметр BD (рис. 157). Через середину M радіуса OD перпендикулярно до радіуса OD проведемо хорду AC. Проведемо діаметри AK і CN кола F. Шестикутник $ANBKCD$ є правильним шестикутником, вписаним у коло F (доведіть самостійно). Аналогічні побудови неважко виконати і для еліпса F' (рис. 158).

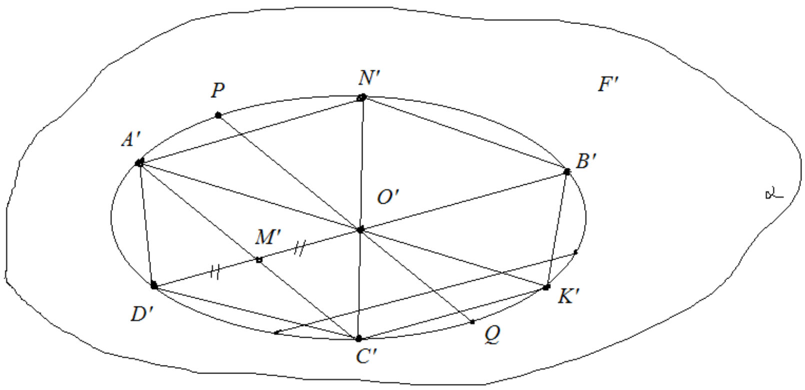


Рис. 158

1. Будуємо довільний діаметр $B'D'$ і спряжений до нього діаметр PQ.

2. Через середину M' радіуса $O'D'$ проводимо хорду $A'C' \parallel PQ$.

3. Шестикутник $A'N'B'K'C'D'$ є шуканим (обґрунтуйте самостійно). W

Задача 9.12. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h рівнобедреного трикутника з кутом при вершині у $120°$, вписаного у коло-оригінал.*

Розв’язання. W Всі рівнобедрені трикутники з однаковими кутами при вершинах є подібними між собою. Отже, можна розглянути довільний рівнобедрений трикутник з кутом при вершині у $120°$, описати навколо нього коло і

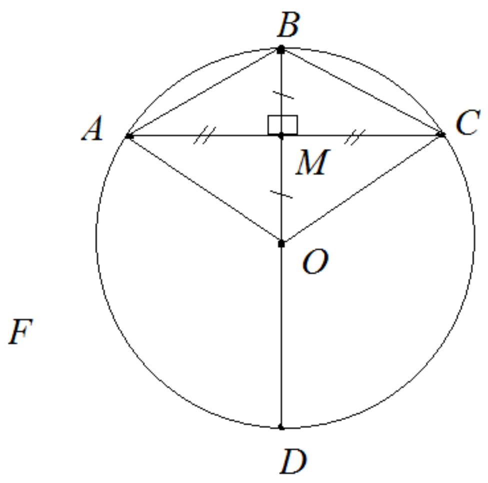


Рис. 159

далі розв’язувати сформульовану задачу за зразком задачі 9.9. Але найбільш цікавим є спосіб, який не вимагає явного використання оригіналу.

Розглянемо коло F. Проведемо у ньому довільний діаметр BD (рис. 159). Через середину M радіусу OB проведемо хорду AC. Трикутник ABC є рівнобедреним трикутником, вписаним у коло F, $\angle ABC = 120°$. Дійсно, будь-який радіус кола ділить перпендикулярну до нього хорду навпіл. Тому $AM = MC$, відрізок BM у $\triangle ABC$ одночасно є медіаною і висотою. Саме тому $\triangle ABC$ є рівнобедреним, $AB = BC$. Чотирикутник $ABCO$ є паралелограмом, тому що його діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Але він до того ж є ромбом, тому що його діагоналі за побудовою перетинаються під прямим кутом. Отже, $OA = AB = BC = OC$. Але $OA = OB = OC$ як радіуси одного кола. Тому $\triangle OAB$ і $\triangle OCB$ є правильними, кожний з їх кутів складає $60°$, $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = 60° + 60° = 120°$.

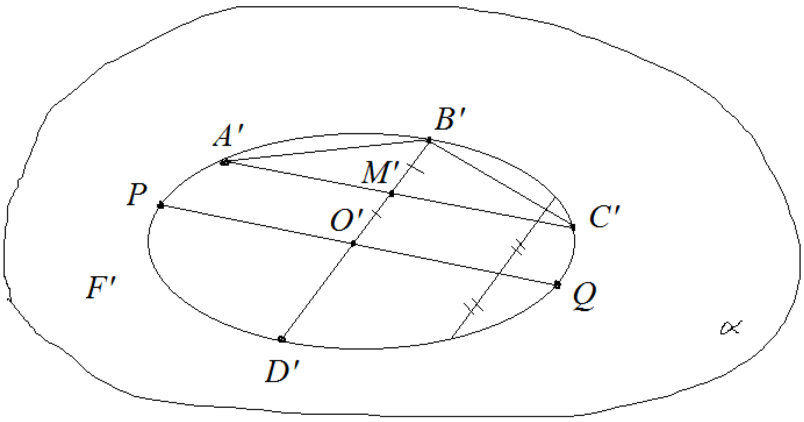


Рис. 160

Зображення трикутника ABC легко побудувати на еліпсі F' за допомогою наступних аналогічних побудов (рис. 160).

1. Будуємо довільний діаметр $B'D'$ еліпса F'. За теоремою 8.6 його можна вважати зображенням діаметра BD кола F при певному паралельному проектуванні.

2. За допомогою допоміжної хорди будуємо діаметр PQ, двоїстий до діаметра $B'D'$.

3. Через середину M' радіусу $O'B'$ проведемо хорду $A'C'$, паралельну до діаметра PQ. Оскільки діаметр PQ є зображенням діаметра кола F,

перпендикулярного до діаметра BD, хорда $A'C'$ є зображенням хорди AC, перпендикулярної до радіуса OB у його середині M.

4. Трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника ABC. Задачу розв'язано без застосування будь-яких явних вимірювань або побудов на оригіналі. W

Задача 9.13. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h рівнобедреного трикутника з кутом при вершині у* $135°$*, вписаного у коло-оригінал.*

Розв'язання. W Знову-таки спробуємо знайти спосіб, який явним чином не вимагає використання оригіналу. Розглянемо довільне коло F з центром у точці O. Проведемо у ньому довільний діаметр BD і радіус $OP \perp BD$ (рис.161). Нехай точка Q ділить хорду BP навпіл ($BQ = QP$). Проведемо через точку Q радіус OC. Відрізок OQ є медіаною, проведеною до основи BP рівнобедреного трикутника BOP. Отже, він є висотою і бісектрисою цього трикутника: $OQ \perp BP$, $\angle BOQ = \angle QOP$. Але $\angle BOP = 90°$. Тому $\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle BOP) = 45°$.

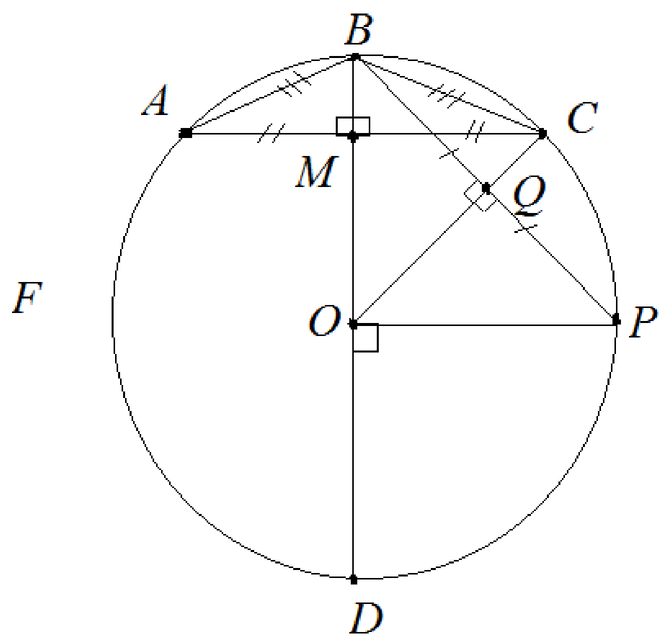


Рис. 161

Проведемо у колі F хорду CA перпендикулярну до радіусу OB. Трикутник ABC є рівнобедреним трикутником, вписаним у коло F, у якого $\angle ABC = 135°$. Дійсно, радіус OB є перпендикулярним до хорди AC. Тому $AM = MC$, відрізок BM є висотою і, одночасно, медіаною трикутника ABC, трикутник ABC є рівнобедреним, $AB = BC$. Кут BAC є кутом, вписаним у коло F, який спирається на ту ж саму дугу BC, на яку спирається центральний кут BOC цього кола. Отже, $\angle BAC = \frac{1}{2}(\angle BOC) = \ = \frac{1}{2} \cdot 45°$. У трикутнику ABC $\angle ABC = 180° - 2(\angle BAC) = 180° - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45° = \ = 135°$.

Зображення трикутника ABC можна побудувати на еліпсі F' за допомогою наступних аналогічних побудов (рис. 162).

1. Проведемо у еліпсі F' довільний діаметр $B'D'$. Згідно теореми 8.6, його можна вважати зображенням діаметра BD кола F при певному паралельному проектуванні.

2. За допомогою допоміжної хорди побудуємо діаметр $T'P'$, двоїстий до діаметра $B'D'$. Оскільки при паралельному проектуванні спряджені діаметри еліпса зображують взаємно перпендикулярні діаметри кола, радіус $O'P'$ можна вважати зображенням радіуса OP при проектуванні.

3. Хорда $B'P'$ є зображенням хорди BP, середина Q' хорди $B'P'$ – зображенням середини Q хорди BP при проектуванні.

4. Радіус OC кола F проходить через точку Q. Отже, його зображенням є радіус $O'C'$ еліпса F', який проходить через точку Q'.

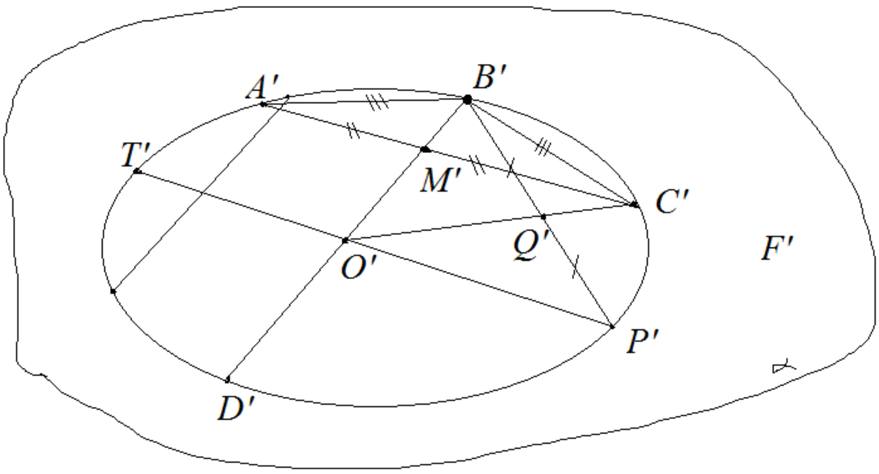


Рис. 162

5. Проведемо у еліпсі F' хорду $C'A'$ паралельну до діаметра $P'T'$. У колі F хорда CA є паралельною до радіуса OP, зображенням якого є радіус $P'O'$, що належить діаметру $P'T'$.

При невиродженому паралельному проектуванні паралельні відрізки зображуються паралельними, хорди зображуються хордами. Тому хорда

$A'C'$ є зображенням хорди AC, трикутник $A'B'C'$ – зображенням трикутника ABC, трикутник $A'B'C'$ є шуканим. Запропоновані побудови не вимагають явного використання оригіналу.

Задача 9.14. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$ є зображеннями деякого кола F з центром у точці O і вписаного у це коло трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f. Як результат відповідного відображення f при цьому $A' = f(A),\ B' = f(B),\ C' = f(C)$. Побудуйте зображення при даному проектуванні, вписаного у коло F рівнобедреного трикутника, кут при вершині якого складає половину кута ABC.*

Розв'язання. W Згідно теореми 8.8, задане умовою даної задачі зображення дозволяє відновити оригінал з точністю до перетворення подібності. Після цього можна виконати всі необхідні побудови на площині оригіналу і вже потім, за допомогою теореми Фалеса перенести їх на площину зображень.

Але такий спосіб розв'язання запропонованої задачі важко визнати раціональним. Задачу можна розв'язати взагалі без побудови оригіналу.

Дійсно, за умови задачі задано еліпс F' центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$. Нехай точка M' є серединою сторони $A'C'$. Проведемо через точку M' діаметр $P'Q'$ даного еліпса. (Якщо точка M' співпадає з точкою O', то побудуємо діаметр $P'Q'$ спряджений до діаметра $A'C'$, зрозуміло, що у

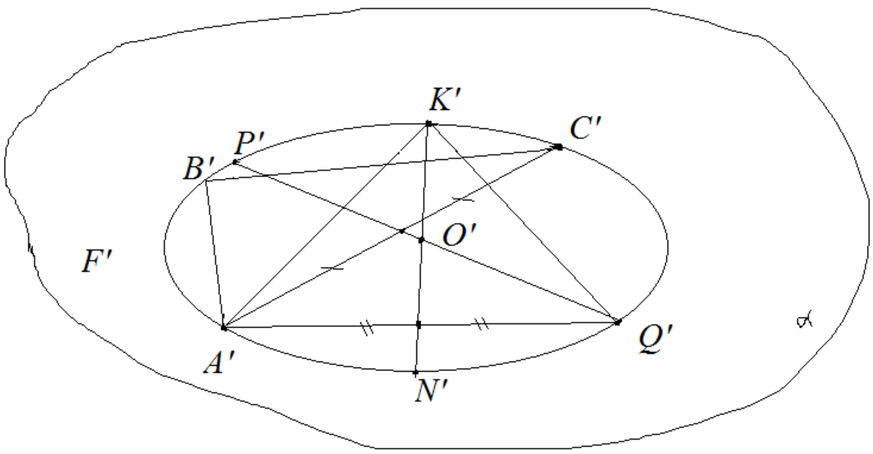


Рис. 163

цьому випадку $\angle A'B'C'$ є зображенням кута у $90°$). Точки P' і Q' лежать по різні сторони відносно прямої $A'C'$. Одна з них належить тій півплощині відносно прямої $A'C'$, яка не містить точку B'. Нехай, для визначеності, це буде точка Q'. Тоді $\angle A'B'C'$ спирається на дугу $A'_{Q}C'$. Нехай точка T є серединою хорди $A'Q'$. Проведемо через точку T діаметр $N'K'$ даного еліпса (Точка T не може співпадати з точкою O' тому, що через точку Q' проходить лише один діаметр даного еліпса – $P'Q'$). Нехай, для визначеності, саме точка K' лежить на прямій $N'K'$ по той саме бік відносно точки T, що і точка O'. Трикутник $A'K'Q'$ є шуканим (рис. 163).

Дійсно, у оригіналі, діаметр $K'N'$ еліпса є діаметром KN кола F, який ділить хорду AQ цього кола навпіл. Це означає, що $KN \perp AQ$ і оригіналом трикутника $A'K'Q'$ є рівнобедрений трикутник, вписаний у коло F. Кут $A'K'Q'$ цього трикутника є кутом, вписаним у еліпс F', який спирається на дугу $A'_{N'}Q'$. Отже, у оригіналі, кут AKQ спирається на дугу $A_{N}Q$ кола, яка є половиною дуги $A_{Q}C$. Але кут $A'B'C'$ є кутом, вписаним у еліпс, що спирається на дугу $A'_{Q'}C'$. Отже, у оригіналі, $\angle AKQ = \frac{1}{2}\angle ABC$.W

Задача 9.15. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h довільного трикутника, вписаного у коло-оригінал.*

Розв'язання. У евклідовій геометрії пряма може перетинати коло не більш, ніж у двох точках. Отже, будь-які три точки кола не

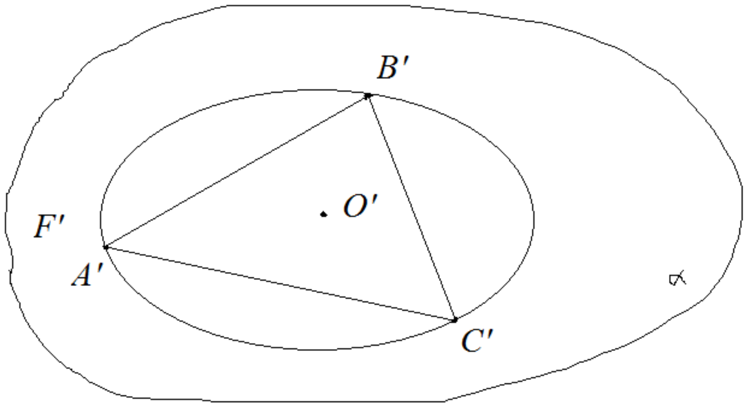


Рис. 164

лежать на одній прямій і є вершинами трикутника, вписаного у це коло. Звідси випливає, що для розв’язання даної задачі достатньо на даному еліпсі F' обрати три довільні точки A', B', C' і сполучити їх відрізками (рис. 164). W

Задача 9.16. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h трикутника, подібного до довільного даного, вписаного у коло-оригінал.*

Розв’язання. W За умови даної задачі задано еліпс F' з центром у точці O' і певний трикутник ABC, який можна прийняти за оригінал. Опишемо коло F навколо трикутника ABC. Центр O цього кола знайдемо як точку перетину серединних перпендикулярів до сторін AB і BC (рис. 165). Нехай діаметр PQ кола F є перпендикулярним до сторони AC у її середині M і перетинає сторону AB у точці K. Побудуємо на еліпсі F' довільний діаметр $P'Q'$ (рис.166). Згідно теореми 8.3, його можна вважати зображенням діаметра PQ при певному паралельному проектуванні.

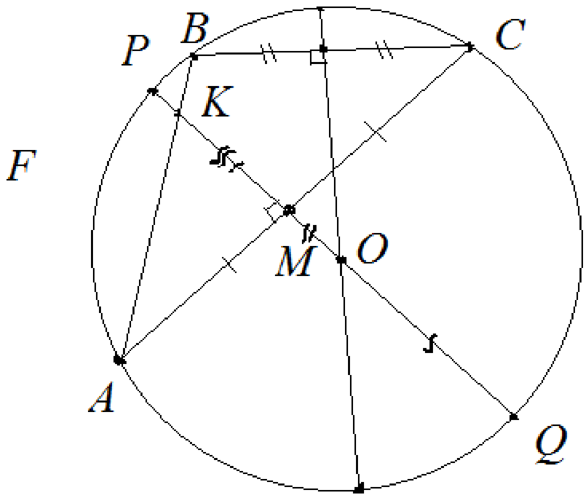


Рис. 165

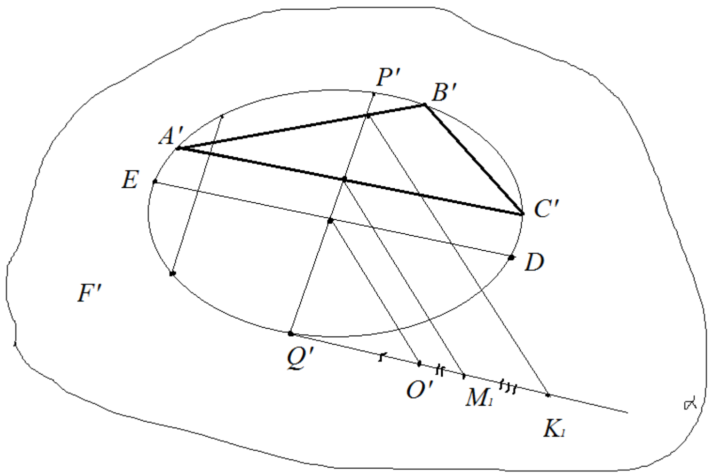


Рис. 166

Розглянемо довільний промінь з початком у точці Q', який не лежить на прямій $P'Q'$. Послідовно відкладемо на ньому відрізки $Q'O_1 = QO$, $O_1M_1 = = OM$, $M_1K_1 = MK$. Проведемо прямі $M_1M' \parallel O_1O'$, $K_1K' \parallel O_1O'$ до перетину з діаметром $P'Q'$ відповідно у точках M' і K'. Згідно теореми …, точки M' і K' будуть зображеннями точок M і K трикутника-оригінала. За допомогою допоміжної хорди, побудуємо діаметр ED, спряджений до діаметра $Q'P'$. Він буде зображенням діаметра кола F, перпендикулярного до діаметра PQ. Через точку M' проведемо хорду $A'C' \parallel ED$. Оскільки у оригіналі хорда AC є перпендикулярною до діаметра PQ і проходить через точку M, то хорда $A'C'$ є зображенням хорди AC. Через точку K' проведемо хорду $A'B'$. Вона буде зображенням хорди AB і тому трикутник $A'B'C'$ буде шуканим. W

Задача 9.17. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h прямокутника, сторони якого відносяться як 2:5, вписаного у коло-оригінал.*

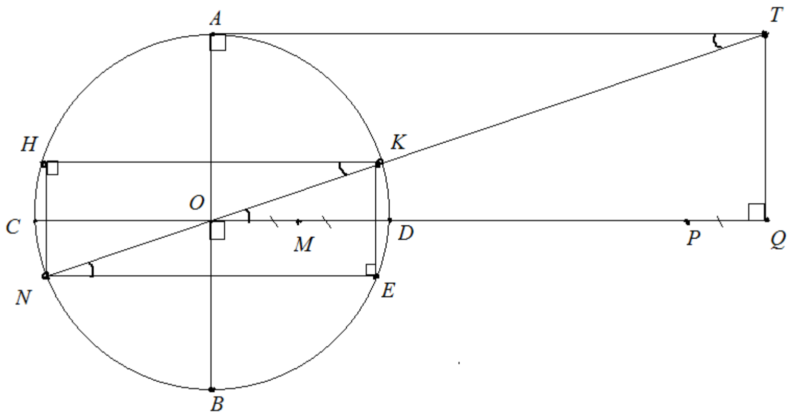


Рис. 167

Розв’язання. W За умови даної задачі задано лише еліпс F' з центром у точці O'. Але всі прямокутники з (рис.167)однаковим відношенням сторін є подібними між собою. Тому можна розглянути довільний прямокутник, сторони якого відносяться як 2:5, описати навколо нього коло і прийняти утворену геометричну фігуру за оригінал шуканого зображення. Далі задачу можна розв’язувати шляхом використання оригінала у явному вигляді і застосування теореми Фалеса.

Але однозначна визначеність умовою задачі форми оригіналу при відсутності оригіналу у явному вигляді дозволяє розв'язати дану задачу і без безпосереднього використання оригіналу. Для знаходження такого способу розв'язання дослідимо спочатку питання про те, як можна прямокутник, довжини сторін якого відносяться як 2:5, вписати у коло.

Розглянемо довільне коло F з центром у точці O. Проведемо у ньому взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD. Нехай точка M є серединою радіуса OD (рис. 168). На промені OD послідовно відкладемо відрізки $DP = OD,\ PQ = OM$. Проведемо $AT \parallel OD,\ QT \parallel OA$. Оскільки $OD \perp OA$, чотирикутник $OATQ$ буде прямокутником, $OA : OQ = 1 : 2{,}5 = 2 : 5$. Проведемо

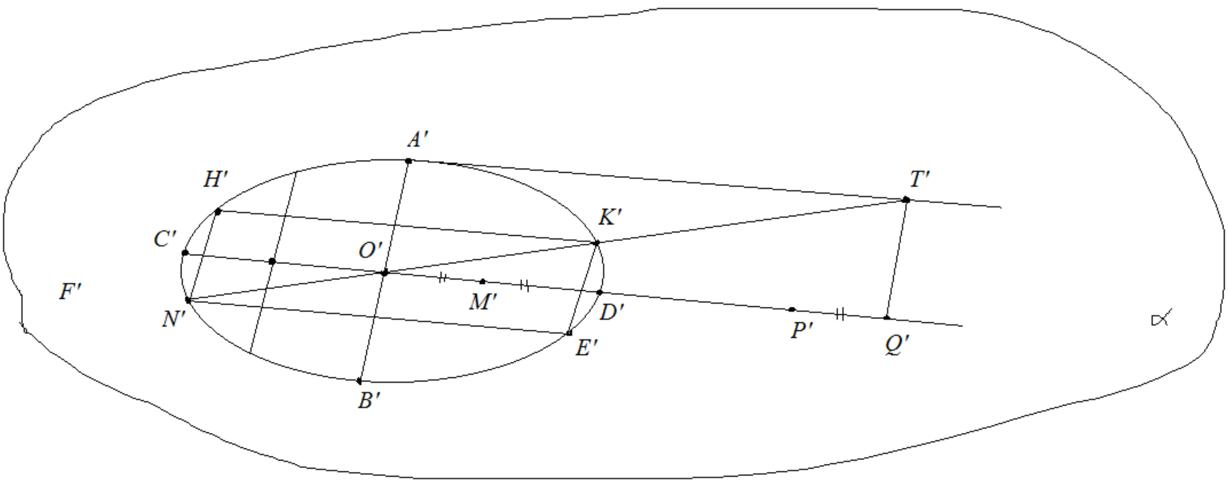


Рис. 168

пряму OT. Вона перетне коло F у діаметрально протилежних точках N і K. Проведемо хорди $KH \parallel CD$ і $EN \parallel CD$. Розглянемо вписаний у коло F чотирикутник $NHKE$. $HK \parallel NE$ за побудовою (дві прямі, паралельні до третьої, є паралельними між собою). $\angle NHK = \angle NEK = 90°$, бо це кути, вписані у коло F, які спираються на його діаметр NK. $\angle HKN = \angle KND$ – внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих HK і NE і січній NK. Отже, $\triangle NHK = \triangle KEN$ як прямокутні трикутники, що мають спільну гіпотенузу NK і рівні гострі кути. Звідси: $HK = NE$. Але тоді чотирикутник $NHKE$ є паралелограмом (його протилежні сторони HK і NE паралельні і рівні), вписаним у коло F, і тому прямокутником. За побудовою, $OD \perp OA$, $AT \parallel OD$. Тому $AT \perp OA$ (якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до певної прямої, то друга пряма має ту ж саму властивість) трикутник є прямокутним. $AT \parallel HK$, бо кожна з цих двох прямих є паралельною до прямої OD. $\angle HKN = \angle ATO$ – відповідні кути при паралельних прямих $HK\ i\ AT$ і січній NT. Звідси випливає, що прямокутні трикутники NHK і OAT є подібними, $\dfrac{NH}{HK} = \dfrac{OA}{AT} = 2:5$. Отже, у вписаного у коло F прямокутника $NHKE$ суміжні сторони мають потрібне відношення.

Побудови, аналогічні до проведених, можна виконати і для еліпса F'. Це надасть шукане розв'язання поставленої задачі. Дійсно, побудуємо спряджені діаметри $A'B'$ і $C'D'$ еліпса F' (рис. 168).

За теоремою 8.3, їх можна вважати зображеннями взаємно перпендикулярних діаметрів AB і CD кола F при певному паралельному проектуванні f. Нехай точка M' є серединою відрізка $O'D'$. На промені $O'D'$ послідовно відкладаємо відрізки $D'P' = O'D',\ P'Q' = O'M'$. На відрізках $O'A'$ і $O'Q'$, як на сторонах, побудуємо паралелограм $O'A'T'Q'$. Згідно властивостей паралельного проектування, він буде зображенням паралелограма $OATQ$ при паралельному проектуванні f.

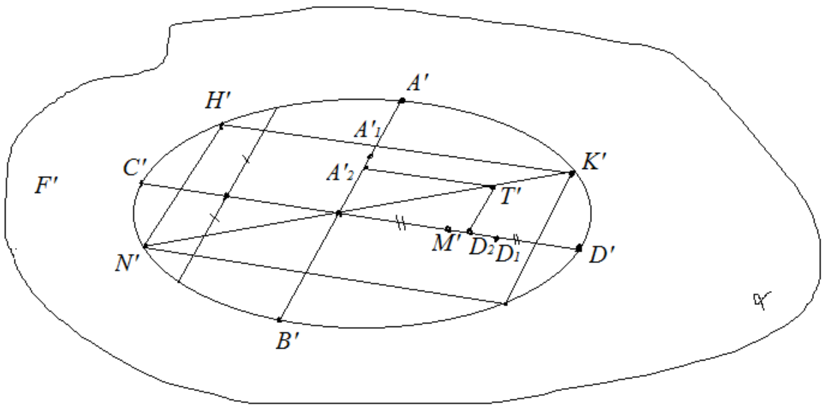


Рис. 169

Проведемо пряму $O'T'$. Вона перетне еліпс F' у діаметрально протилежних точках K' і N'. Проведемо хорди $H'K' \parallel C'D'$ і $N'E' \parallel C'D'$. Паралелограм $N'H'K'E'$ буде зображенням прямокутника $NHKE$ при паралельному проектуванні f і тому – шуканим розв'язком задачі 9.17. Запропоновані вище побудови на еліпсі F' не вимагають безпосереднього використання оригіналу. Вони не є, зрозуміло, єдиними можливими побудовами такого роду. Технічним недоліком запропонованого способу розв'язання поставленої задачі можна вважати проведення побудов на картинній площині α зовні еліпса F'. Мова йде про побудову паралелограма $O'A'T'Q'$, подібного (навіть, гомотетичного) до шуканого паралелограма $N'H'K'E'$. Але паралелограм, подібний до шуканого, можна побудувати і всередині еліпса F'. Якщо не застосовувати теорему Фалеса, а обмежитися лише знаходженням середин відрізків, можна запропонувати, наприклад, наступне (рис. 169).

1. Як і у попередньому варіанті, будуємо спряджені діаметри $A'B'$ і $C'D'$.

2. Нехай точка A_1' є серединою відрізка $O'A'$, точка A_2' – серединою відрізка $O'A_1'$. Тоді $O'A_2' = \frac{1}{4}O'A'$. Якщо точка M' є серединою відрізка $O'D'$, точка D_1' –серединою відрізка $M'D'$, точка D_2' – серединою відрізка $M'D_1'$, то $O'D_2' = \quad = (\frac{1}{2} + \frac{1}{8})O'D' = \frac{5}{8}O'D'$. Для кола-оригінала $OA = OD$, $OA_2 = \frac{1}{4}OA$, $OD_2 = \frac{5}{8}OD$, $OA_2 : OD_2 = 2:5$.

3. Проведемо $A_2'T' \parallel O'D'$, $D_2'T' \parallel O'A'$. $O'A_2'T'D_2'$ – паралелограм, оригіналом якого є прямокутник OA_2TD_2, суміжні сторони OA_2 і OD_2 якого відносяться як 2:5.

4. Проведемо пряму $O'T'$, яка перетне еліпс F' у діаметрально протилежних точках N' і K'.

5. Далі виконаємо точно такі побудови, як і при попередньому розв'язанні задачі. Паралелограм $N'H'K'E'$ буде шуканим.

Задача 9.18. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному* *проектуванні* h. *Побудуйте зображення при проектуванні* h *довільної рівнобічної трапеції, вписаної у коло-оригінал.*

Розв'язання. Відомо, що вписаний у коло чотирикутник, дві сторони якого паралельні між собою є або прямокутником або рівнобічною трапецією, саме прямокутником він є тоді та тільки тоді, коли його діагоналі є діаметрами даного кола. Звідси випливає наступний легкий спосіб побудови вписаної у коло рівнобічної трапеції. Проводимо у колі F довільну хорду BC, яка не є його діаметром (рис. 170).

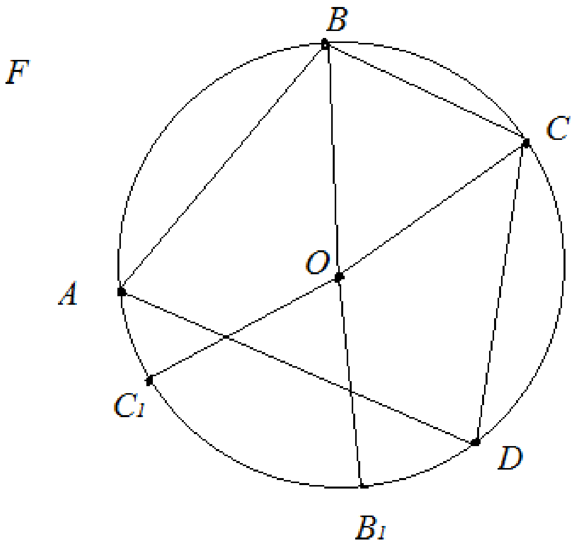


Рис. 170

Проведемо діаметри BB_1 і CC_1 даного кола. Оберемо на колі довільні точку A, відмінну від точок B, C, B_1 і C_1. Проведемо паралельно до хорди BC хорду AD. Чотирикутник $ABCD$, очевидно, є вписаною у коло рівнобічною трапецією.

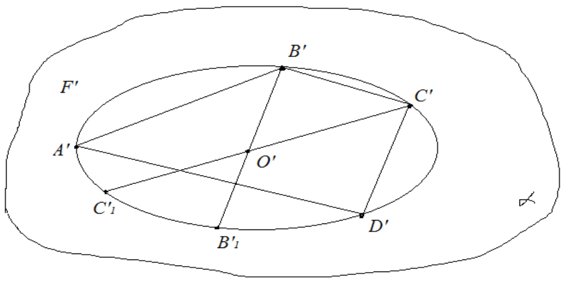


Рис. 171

Аналогічні побудови для еліпса відповідають властивостям паралельного проектування. Проведемо у еліпсі F' довільну хорду $B'C'$, яка не є його діаметром. Побудуємо діаметри $B'B_1'$ і $C'C_1'$. Оберемо на еліпсі точку A', (рис.171) відмінну від точок B', C', B_1', C_1'. Проведемо паралельно до хорди $B'C'$ хорду $A'D'$. Чотирикутник $A'B'C'D'$ є трапецією ($B'C' \neq A'D'$), вписаною у еліпс F', зображенням певної трапеції, вписаної у коло-оригінал F, яка за необхідністю є рівнобічною.

Запропоновані побудови не вимагають явного використання оригіналу.

Задача 9.19. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h рівнобічної трапеції, подібної до довільної рівнобічної трапеції, вписаної у коло-оригінал.*

Розв'язання. За умови даної задачі задано еліпс F' з центром у точці O' і рівнобічну трапецію $ABCD$. Опишемо навколо трапеції $ABCD$ коло. Як відомо, його центр є точкою перетину прямої, що сполучає середини основ трапеції $ABCD$, з серединним перпендикуляром, наприклад, до сторони AB (рис. 172). Оскільки всі кола є подібними між собою, побудоване коло можна вважати оригіналом F для

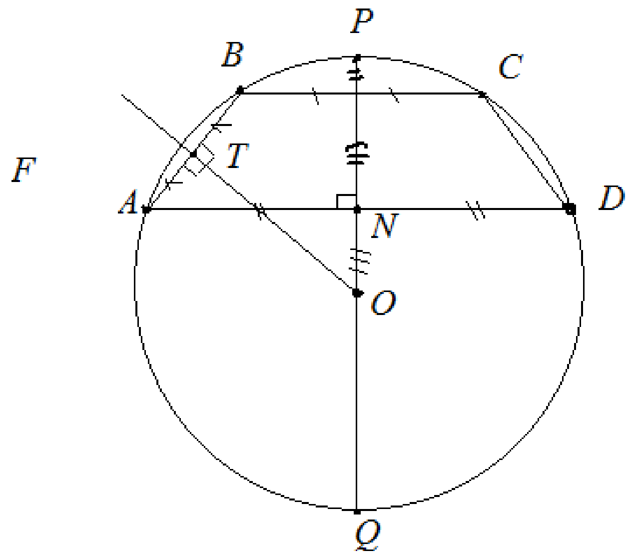


Рис. 172

заданого еліпса F' при певному паралельному проектуванні f. Тоді на рис.

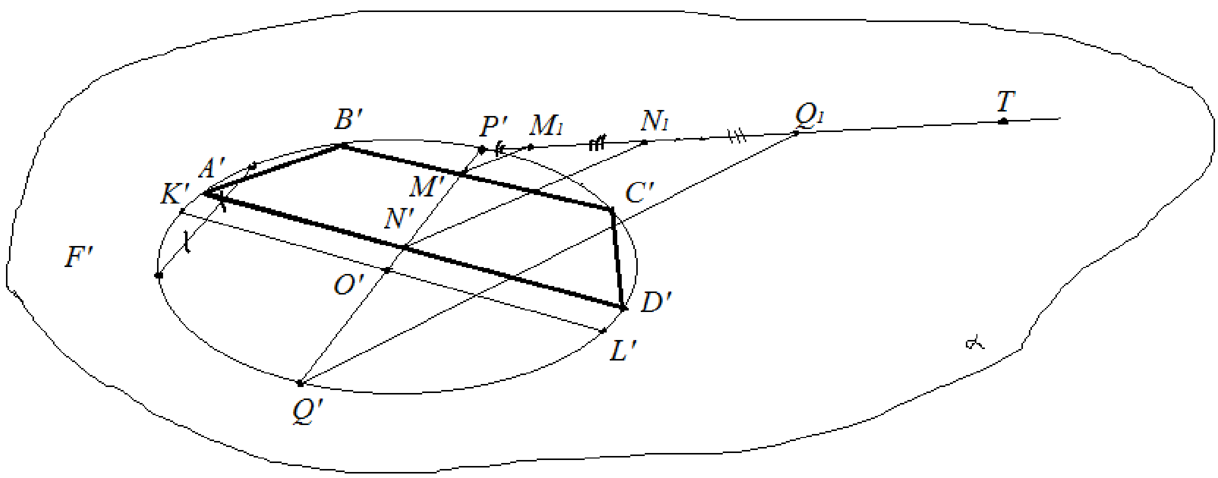


Рис. 173

171 задано оригінал зображення, треба побудувати зображення трапеції $ABCD$ за умови, що еліпс F' є зображенням кола F. Нехай точка M є

серединою основи BC трапеції $ABCD$, точка N – серединою основи AD. Пряма MN містить діаметр PQ кола F, $BC \perp PQ$, $AD \perp PQ$.

Проведемо у еліпсі F' довільний діаметр $P'Q'$. Згідно теореми 3.8, його можна вважати зображенням діаметра PQ при певному паралельному проектуванні f. На картинній площині α проведемо довільний промінь $P'T$, не лежить на прямій $P'Q'$. Послідовно відкладемо на ньому відрізки $P'M_1 = PM$, $M_1N_1 = MN$, $N_1Q_1 = NQ$. Проведемо прямі $M_1M' \parallel Q_1Q'$, $N_1N' \parallel Q_1Q'$ до перетину з прямою $P'Q'$ відповідно у точках M' і N'. Згідно теореми Фалеса і теореми 3. 3, точка M' є зображенням точки M, точка N' – зображенням точки N при паралельному проектуванні h. За допомогою допоміжної хорди, побудуємо діаметр $K'L'$, спряджений до діаметра $P'Q'$. Згідно теореми 8.3, він є зображенням діаметра KL кола F, перпендикулярного до діаметра PQ. Через точку M' паралельно до діаметра $K'L'$ проведемо хорду $B'C'$ еліпса F'. Через точку N' – хорду $A'D' \parallel K'L'$. Трапеція $A'B'C'D'$ буде зображенням трапеції $ABCD$ при паралельному проектуванні h.

Задача 9.20. *Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні h. Побудуйте зображення при проектуванні h рівнобічної трапеції рівнобічної трапеції з кутом у $60°$, вписаної у коло-оригінал.*

Розв'язання. З'ясуємо спочатку, як можна у коло F з центром у точці O вписати

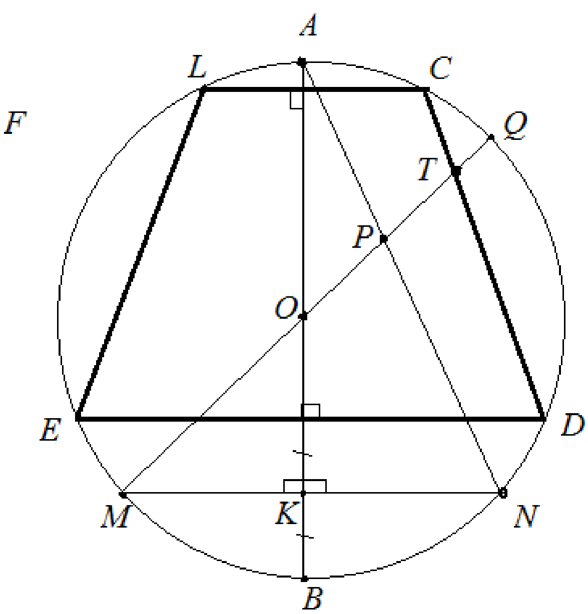


Рис. 174

рівнобічну трапецію, один з кутів якої дорівнює $60°$. По-перше, кути при кожній з двох основ рівнобічної трапеції є рівними між собою. Отже, не один, а два кути шуканої трапеції, кути, прилеглі до більшої з її основ, дорівнюють по $60°$. Якщо у коло вписано правильний трикутник (всі кути якого складають по $60°$) і основи шуканої трапеції паралельні до однієї із сторін цього трикутника, то бічні сторони трапеції можна шукати як хорди, відповідно паралельні до двох інших сторін даного правильного трикутника.

Звідси випливає наступний можливий шлях побудови (рис. 174).

1.Проводимо у колі довільний діаметр AB.

2. Знаходимо середину K радіуса OB.

3. Через точку K перпендикулярно до діаметра AB проводимо хорду MN.

4. Будуємо хорду AN.

5. Через точку M проводимо діаметр MQ, який перетинає хорду AN у точці P.

6. На відрізку PQ обираємо довільну внутрішню точку T.

7. Через точку T, паралельно до хорди AN, проводимо хорду CD.

8. Через точки C і D паралельно до MN проводимо, відповідно, хорди CL і DE.

9. Трапеція $ELCD$ є шуканою.

Дійсно, за побудовою, чотирикутник $ELCD$ є вписаним у коло F. $CL \parallel DE$, отже, $ELCD$ або паралелограм, або трапеція. За побудовою, $MN \perp AB$, $CL \parallel MN$, $DE \parallel MN$. Звідси випливає, що $CL \perp AB$, $DE \perp AB$, діаметр AB ділить хорди CL і DE навпіл. За побудовою $CD \parallel AN$, $AN \nparallel AB$. Отже, $CD \nparallel AB$, точки C і D розташовані на різній відстані від діаметра AB, $CL \neq DE$, $ELCD$ – трапеція. $EL = CD$, бо у коло можна вписати лише рівнобічну трапецію. $\angle EDC = \angle MNA$ як гострі кути з відповідно паралельними сторонами. Але $\angle MNA = 60°$ як кут рівностороннього трикутника MAN. Отже, $\angle EDC = 60°$, трапеція $ELCD$ насправді є шуканою.

Обґрунтуйте самостійно, що форма трапеції $ELCD$ залежить від положення точки T на відрізку PQ і лише від такого її положення.

Аналогічні побудови можна виконати для еліпса F'. Вони повністю відповідають властивостям паралельного проектування.

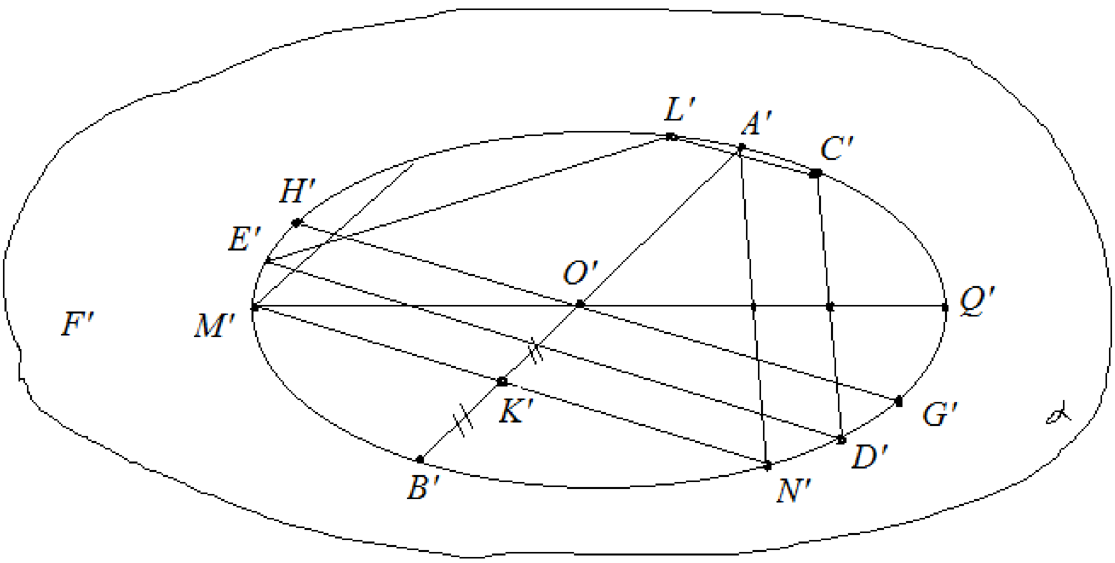


Рис. 175

1. Проведемо у еліпсі F' довільний діаметр $A'B'$. Згідно теореми наслідку 1 з теореми 8.6, його можна вважати зображенням діаметра AB кола F при певному паралельному проектуванні h.

2. За допомогою допоміжної хорди побудуємо діаметр $H'G'$, спряджений до діаметра $A'B'$. Згідно теореми 3.8, він є зображенням діаметра HG кола F, перпендикулярного до діаметра AB.

3. Через середину K' радіуса $O'B'$ паралельно до діаметра $H'G'$ проведемо хорду $M'N'$. Вона буде зображенням хорди MN кола F, перпендикулярної у точці K до діаметра AB.

4. Через точки M' і O' проведемо діаметр $M'Q'$ еліпса F', який перетне хорду $A'N'$ у точці P'.

5. Оберемо довільну внутрішню точку T' відрізка $P'Q'$.

6.Паралельно до хорди $A'N'$ через точку T проведемо хорду $C'D'$. Як і хорда $A'N'$, хорда $C'D'$ не буде паралельною до діаметра $A'B'$.

7. Паралельно до хорди $M'N'$ проведемо хорди $L'C'$ і $E'D'$ еліпса F'.

8. Трапеція $E'L'C'D'$ є шуканою. Зрозуміло, ми не можемо стверджувати, що вона є зображенням саме трапеції $E'L'C'D'$ при паралельному проектуванні h, тому що і внутрішня точка T відрізка PQ, і внутрішня точка T' відрізка $P'Q'$ були обрані цілком довільним чином. Запропоновані побудови не вимагають явного використання оригіналу.

Аналіз розв'язків представлених задач дозволяє зробити наступні висновки. У більшості випадків розв'язання задачі на побудову зображення вписаного у коло n-кутника, $n \in N$, $n \geq 3$, доцільно починати з обрання двох взаємно перпендикулярних прямих, тим чи іншим чином пов'язаних з даним n-кутником-оригіналом і визначення однакових за довжиною відрізків цих прямих. По суті, це те ж саме, що обрання на площині оригіналу певної прямокутної системи координат. На картинній площині такі прямі зображуються прямими, паралельними, відповідно, до двох взаємно спряджених діаметрів заданого еліпса, радіуса еліпса, що належать цим спрядженим діаметрів, зображують однакові за довжиною відрізки двох обраних взаємно перпендикулярних прямих оригіналу. Таким чином, фактично, ми маємо певну афінну систему координат на картинній площині. Відповідне паралельне проектування виступає тоді як відображення за рівністю координат відносно прямокутної декартової системи координат оригіналу і афінної системи координат картинної площини.

Питання і завдання для самоконтролю до §9

9.1. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення довільного прямокутного трикутника, вписаного у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.2. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення довільного прямокутника, вписаного у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.3. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення рівнобедреного прямокутного трикутника, вписаного у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.4. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення довільного рівнобедреного трикутника, вписаного у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.5. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення правильного трикутника, вписаного у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.6. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення довільного трикутника, вписаного у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.7. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення трикутника, подібного до довільного даного, вписаного у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.8. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення довільної рівнобічної трапеції, вписаної у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.9. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Як побудувати зображення рівнобічної трапеції, подібної до довільної даної вписаної у коло-оригінал? Відповідь обґрунтуйте.

9.10. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Які загальні пропозиції є доцільними щодо знаходження шляхів розв'язання задач на побудову зображень вписаних многокутників при паралельному проектуванні? Відповідь обґрунтуйте.

Практичні завдання для самостійного розв'язання до розділу II

41.

Відомо, що заданий на рис. 227*б* трикутник $A'B'C'$ картинної площини α є зображенням заданого на рис. 227*а* трикутника ABC площини

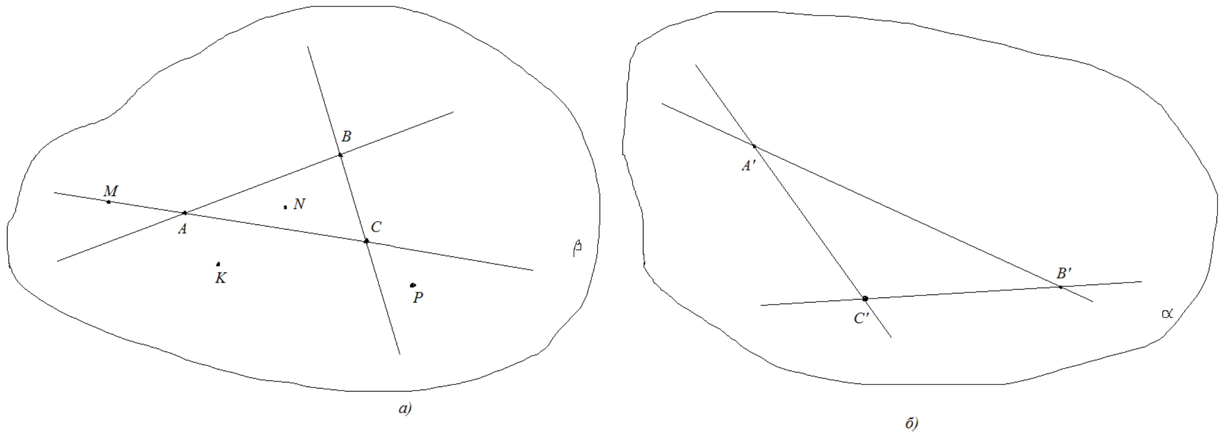


Рис.227

β при паралельному проектуванні f, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Для заданих на рис. 227*а* точок M, N, P і K на рис. 227*б* побудуйте їх зображення $M' = f(M), N' = f(N), P' = f(P), K' = f(K)$ при паралельному проектуванні f.

42. Відомо, заданий трикутник $A'B'C'$ картинної площини α є зображенням заданого трикутника ABC площини β при паралельному проектуванні f, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Обгрунтуйте, що для побудови зображення M' довільної точки M площини β при паралельному проектуванні f достатньо використати теорему Фалеса не більше ніж 2 рази.

43. Відомо, що заданий на рис. 227*б* трикутник $A'B'C'$ картинної площини α є зображенням заданого на рис. 227*а* трикутника ABC площини β при паралельному проектуванні g, $A' = g(C), B' = g(A), C' = g(B)$. Для заданих на рис. 227*а* точок M, N, P і K на рис. 227*б* побудуйте їх зображення $M' = g(M), N' = g(N), P' = g(P), K' = g(K)$ при паралельному проектуванні g.

44. Відомо, що заданий на рис. 228*б* трикутник $A'B'C'$ картинної площини α є зображенням заданого на рис. 203*а* трикутника ABC площини β при паралельному проектуванні f, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Для заданих на рис. 228*б* точок M', N', P' і K' на рис. 203*а* відновіть їх оригінал — побудуйте такі точки M, N, P і K площини β, що $M' = f(M), N' = f(N)$, $P' = f(P), K' = f(K)$.

45. Відомо, що заданий на рис. 228*б* трикутник $A'B'C'$ картинної

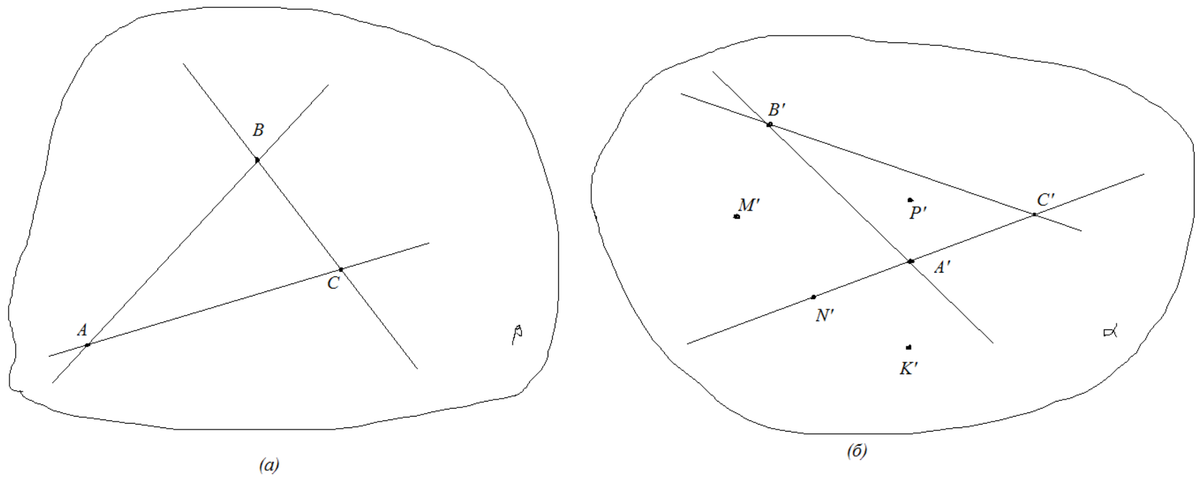


Рис.228

площини α є зображенням заданого на рис. 228*а* трикутника ABC площини β при паралельному проектуванні g, $A' = g(C), B' = g(A), C' = g(B)$. Для заданих на рис. 228*б* точок $M', N', P' \text{ і } K'$ на рис. 228*а* відновіть їх оригінал — побудуйте такі точки $M, N, P \text{ і } K$ площини β, що $M' = g(M), N' = g(N)$, $P' = g(P), K' = g(K)$.

46. Відомо, що заданий на рис. 229 трикутник $AB'C$ є зображенням

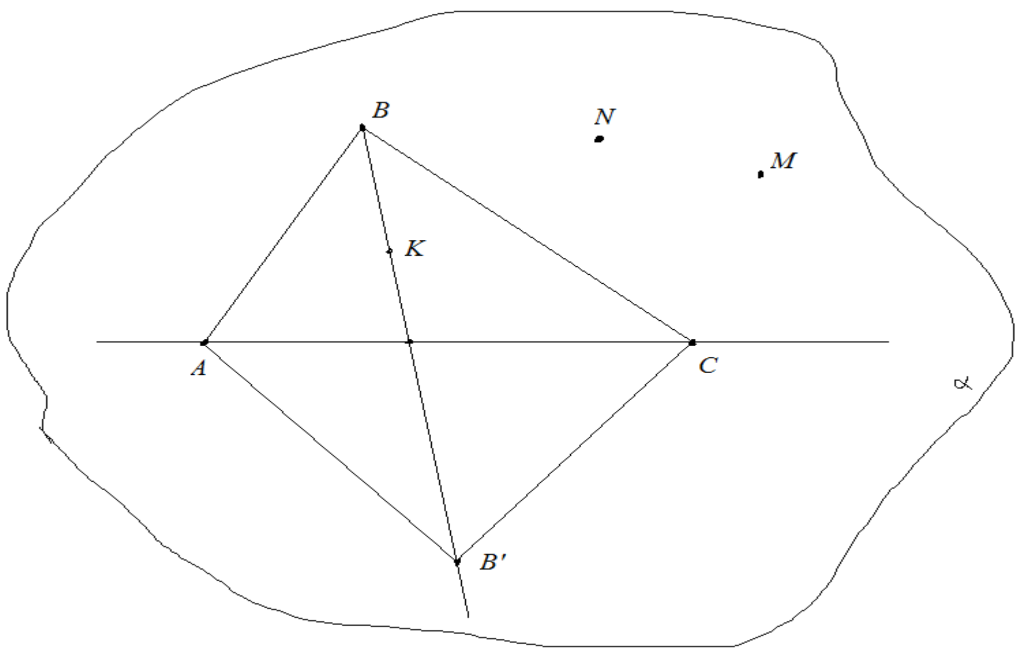


Рис.229

заданого на тому ж рисунку трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f $(f(A)=A,\ f(B)=B',\ f(C)=C)$. Для заданих на рис. 229 точок M, N, K побудуйте їх зображення $M'=f(M), N'=f(N), K'=f(K)$

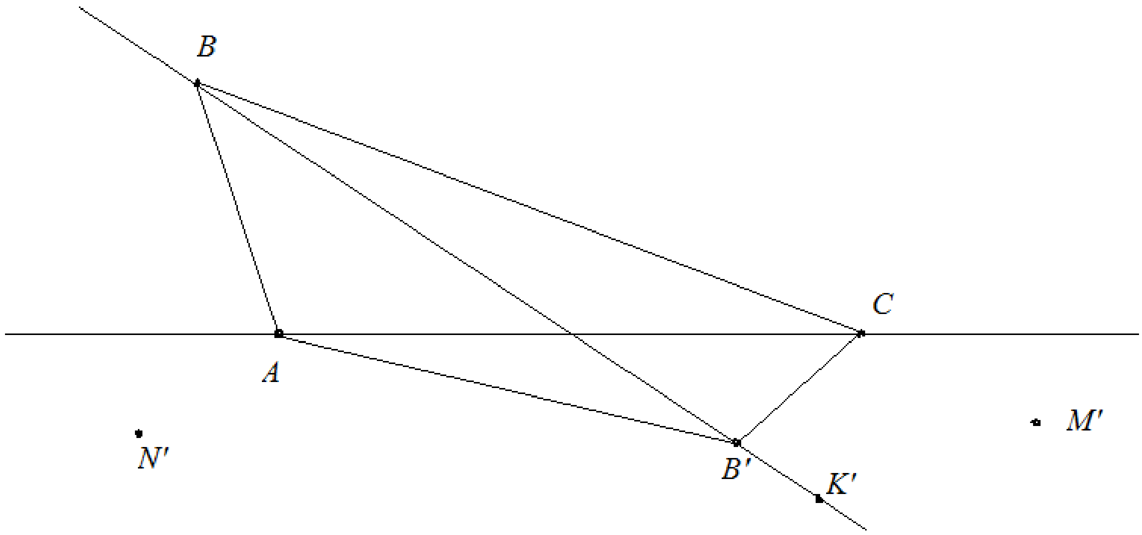


Рис.230

при паралельному проектуванні f. Відомо, що: 1) точка M лежить на прямій BB', пряма BM не є паралельною до прямої AC; 2) пряма BN є паралельною до прямої AC; 3) точка K лежить на прямій BB'.

47. Відомо, що заданий на рисунку трикутник $AB'C$ є зображенням заданого на тому ж рисунку трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f $(f(A)=A,\ f(B)=B',\ f(C)=C)$. На відміну від умови задачі № 46 на заданому рисунку точки B і B' розташовані по один бік відносно прямої AC. Для заданих точок M, N, K побудуйте їх зображення $M'=f(M), N'=f(N), K'=f(K)$ при паралельному проектуванні f. Відомо, що 1) $M \notin BB', BM \nparallel AC$; 2) $BN \parallel AC$; 3) $K \in BB'$.

48. Відомо, що заданий на рис. 230 трикутник $AB'C$ є зображенням заданого на тому ж рисунку трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f $(f(A)=A,\ f(B)=B',\ f(C)=C)$. Для заданих на рис. 230 точок M', N', K' побудуйте їх оригінали при паралельному проектуванні f, тобто, такі точки M, N, K, що $M'=f(M), N'=f(N), K'=f(K)$. Відомо, що 1) $M' \notin BB', B'M' \nparallel AC$; 2) $B'N' \parallel AC$; 3) $K' \in BB'$.

49. Відомо, що заданий на рисунку трикутник $AB'C$ є зображенням заданого на тому ж рисунку трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f $(f(A)=A,\ f(B)=B',\ f(C)=C)$. На відміну від умови задачі № 48 на заданому рисунку точки B і B' розташовані по один бік відносно прямої AC. Для заданих точок M', N', K' побудуйте їх оригінали при

паралельному проектуванні f, тобто, такі точки M, N, K, що $M' = f(M), N' = f(N), K' = f(K)$. Відомо, що 1) $M' \notin BB', B'M' \nparallel AC$; 2) $B'N' \parallel AC$; 3) $K' \in BB'$.

50. На картинній площині α задано пряму a' і точку A', $A' \notin a'$, про які відомо, що вони є зображеннями даної прямої a і точки A при певному паралельному проектуванні. Побудуйте зображення b' прямої b, яка проходить через точку A паралельно до прямої a, при даному паралельному проектуванні.

51. На картинній площині α задано прямі a' і b', які не є паралельними ($a' \nparallel b'$), і точку A', що не належить жодній з цих прямих. Обґрунтуйте, що можна стверджувати, що існує така площина β, яка містить такі прямі a і b, $a \perp b$, і точку A, зображеннями яких при певному паралельному проектуванні f є відповідно прямі a' і b' і точка A'. Побудуйте зображення при паралельному проектуванні f прямої, яка проходить через точку A перпендикулярно до прямої a.

52. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f бісектриси зовнішнього кута KBC при вершині B трикутника ABC.

53. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC, для якого $AB > BC$ при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f бісектриси зовнішнього кута KBC при вершині B трикутника ABC.

54. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC, для якого $AB > BC$ при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f бісектриси зовнішнього кута PBC при вершині B трикутника ABC.

55. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC, для якого $AB = 2BC$ при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f бісектриси зовнішнього кута KBC при вершині B трикутника ABC.

56. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням прямокутного трикутника ABC, у якого $\angle ACB = 90°, \angle ABC = 60°$ при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f бісектриси зовнішнього кута $\angle KBC$ при вершині B трикутника ABC.

57. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника ABC, для якого $AB : BC : AC = m : n : k$, $m, n, k \in N, m \le n \le k, k < m + n$ при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f бісектрис всіх зовнішніх кутів даного трикутника.

58. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням трикутника ABC, для якого $AB : BC : AC = m : n : k$, $m, n, k \in N, m \le n \le k, k < m + n$ при

певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f центрів кіл, зовнівписаних для трикутника ABC.

59. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f центрів кіл, зовнівписаних для трикутника ABC.

60. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$, пряму l' і точку P', про яких відомо, що вони, відповідно, є зображеннями правильного трикутника ABC, прямої l і точки P при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямої a, що проходить через точку P перпендикулярно до прямої l.

61. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$, пряму l' і точку P', про яких відомо, що вони, відповідно, є зображеннями рівнобедреного прямокутного трикутника ABC , прямої l і точки P при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при паралельному проектуванні f прямої a, що проходить через точку P перпендикулярно до прямої l.

62. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f. У площині трикутника $A'B'C'$ задано певну пряму l' і точку P'. Побудуйте зображення прямої a, яка проходить через оригінал P точки перпендикулярно до оригінала l прямої l' (розташованих у площині трикутника ABC) при паралельному проектуванні f.

63. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$ і точку P' на прямій $A'B'$. Відомо, що трикутник $A'B'C'$ є зображенням деякого рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($AB = BC$) при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при паралельному проектуванні f перпендикуляра, проведеного з оригінала P точки P' до прямої AC.

64. На картинній площині α задано трикутник $A'B'C'$, точку T' в середині кута, вертикального до кута $\angle B'A'C'$ цього трикутника, пряму l' і точку P'. Відомо, що задані геометричні фігури є зображеннями при певному паралельному проектуванні f, відповідно, трикутника ABC, його ортоцентра T, прямої l і точки P, розташованих на деякій площині β. Побудуйте зображення при проектуванні f прямої a, що проходить через точку P перпендикулярно до прямої l.

65. На картинній площині задані зображення деякого трикутника і двох його висот. Побудуйте зображення при певному паралельному проектуванні центра кола, описаного навколо зображеного трикутника.

66. На картинній площині задані зображення при певному паралельному проектуванні деякого трикутника ABC і центра Q кола, описаного навколо

даного трикутника. Побудуйте зображення при даному паралельному проектуванні висоти трикутника ABC, проведеної до сторони BC.

67. На картинній площині задані зображення при певному паралельному проектуванні деякого трикутника ABC і центра описаного навколо цього трикутника кола. Побудуйте зображення ортоцентра трикутника ABC при даному паралельному проектуванні.

68. На картинній площині α задані трикутник $A'B'C'$ і трикутник $M'N'K'$. Відомо, що трикутники, відповідно, є зображеннями правильного трикутника ABC і деякого трикутника MNK площини β при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при паралельному проектуванні f: 1) висоти MH трикутника MNK; 2) ортоцентра трикутника MNK; 3) центра кола, описаного навколо трикутника MNK.

69. На картинній площині α задані трикутник $A'B'C'$, пряма l' і точка P', про які відомо, що вони є, відповідно, зображеннями прямокутного рівнобедреного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$), прямої l і точки P, які належать площині β, при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(C), B' = f(A), C' = f(B)$). Побудуйте зображення при паралельному проектуванні f прямої a, що проходить через точку P перпендикулярно до прямої l.

70. На картинній площині α задані трикутник $A'B'C'$ і трикутник $M'N'K'$. Відомо, що ці трикутники, відповідно, є зображеннями прямокутного рівнобедреного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) і деякого трикутника MNK площини β при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при паралельному проектуванні f: 1) висоти MH трикутника MNK; 2) ортоцентра трикутника MNK; 3) центра кола, описаного навколо трикутника MNK.

71. На картинній площині α задані трикутник $A'B'C'$, про який відомо, що він є зображенням правильного трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при паралельному проектуванні f рівнобедреного трикутника ADC, у якого $\angle ACB = 90°$, розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC.

72. На картинній площині задано трикутник $A'B'C'$, про який відомо, що він є зображенням рівнобедреного трикутника ABC, у якого $\angle ABC = 120°$ при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при паралельному проектуванні f правильного трикутника ADC, розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC.

73. На картинній площині задано трикутник $A'B'C'$, про який відомо, що він є зображенням рівнобедреного прямокутного трикутника ABC, ($\angle ACB = 90°$) при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при паралельному

проектуванні f правильного трикутника ADC, розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC.

74. На картинній площині задано трикутник $A'B'C'$, про який відомо, що він є зображенням рівнобедреного трикутника ABC, у якого ($\angle ABC = 120°$) при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при паралельному проектуванні f правильного трикутника BDC, розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC.

75. На картинній площині задано трикутник $A'B'C'$, про який відомо, що він є зображенням рівнобедреного трикутника ABC, у якого ($\angle ABC = 120°$) при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при паралельному проектуванні f прямокутного трикутника ACD ($\angle ACD = 90°$), у якого $\angle DAC = 30°$, розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC.

76. На картинній площині задано трикутник $A'B'C'$, про який відомо, що він є зображенням правильного трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при паралельному проектуванні f прямокутного трикутника BCD ($\angle BCD = 90°$), у якого $\angle BDC = 60°$, розташованого у площині трикутника ABC зовні трикутника ABC.

77. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f квадрата $AMNC$, розташованого зовні трикутника ABC.

78. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутника $AMNC$, у якого $AM : AC = 1:2$, розташованого зовні трикутника-оригінала.

79. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f квадрата $AMNB$, розташованого зовні трикутника ABC.

80. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутника $AMNB$, у якого $AM : AB = 1:2$, розташованого зовні трикутника-оригінала.

81. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f квадрата $AMNC$, розташованого зовні трикутника-оригінала.

82. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f вписаного у трикутник-оригінал квадрата, який має з трикутником-оригіналом спільний прямий кут.

83. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f вписаного у трикутник-оригінал прямокутника, сторони якого відносяться як 3:1, який має з трикутником-оригіналом спільний прямий кут.

84. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f вписаного у трикутник-оригінал квадрата, одна сторона якого належить гіпотенузі.

85. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) при певному паралельному проектуванні f, але оригінал загублено. Побудуйте зображення при проектуванні f вписаного у трикутник-оригінал квадрата, який має з трикутником-оригіналом спільний прямий кут.

86. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$), у якого $BC : CA = m : n, (m, n \in N)$, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f вписаного у трикутник-оригінал квадрата, який має з трикутником-оригіналом спільний прямий кут.

87. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$), у якого $BC : CA = m : n, (m, n \in N)$, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобедреного трикутника $AQB\,(AQ = BQ)$, розташованого зовні трикутника ABC, у якого $\angle QBA = \angle CBA$.

88. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням деякого трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) при певному паралельному проектуванні f, але оригінал загублено. Побудуйте зображення паралелограма $ABCD$ при цьому паралельному проектуванні f.

89. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням правильного трикутника ABC при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення правильного шестикутника $ADBECH$ при даному паралельному проектуванні f.

90. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням рівнобедреного трикутника ABC, у якого $\angle ABC = 120°$ при певному паралельному

проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при проектуванні f ромба $AMBN$, у якого $\angle AMB = 60°$.

91. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням прямокутника $ABCD$ для якого $AB : BC = 1:2$ при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)$). Побудуйте зображення бісектриси кута $\angle BAD$ при даному паралельному проектуванні.

92. На картинній площині α задано паралелограм $A'B'C'D'$, пряму l' і точку P', про які відомо, що вони відповідно є зображеннями квадрата $ABCD$, прямої l і точки P, які належать площині β при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при даному паралельному проектуванні f прямої a, що проходить через точку P перпендикулярно до прямої l.

93. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D', B'C' < A'D'$) є зображенням деякої рівнобічного трапеції $ABCD$ при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f висот трапеції $ABCD$, проведених з кінців її меншої основи.

94. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням ромба $ABCD$ з гострим кутом $\angle ABC = 60°$ при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f висоти BH ромба $ABCD$, проведеної до сторони AD.

95. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням ромба $ABCD$ з гострим кутом $\angle ABC = 45°$ при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f висоти AH ромба $ABCD$, проведеної до сторони BC.

96. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням ромба $ABCD$ з гострим кутом $\angle ABC = 30°$ при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f висоти AH ромба $ABCD$, проведеної до сторони BC.

97. Кут ABC ромба $ABCD$ складає $60°$. У даному ромбі до сторони BC проведено висоту AH. На картинній площині α задано трикутник $A'B'H'$, про який відомо, що він є зображенням трикутника ABH при певному паралельному проектуванні f, ($A' = f(A), B' = f(B), H' = f(H)$). Побудуйте зображення ромба $ABCD$ при паралельному проектуванні f.

98. Кут ABC ромба $ABCD$ складає $45°$. У даному ромбі до сторони BC проведено висоту AH. На картинній площині α задано трикутник $A'B'H'$, про який відомо, що він є зображенням трикутника ABH при певному паралельному проектуванні f, ($A' = f(A), B' = f(B), H' = f(H)$). Побудуйте зображення ромба $ABCD$ при паралельному проектуванні f.

99. Кут ABC ромба $ABCD$ складає $30°$. У даному ромбі до сторони BC проведено висоту AH. На картинній площині α задано трикутник $A'B'H'$, про який відомо, що він є зображенням трикутника ABH при

певному паралельному проектуванні f, ($A' = f(A), B' = f(B), H' = f(H)$). Побудуйте зображення ромба $ABCD$ при паралельному проектуванні f.

100. Побудуйте можливе зображення правильного восьмикутника при невиродженому паралельному проектуванні.

101. Побудуйте можливе зображення правильного п’ятикутника при невиродженому паралельному проектуванні.

102. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D', B'C' < A'D'$) є зображенням деякої рівнобічного трапеції $ABCD$ з кутом у $45°$ при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f центра кола, описаного навколо трапеції $ABCD$.

103. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D', B'C' < A'D'$) є зображенням рівнобічного трапеції $ABCD$ з кутом у $60°$ при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)$). Побудуйте зображення при проектуванні f центра кола, описаного навколо трапеції $ABCD$.

104. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D', B'C' < A'D'$) є зображенням рівнобічної трапеції $ABCD$ з кутом у $60°$, у якої бічна сторона дорівнює меншій основі, при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)$). Побудуйте зображення при проектуванні f центра кола, описаного навколо трапеції $ABCD$.

105. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D', B'C' < A'D'$) є зображенням рівнобічної трапеції $ABCD$ з кутом у $30°$ при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f центра кола, описаного навколо трапеції $ABCD$.

106. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D', B'C' < A'D'$) є зображенням рівнобічної трапеції $ABCD$ при певному паралельному проектуванні f. Побудувати зображення при проектуванні f центра кола, описаного навколо трапеції $ABCD$.

107. Побудуйте зображення при невиродженому паралельному проектуванні f такої прямокутної трапеції з кутом у $60°$, у яку можна вписати коло, і центра даного кола.

108. Побудуйте зображення при невиродженому паралельному проектуванні f такої прямокутної трапеції з кутом у $30°$, у яку можна вписати коло, і центра даного кола.

109. Побудуйте зображення при невиродженому паралельному проектуванні f такої прямокутної трапеції з кутом у $45°$, у яку можна вписати коло, і центра даного кола.

110. Побудуйте зображення при невиродженому паралельному проектуванні f такої прямокутної трапеції з гострим кутом, що дорівнює заданому, у яку можна вписати коло, і центра даного кола.

111. Побудуйте зображення при невиродженому паралельному проектуванні f такої рівнобічної трапеції з кутом у 60°, у яку можна вписати коло, і центра даного кола.

112. Побудуйте зображення при невиродженому паралельному проектуванні f такої рівнобічної трапеції з кутом у 30°, у яку можна вписати коло, і центра даного кола.

113. Побудуйте зображення при невиродженому паралельному проектуванні f такої рівнобічної трапеції з кутом у 45°, у яку можна вписати коло, і центра даного кола.

114. Побудуйте зображення при невиродженому паралельному проектуванні f такої рівнобічної трапеції з гострим кутом, що дорівнює заданому, у яку можна вписати коло, і центра даного кола.

115. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ є зображенням заданої трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD, BC < AD$) при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)$). Побудуйте зображення при проектуванні f перпендикуляра, проведеного з вершини B до прямої CD.

116. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D', B'C' < A'D'$) є зображенням прямокутної трапеції $ABCD$ з кутом $\angle ADC = 45^\circ$ при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)$). Побудуйте зображення при проектуванні f перпендикуляра, проведеного з вершини A до прямої CD.

117. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D', B'C' < A'D'$) є зображенням заданої рівнобічної трапеції $ABCD$ $(BC \parallel AD, CD < AD)$ при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C),$ $D' = f(D)$). Побудуйте зображення при проектуванні f ромба $BPCQ$, у якого $\angle BCP = 60^\circ$.

118. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D', B'C' < A'D'$) є зображенням рівнобічної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD, CD < AD$), у якої висота дорівнює меншій із основ, при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C),\quad D' = f(D)$). Побудуйте зображення при проектуванні f квадрата $BPCQ$ (мається на увазі, що точки A і P розташовані по різні сторони відносно прямої BC).

119. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D', B'C' < A'D'$) є зображенням рівнобічної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD, CD < AD$), у якої висота дорівнює меншій із основ, при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C),\quad D' = f(D)$). Побудуйте зображення при проектуванні f ромба $BPCQ$.

120. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням квадрата $ABCD$, при певному паралельному проектуванні f

($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), \quad D' = f(D)$). Побудуйте зображення при проектуванні f квадрата $BPCQ$, розташованого у площині квадрата $ABCD$.

121. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням заданого прямокутника $ABCD$, при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), \ D' = f(D)$). Побудуйте зображення $A'C'Q'P'$ при проектуванні f прямокутника $ACQP$, розташованого у площині прямокутника $ABCD$ і подібного до прямокутника $ABCD$ з коефіцієнтом подібності $k = \dfrac{AC}{BC}$.

122. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням прямокутника $ABCD$, для якого $AB : AD = 1 : 2$ при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), \quad D' = f(D)$). Побудуйте зображення при проектуванні f квадрата $AQBP$.

123. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням прямокутника $ABCD$, для якого $AB : AD = 1 : 2$ при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), \quad D' = f(D)$). Побудуйте зображення при проектуванні f ромба $AQBP$, діагоналі AB і QP якого відносяться як $m : n, (m, n \in N)$.

124. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням прямокутника $ABCD$, для якого $AB : AD = m : n \quad (m, n \in N)$ при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), \quad D' = f(D)$). Побудуйте зображення при проектуванні f ромба $AQBP$, діагоналі AB і QP якого відносяться як $p : q \quad (p, q \in N)$.

125. Діагональ AC прямокутника $ABCD$ утворює з його стороною AB кут у $60°$. Відомо, заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням прямокутника $ABCD$, для якого $AB : AD = m : n \quad (m, n \in N)$ при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), \quad D' = f(D)$). Побудуйте зображення $A'C'Q'P'$ при проектуванні f прямокутника $ACQP$ ($Q' = f(Q), P' = f(P)$), розташованого у площині прямокутника $ABCD$ і подібного до прямокутника $ABCD$ з коефіцієнтом подібності $k = \dfrac{AC}{BC}$.

126. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням рівнобедреного трикутника ABC, у якого $\angle ABC = 120°$ при певному паралельному проектуванні f $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$. Побудуйте зображення при проектуванні f ромба $AMBN$, у якого $\angle AMB = 60°$.

127. Відомо, що заданий паралелограм $A'B'C'D'$ є зображенням заданого паралелограма $ABCD$, що не є ромбом, при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)$). Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутника, утвореного при перетині бісектрис кутів паралелограма $ABCD$.

128. Відомо, що задана трапеція $A'B'C'D'$ ($B'C' \parallel A'D', B'C' < A'D'$) є зображенням заданої трапеції $ABCD$ при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)$). Побудуйте зображення при проектуванні f точки Q перетину бісектрис кутів $\angle ABC$ і $\angle BAD$ трапеції $ABCD$.

129. На картинній площині α задано еліпс F' з центром у точці O', пряму a' і точку M', про які відомо, що вони, відповідно, є зображеннями деякого кола F з центром у точці O, прямої a і точки M, що належать площині цього кола, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення b' при даному паралельному проектуванні f прямої b, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої a.

130. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутного трикутника, у якого висота, проведена до гіпотенузи, ділить гіпотенузу у відношенні п$m:n$ $(m,n \in N)$, вписаного у коло-оригінал.

131. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутного трикутника, катети якого відносяться як $m:n$ $(m,n \in N)$, вписаного у коло-оригінал.

132. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутного трикутника, у якого катет відноситься до гіпотенузи як $3:5$, вписаного у коло-оригінал.

133. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутного трикутника з кутом у 60°, вписаного у коло-оригінал.

134. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутного трикутника з кутом у $15°$, вписаного у коло-оригінал.

135. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутного трикутника з кутом у $22{,}5°$, вписаного у коло-оригінал.

136. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$ є зображеннями деякого кола F з центром у точці O і вписаного у це коло трикутника ABC, при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при

проектуванні f вписаного у коло F прямокутного трикутника MNK $\angle MNK = 90°$, у якого $\angle MNK$ складає половину кута $\angle ABC$.

137. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f правильного дванадцятикутника, вписаного у коло-оригінал.

138. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f квадрата, вписаного у коло-оригінал.

139. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f правильного восьмикутника, вписаного у коло-оригінал.

140. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f правильного десятикутника, вписаного у коло-оригінал.

141. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f правильного п'ятикутника, вписаного у коло-оригінал.

142. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобедреного трикутника з кутом при вершині у $30°$, вписаного у коло-оригінал.

143. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутника, сторони якого відносяться як $m:n \quad (m,n \in N)$, вписаного у коло-оригінал.

144. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутника, діагоналі якого перетинаються під кутом у $45°$, вписаного у коло-оригінал.

145. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутника, діагоналі якого перетинаються під кутом у 60°, вписаного у коло-оригінал.

146. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f.

Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутника, діагоналі якого перетинаються під кутом у $30°$, вписаного у коло-оригінал.

147. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$ є зображеннями деякого кола F з центром у точці O і вписаного у це коло трикутника ABC, при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при проектуванні f вписаного у коло F прямокутника, діагоналі якого перетинаються під кутом, що складає половину кута $\angle ABC$, вписаного у коло-оригінал.

148. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції з кутом у 60°, подібної до довільної заданої такої рівнобічної трапеції, вписаної у коло-оригінал.

149. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції з кутом у $45°$, вписаної у коло-оригінал.

150. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції з кутом у $22{,}5°$, вписаної у коло-оригінал.

151. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції з кутом у $30°$, вписаної у коло-оригінал.

152. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$ є зображеннями деякого кола F з центром у точці O і вписаного у це коло трикутника ABC, при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції, один з кутів якої складає половину кута $\angle ABC$, вписаної у коло-оригінал.

153. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції з кутом у $45°$, основи якої відносяться як $1:3$, вписаної у коло-оригінал.

154. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції, вписаної у

коло-оригінал, основи якої видно з центра даного кола, відповідно, під кутами у 60° $і\,120^\circ$.

155. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції, вписаної у коло-оригінал, основи якої видно з центра даного кола, відповідно, під кутами у 45° $і\,90^\circ$.

156. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$ є зображеннями деякого кола F з центром у точці O і вписаного у це коло трикутника ABC, при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції, вписаної у коло-оригінал, основи якої видно з центра даного кола під кутами, що дорівнюють $\angle ABC$ і $\frac{1}{2}\angle ABC$.

157. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції, вписаної у коло-оригінал, основи якої видно з центра даного кола під кутами у 120° $і\,90^\circ$.

158. . Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції з кутом у 60°, основи якої відносяться як $1:2$, вписаної у коло-оригінал.

159. Задано еліпс F' з центром у точці O' і хордою $M'N'$ ($O' \notin M'N'$). Побудуйте дотичні до еліпса F', які є паралельними до хорди $M'N'$.

160. Відомо, що задані еліпс F' з центром у точці O' і описаний навколо цього еліпса трикутник $A'B'C'$ є зображеннями деякого кола F з центром у точці O і описаного навколо цього кола трикутника ABC, при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при проектуванні f бісектриси $\angle BAC$ трикутника ABC.

161. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутного трикутника, катети якого відносяться як $m:n$ $(m,n \in N)$, описаного навколо кола-оригінала.

162. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f правильного восьмикутника, описаного навколо кола-оригінала.

163. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f правильного шестикутника, описаного навколо кола-оригінала.

164. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f правильного дванадцятикутника, описаного навколо кола-оригінала.

165. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f правильного п’ятикутника, описаного навколо кола-оригінала.

166. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f правильного десятикутника, описаного навколо кола-оригінала.

167. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобедреного трикутника з кутом при вершині у $120°$, описаного навколо кола-оригінала.

168. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобедреного трикутника з кутом при вершині у $135°$, описаного навколо кола-оригінала.

169. Відомо, що задані еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$ є зображеннями деякого кола F з центром у точці O і вписаного у це коло трикутника ABC, при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобедреного трикутника, описаного навколо кола-оригінала, кут при вершині якого складає $\frac{1}{2}\angle ABC$.

170. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобедреного трикутника з кутом при вершині у $30°$, описаного навколо кола-оригінала.

171. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобедреного трикутника, у якого основа відноситься до висоти як $4:5$, описаного навколо кола-оригінала.

172. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобедреного трикутника, у якого основа відноситься до висоти як $m:n$ $(m,n \in N)$, описаного навколо кола-оригінала.

173. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f ромба з кутом при вершині у $30°$, описаного навколо кола-оригінала.

174. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f ромба, у якого сторона відноситься до висоти як $5:4$, описаного навколо кола-оригінала.

175. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f ромба, у якого сторона відноситься до висоти як $m:n$ $(m,n \in N)$, $m>n$, описаного навколо кола-оригінала.

176. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутної трапеції з кутом у $60°$, описаної навколо кола-оригінала.

177. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутної трапеції з кутом у $45°$, описаної навколо кола-оригінала.

178. Відомо, що задані еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$ є зображеннями деякого кола F з центром у точці O і вписаного у це коло трикутника ABC, при певному паралельному проектуванні f ($A'=f(A), B'=f(B), C'=f(C)$). Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутної трапеції з кутом, що дорівнює куту ABC ($\angle ABC \neq 90°$), описаної навколо кола-оригінала.

179. Відомо, що задані еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$ є зображеннями деякого кола F з центром у точці O і вписаного у це коло трикутника ABC, при певному паралельному проектуванні f ($A'=f(A), B'=f(B), C'=f(C)$). Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутної трапеції з кутом, що складає $\frac{1}{2}\angle ABC$, описаної навколо кола-оригінала.

180. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f.

Задано також деякий $\angle MNK$ $(\neq 90°)$. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутної трапеції з кутом, що дорівнює куту $\angle MNK$, описаної навколо кола-оригінала.

181. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутної трапеції, у якої одна з основ відноситься до висоти як $3:2$, описаної навколо кола-оригінала.

182. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції, у якої одна з основ відноситься до висоти як $3:2$, описаної навколо кола-оригінала.

183. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f прямокутної трапеції, у якої одна з основ відноситься до висоти як $m:n$ $(m,n \in N)$, $m \neq n$, описаної навколо кола-оригінала.

184. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції з кутом у $60°$, описаної навколо кола-оригінала.

185. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції з кутом у $30°$, описаної навколо кола-оригінала.

186. Відомо, що задані еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$ є зображеннями деякого кола F з центром у точці O і вписаного у це коло трикутника ABC, при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції з кутом, що дорівнює куту ABC ($\angle ABC \neq 90°$), описаної навколо кола-оригінала.

187. Відомо, що задані еліпс F' з центром у точці O' і вписаний у цей еліпс трикутник $A'B'C'$ є зображеннями деякого кола F з центром у точці O і вписаного у це коло трикутника ABC, при певному паралельному проектуванні f ($A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$). Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції з кутом, що складає $\frac{1}{2}\angle ABC$, описаної навколо кола-оригінала.

188. . Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Задано також деякий $\angle MNK$ $(\neq 90°)$. Побудуйте зображення при

проектуванні f рівнобічної трапеції з кутом, що дорівнює куту $\angle MNK$, описаної навколо кола-оригінала.

189. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f рівнобічної трапеції, у якої одна з основ відноситься до висоти як $m:n$ $(m,n \in N)$, $m \neq n$, описаної навколо кола-оригінала.

190. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f трапеції, у якої кути, прилеглі до більшої основи, відповідно, дорівнюють $60°$ *і* $45°$, описаної навколо кола-оригінала.

191. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O, при певному паралельному проектуванні f. Побудуйте зображення при проектуванні f трапеції, два протилежних кута якої, відповідно, дорівнюють $60°$ *і* $45°$, описаної навколо кола-оригінала.

Тестові завдання для самоконтролю до розділу ІІ

1. Фігуру F евклідової геометрії називають лінійною, коли

А	Б	В	Г
всі точки цієї фігури належать одній площині.	ця фігура є ламаною	всі точки цієї фігури належать певній прямій	ця фігура має своєю підмножиною певний відрізок.

2. Фігуру F евклідової геометрії називають плоскою, коли

А	Б	В	Г
всі точки цієї фігури належать певній площині	всі точки цієї фігури належать певній прямій	ця фігура є простою замкненою ламаною	ця фігура має своєю підмножиною певний трикутнику

3.Фігуру F евклідової геометрії вважають суттєво плоскою, коли

А	Б	В	Г
ця фігура є лінійною	ця фігура є плоскою, але не є лінійною	ця фігура має три точки, що не лежать на одній прямій	ця фігура містить принаймні три точки, які не належать одній прямій

4. Встановіть відповідність між початком твердження і вірним його закінченням.

1. Для лінійної геометричної фігури паралельне проектування вважають виродженим…

2. Для суттєво плоскої геометричної фігури паралельне проектування вважають виродженим…

3. При виродженому для лінійної геометричної фігури паралельному проектуванні проекцією цієї фігури є …

4. При виродженому для суттєво плоскої геометричної фігури паралельному проектуванні проекцією цієї фігури є…

А. … коли воно є виродженим для площини, що цю фігуру містить

Б. …підмножина прямої

В. … коли воно є виродженим для прямої, що цю фігуру містить

Г. …пряма.

Д. …точка.

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

5. При паралельному проектуванні проекцією трикутника-каркаса **не може бути**

А	Б	В	Г
відрізок	точка	трикутник-каркас	відрізок з виділеною точкою

6. При паралельному проектуванні проекцією плоского трикутника **не може бути**

А	Б	В	Г
плоский трикутник	Відрізок з виділеною точкою	відрізок	трикутник-каркас

7. Зображенням довільного трикутника-каркаса при не виродженому паралельному проектуванні може бути

А	Б	В	Г
довільний плоский трикутник	довільний відрізок	довільний трикутник-каркас	лише трикутник, що є подібним до даного

8. Зображенням довільного плоского трикутника при не виродженому паралельному проектуванні може бути

А	Б	В	Г
довільний плоский трикутник	Лише довільний рівнобедрений трикутник	довільний трикутник-каркас	лише плоский рівнобедрений трикутник

9. Якщо відомо, що заданий трикутник-каркас $A'B'C'$ картинної площини α є зображенням заданого трикутника-каркаса ABC площини β

при певному паралельному проектуванні f, то для побудови зображення при проектуванні f точки M площини α, яка не належить прямим AB, AC, BC, теорему Фалеса доведеться використати не менше ніж

А	Б	В	Г
один раз	два рази	три рази	чотири рази

10. Якщо плоска фігура F' є зображенням плоскої фігури F при певному не виродженому паралельному проектуванні, то фігури F і F' обов'язково є

А	Б	В
рівними	афінно еквівалентними	подібними

11. Будь-яке зображення плоскої геометричної фігури при не виродженому паралельному проектуванні є

А	Б	В	Г
метрично повним	подібно повним	афінно повним	афінно не повним

12. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні $f(A' = f(A)),\ f(B' = f(B)),\ f(C' = f(C))$. При довільній формі трикутника ABC безпосереднє використання цього трикутника не є необхідним для побудови зображення при проектуванні f

А	Б	В	Г
Бісектриси BL трикутника ABC	Висоти CH трикутника ABC	Серединного перпендикуляру до сторони AB трикутника ABC	Медіани AM трикутника ABC

13. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні $f(A' = f(A)),\ f(B' = f(B)),\ f(C' = f(C))$. При довільній формі трикутника ABC безпосереднє використання цього трикутника не є необхідним для побудови зображення при проектуванні f

А	Б	В	Г
центроїда трикутника ABC	ортоцентра трикутника ABC	центра кола, описаного навколо трикутника ABC	інцентра трикутника ABC

14. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні $f(A' = f(A)),\ f(B' = f(B)),\ f(C' = f(C))$, але оригінал загублено. За

зображення при проектуванні f бісектриси BL трикутника ABC можна прийняти

Б	А	В	Г
промінь B'L', де L' - довільна внутрішня точка відрізка A'C'.	відрізок B'L', де L' - довільна точка прямої A'C'.	відрізок B'L', де L' - довільна внутрішня точка відрізка A'C'.	промінь B'L', де L' - довільна точка прямої A'C'.

15. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні $f(A' = f(A)),\ f(B' = f(B)),\ f(C' = f(C))$, але оригінал загублено. За зображення при проектуванні f інцентра трикутника ABC можна обрати

А	Б	В	Г
Довільну точку всередині трикутника $A'B'C'$	Довільну точку всередині трикутника, утвореного середніми лініями трикутника $A'B'C'$	Довільну точку, яка належить плоскому трикутнику, утвореному середніми лініями трикутника $A'B'C'$	Вершину A' трикутника $A'B'C'$

16. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні $f(A' = f(A)),\ f(B' = f(B)),\ f(C' = f(C))$, але оригінал загублено. За зображення при проектуванні f висоти CH трикутника ABC можна обрати

А	Б	В	Г
відрізок C'H', де H' - довільна внутрішня точка відрізка A'B'.	промінь C'H', де L' - довільна точка прямої A'B'.	пряму C'H', де L' - довільна внутрішня точка відрізка A'B'.	відрізок C'H', де H' - довільна точка прямої A'B'.

17. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні $f(A' = f(A)),\ f(B' = f(B)),\ f(C' = f(C))$, але оригінал загублено. За зображення при проектуванні f ортоцентра трикутника ABC можна обрати

А	Б	В	Г
вершину трикутника $A'B'C'$	точку, що знаходиться всередині трикутника $A'B'C'$	Внутрішню точку сторони A'B' трикутника $A'B'C'$	Точку, що знаходиться всередині кута, вертикального до кута $A'B'C'$

18. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні $f(A' = f(A)),\ f(B' = f(B)),\ f(C' = f(C))$, але оригінал загублено. Точка M' є

серединою сторони A'B' трикутника $A'B'C'$. За зображення при проектуванні f серединного перпендикуляра до сторони AB трикутника ABC **не можна обрати**

А	Б	В	Г
пряму T'M', де T' - довільна внутрішня точка відрізка A'C'.	пряму T'M', де T' - довільна внутрішня точка відрізка B'C'.	пряму $C'M'$	Відрізок $C'M'$

19. Відомо, що заданий трикутник $A'B'C'$ є зображенням заданого трикутника ABC при певному паралельному проектуванні $f(A' = f(A)),\ f(B' = f(B)),\ f(C' = f(C))$, але оригінал загублено. За зображення при проектуванні f центра кола, описаного навколо трикутника ABC, можна обрати

А	Б	В	Г
центроїд трикутника $A'B'C'$	вершину B' трикутника $A'B'C'$	Точку, що ділить медіану $C'M'$ трикутника $A'B'C'$ у відношенні 1:2.	Точку, що розташована всередині кута, вертикального до кута $B'A'C'$

20. Зображенням паралелограма при не виродженому паралельному проектуванні не може бути

А	Б	В	Г
відрізок	трапеція	прямокутник	ромб

21. Зображенням квадрата при не виродженому паралельному проектуванні не може бути

А	Б	В	Г
квадрат	довільний ромб	відрізок	довільний прямокутник

22. Серед наведених тверджень вкажіть вірне

А. Зображенням трапеції при паралельному проектуванні може бути лише трапеція.

Б. Зображенням трапеції при паралельному проектуванні може бути паралелограм.

В/Зображенням трапеції при паралельному проектуванні може бути трапеція.

Г. Зображенням довільної трапеції при паралельному проектуванні може бути довільна трапеція.

А	Б	В	Г

23. Встановіть відповідність між початком твердження і вірним його закінченням.

1. Радіус кола,перпендикулярний до хорди цього кола…

2. Радіус кола, проведений до точки дотику дотичної до кола…

3. Середини паралельних між собою хорд кола …

4. Взаємно спряджені діаметри кола…

А. … є перпендикуляром, проведеним з центра кола до дотичної

Б. …належать одному колу

В. … є його взаємно перпендикулярними діаметрами

Г. …ділить дану хорду навпіл.

Д. …належать одному діаметру даного кола.

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

24. На евклідовій площині пряма і круг не можуть

А	Б	В	Г
Мати дві спільні точки	Мати одну спільну точку	Не мати спільних точок	Мати безліч спільних точок

25. Встановіть відповідність між початком твердження і вірним його закінченням.

1.Радіусом еліпса називається відрізок…

2. Хордою еліпса називається відрізок…

3. Середини всіх паралельних між собою хорд даного еліпса належать …

А. … який сполучає дві точки даного еліпса

Б. …він є перпендикулярним до нього

В. … є його взаємно перпендикулярними діаметрами який сполучає центр еліпса з точкою еліпса.

4. Якщо один діаметр еліпса є спряdженим до другого, то …

Г. …він ділить навпіл всу хорди даного еліпсу, паралельні до даного другого діаметру

Д. …одному діаметру даного еліпса

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

26. На евклідовій площині пряма і еліпс не можуть

А	Б	В	Г
не мати спільних точок	мати дві спільні точки	мати одну спільну точку	мати три спільні точки

27. Зображенням кола при паралельному проектуванні не може бути

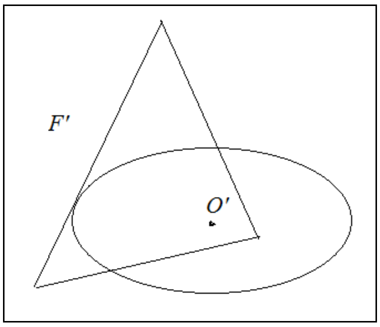
А	Б	В	Г
довільний еліпс	довільна парабола	лише коло	довільний відрізок

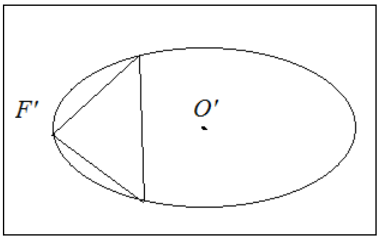
28. Якщо через точку A, що знаходиться у площині еліпса, проходять дві дотичні до даного еліпса, то

А	Б	В	Г
точка A належить даному еліпсу	точка A знаходиться у внутрішній відносно даного еліпса області	точка A є центром даного еліпса	точка A знаходиться у зовнішній відносно даного еліпса області

29. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Побудоване зображення довільного прямокутного трикутника, вписаного у коло-оригінал.

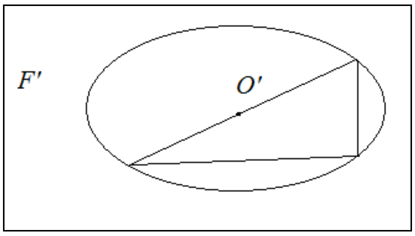
А.

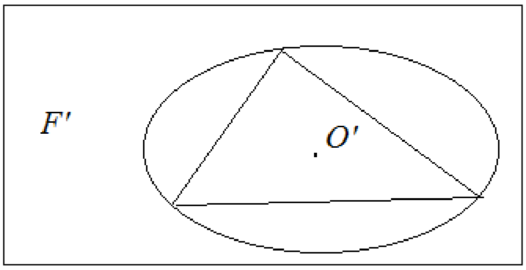




Б.

В.

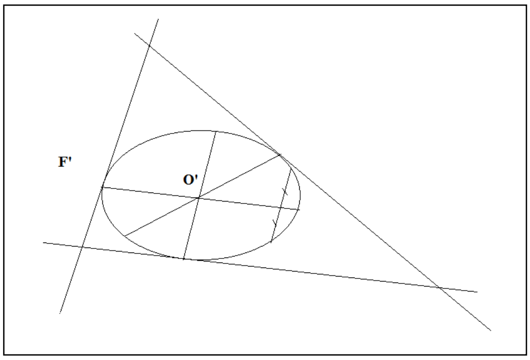


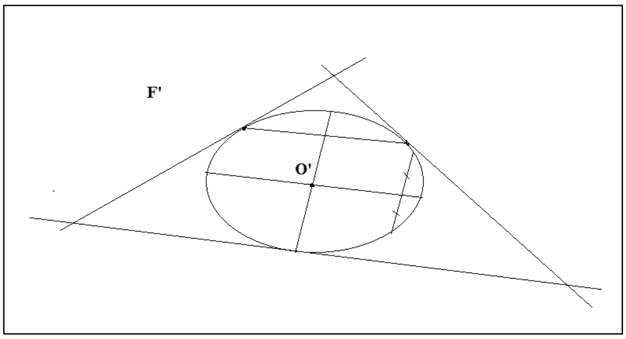


Г.

30. Відомо, що заданий еліпс F' з центром у точці O' є зображенням кола F з центром у точці O при певному паралельному проектуванні. Побудоване зображення рівнобедреного прямокутного трикутника, описаного навколо кола-оригінала.

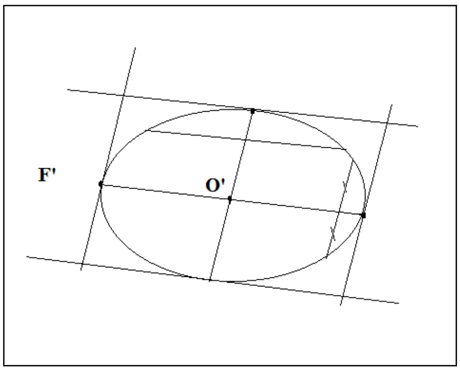
А.



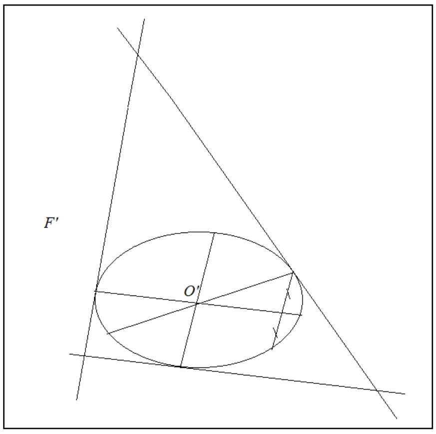


Б.

В.



Г.



Відповіді, розв'язки або вказівки до розв'язання практичних завдань до розділу II

41. Для розв'язання даної задачі треба використати прийом розв'язання задачі 39 і міркування, аналогічні проведеним під час доведення теореми 4.3.

42. Достатньо обґрунтувати, що, якщо точка M площини β не належить жодній з прямих AB, AC, BC, то справедливим є принаймні одне з тверджень $MA \nparallel BC, MB \nparallel AC, MC \nparallel AB$.

43. Див. вказівки до розв'язання задачі 41.

44. Див. вказівки до розв'язання задачі 41.

45. Див. коментарі до розв'язання задачі 41

46. У трикутник-оригінал і трикутник-зображення задані на одному рисунку, трикутники мають спільну основу AC. Це означає, що (див. зауваження до наслідку 2 з теореми 3.2.) зображення M', N', K' точок M, N, K про паралельному проектуванні f співпадають з образами цих

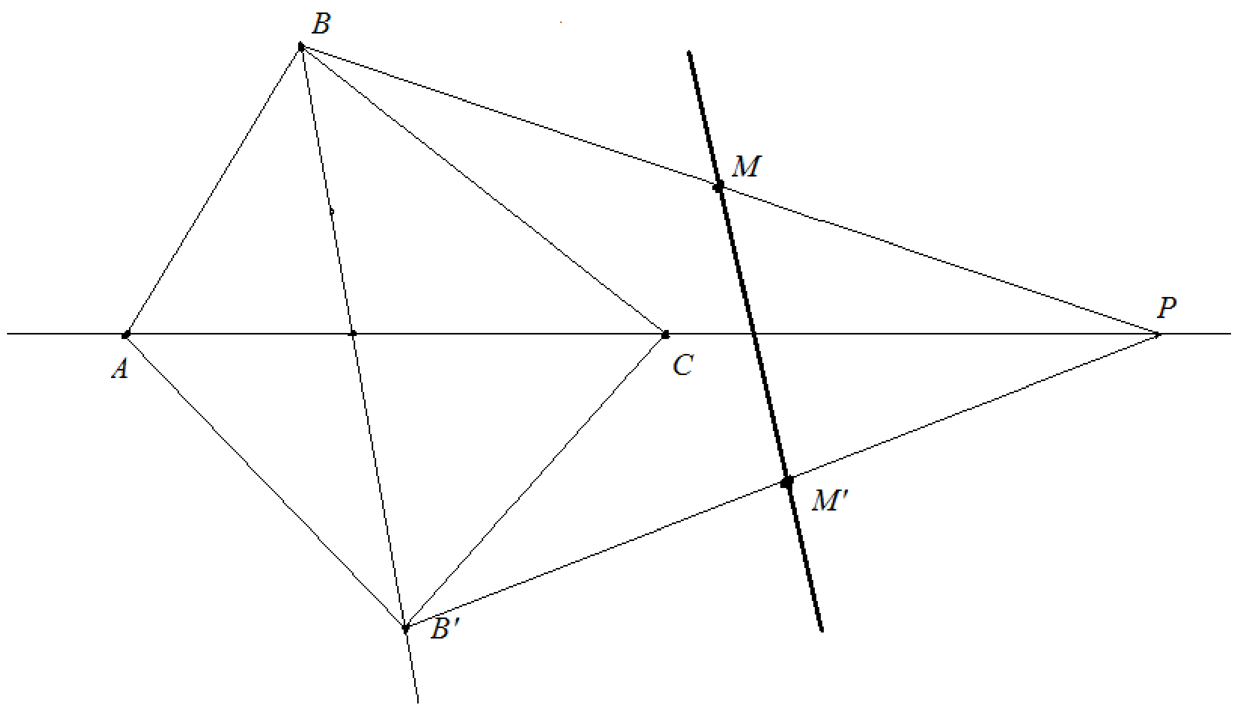


Рис.234

точок при косому стиску h до прямої AC у напрямку прямої BB'.

Розглянемо випадок (1). За умовою задачі пряма BM не співпадає з прямою BB' і не є паралельною до прямої AC. Проведемо пряму BM до перетину з прямою AC у точці P (див. рис. 234) $h(P) = P$, бо пряма AC є прямою інваріантних косого стиску h. Косий стиск є окремим випадком афінного перетворення площини, отже, образом кожної прямої є пряма,

$h(BP) = B'P$. Точка $M' = h(M)$ по-перше, належить прямій $B'P$, по-друге, лежить на прямій b, що проходить через точку M, паралельно до прямої BB': $M' = b \bigcap B'P$. $M' = h(M)$, $M' = f(M)$, точка M' є шуканою.

Розглянемо випадок (2). За умовою задачі пряма BN є паралельною до

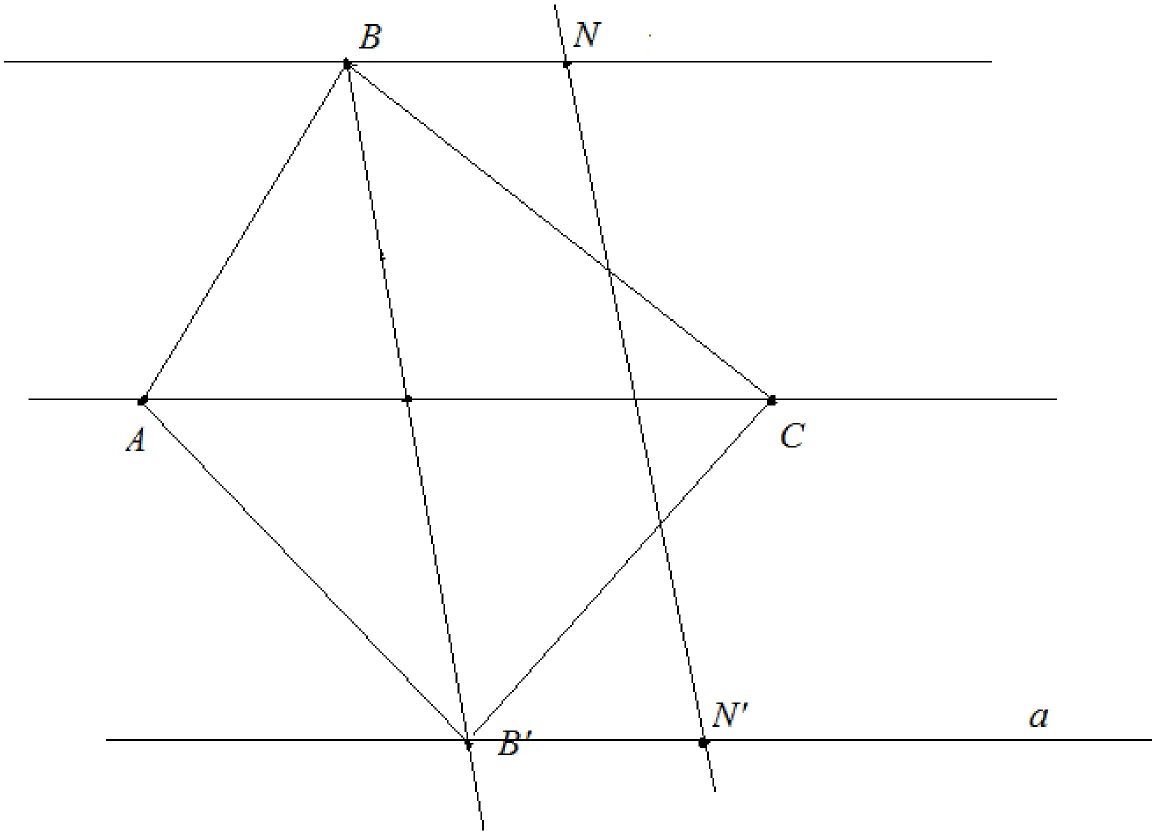


Рис.235

прямої AC $h(AC) = AC, h(B) = B'$ при косому стиску, як і при будь-якому афінному перетворенні площини образом пари паралельних прямих є пара паралельних прямих. Тому $h(BN) = a$, пряма a проходить через точку B' паралельно до прямої AC (рис.), $N' \in a$. З іншого боку точка N' лежить на прямій b, яка проходить через точку N паралельно до прямої BB'. Отже, $N' = a \cap b$, $N' = h(N)$, $N' = f(N)$, точка N' є шуканою.

Розглянемо випадок (3). За умовою задачі точка K лежить на прямій BB'. При косому стиску h до прямої AC у напрямку прямої BB' пряма BB' є інваріантною прямою. Значить, точка $K' = h(K)$ належить BB'. Для побудови точки K' використати теорему Фалеса, спираючись на ті факти, що точка перетину прямих AC і BB' є інваріантною точкою косого стиску h, при косому стиску зберігається просте відношення трьох точок однієї прямої. Але з технічної точки зору зручніше обрати таку довільну точку M, яка не лежить на прямій BB', пряма BM не є паралельною до прямої AC, побудувати точку $M' = h(M)$ так само, як було запропоновано при дослідженні випадку (1), а потім, скориставшись тим фактом, що точка K не

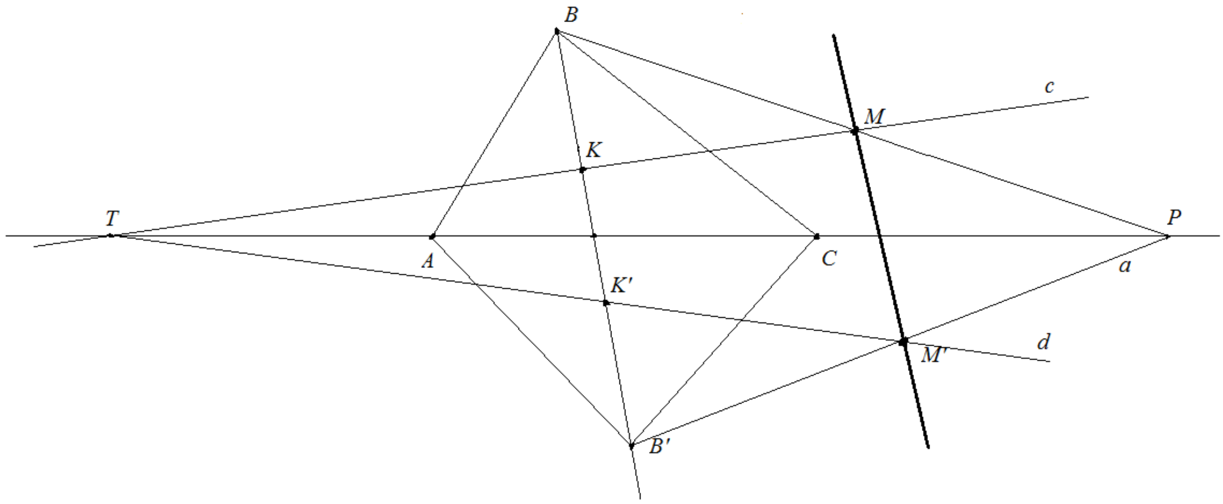


Рис.236

лежить на прямій MM', побудувати точку $K' = h(K)$ у то же спосіб, що і у випадках (1) або (2) (рис. 236) $K' = f(K)$, точка K' є шуканою.

47. Розв'язання задачі можна провести аналогічно до розв'язання задачі 45. Справедливим є той факт, що перетворення площини, обернене до косого стиску до певної прямої є косим стиском до тієї ж самої прямої.

48. Розв'язання задачі можна провести аналогічно до розв'язання задачі 45.

49. Розв'язання задачі можна провести аналогічно до розв'язання задачі 47.

50. Шукана пряма b' проходить через точку A' паралельно до прямої a'. Побудова не вимагає використання оригіналу.

51. Шукана пряма є прямою, яка проходить через точку A' паралельно до прямої b'.

52. Відомо, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника є паралельною до основи цього трикутника. При не виродженому паралельному проектуванні паралельні прямі зображуються паралельними.

53. Відомо, що бісектриса зовнішнього кута KBC трикутника ABC, для якого $AB > BC$, перетинає промінь, доповняльний до променя CA у такій точці L, що $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC}$. Треба використати цей факт і застосувати теорему Фалеса. Можна запропонувати і інші варіанти розв'язання, але уникнути явного використання оригіналу при розв'язанні даної задачі неможливо.

54. Так саме, як і при розв'язанні задачі 53, побудувати спочатку зображення бісектриси кута, вертикального до кута PBA.

55. На промені, доповняльному до променя CA, відкласти відрізок $CL = CA$. Промінь BL буде шуканим зображенням бісектриси. Для обґрунтування справедливості такої побудови див. вказівки до розв'язання задачі 53.

56. Див. вказівки до розв'язання задачі 53.

57. Див. вказівки до розв'язання задачі 55.

58. Для кожного трикутника існують три зовні вписаних кола. Кожне з них дотикається певної сторони трикутника та продовжень двох інших його сторін. Центр такого кола є точкою перетину бісектрис відповідних зовнішніх кутів даного трикутника.

59. Див. вказівки до розв'язання задачі 58.

60. Згідно наслідку 7 з теореми 5. 1 , задане зображення є подібно повним, бо містить зображення правильного трикутника. Отже, поставлену задачу можна розв'язати однозначно (рис 237).

AC Розглянемо на площині β правильний трикутник ABC. Проведемо його медіани AA_1, BB_1, CC_1. Вони одночасно є і висотами трикутника ABC: $AA_1 \perp BC, BB_1 \perp AC, CC_1 \perp AB$. Якщо задана пряма l є паралельною, припустимо, для визначеності, до сторони AC цього трикутника, то для побудови необхідної прямої a достатньо через точку P провести пряму,

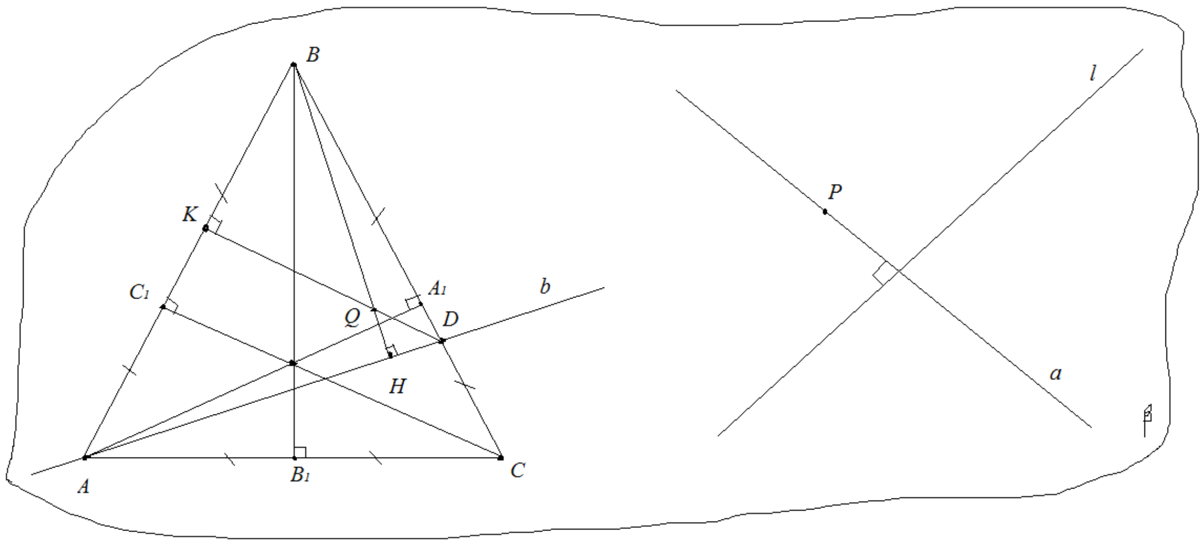


Рис. 237

паралельну до прямої BB_1.

Розглянемо той випадок, коли задана пряма l не є паралельною до жодної з прямих AA_1, BB_1, CC_1. Проведемо через точку A паралельно до прямої l пряму b. Ця пряма перетне пряму BC у точці D, яка не співпадає ані з точкою B, ані з точкою C. Утвориться трикутник ABD, одна з висот якого буде лежати на прямій AA_1. Друга висота цього трикутника буде належати прямій DK, яка проходить через точку D паралельно до прямої CC_1. Нехай $Q = AA_1 \bigcap DK$. Тоді точка Q є ортоцентром трикутника ABD, пряма BQ є прямою, що містить висоту цього трикутника, проведену до сторони AD, $BQ \perp b$. Тепер зрозуміло, що пряма a проходить через точку P паралельно до прямої BQ.

Властивості паралельного проектування дозволяють виконати аналогічні побудови на картинній площині α. Безпосереднє використання оригіналу для цього не є потрібним.

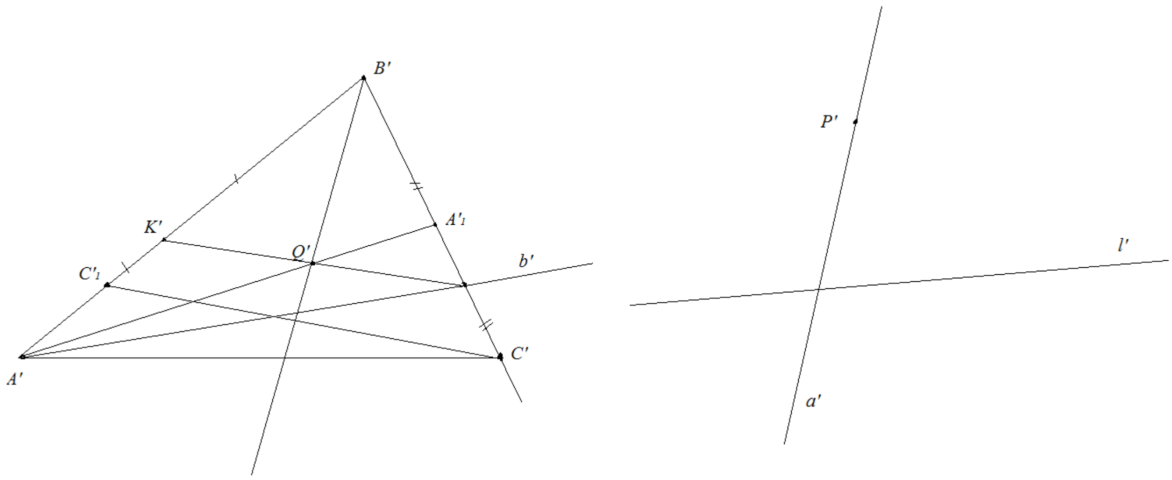


Рис. 238

Розглянемо лише той випадок, коли задана пряма l' не є паралельною до жодної з прямих $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$, які містять сторони заданого трикутника $A'B'C'$ (рис 238).

1. Побудуємо медіани $A'A_1'$ і $C'C_1'$ заданого трикутника $A'B'C'$.

2. Через точку A', паралельно до заданої прямої l', проведемо пряму b'. Нехай $D' = b' \bigcap B'C'$.

3. Через точку D' паралельно до прямої $C'C_1'$ проведемо пряму $D'K'$. Позначимо $Q' = A'A_1' \bigcap D'K'$.

4. Проведемо пряму $B'Q'$.

5. Через точку P' паралельно до прямої $B'Q'$ проведемо пряму a', яка є шуканим зображенням прямої a.

61. Медіана, проведена до гіпотенузи трикутника ABC, одночасно, є і його висотою. Тому, якщо задана пряма l' є паралельною до будь-якої із сторін трикутника $A'B'C'$, розв'язок задачі є очевидним. Якщо пряма l' не є паралельною до жодної з сторін трикутника $A'B'C'$, можна через точку C' паралельно до прямої l' провести пряму b, яка перетне пряму $A'B'$ у певній точці K' так, що утвориться трикутник $C'B'K'$. Зображення прямих, що містять висоти, проведені до сторін BK' і CB трикутника CBK, що є оригіналом для трикутника $C'B'K'$ при паралельному проектуванні f ($f(C) = C'$, $f(B) = B'$, $f(K) = K'$), легко побудувати. Точка перетину цих прямих буде зображенням ортоцентра трикутника CBK. Тепер можна побудувати зображення прямої, перпендикулярної до прямої b, а за її допомогою і шукати зображення прямої a.

62. Задане зображення, згідно наслідку 5 теореми 5. 1, є метрично повним, отже, сформована задача має єдиний розв'язок.

Для знаходження такого розв'язку можна на площині трикутника ABC відновити точку P і пряму l, провести через точку P пряму a, перпендикулярну до прямої l, а потім побудувати зображення a' прямої a.

Задачу можна розв'язати і за зразком задачі 58.

63. Побудувати медіану $B'B_1'$ трикутника $A'B'C'$. Шукане зображення перпендикуляра є відрізком, паралельним до прямої $B'B_1'$.

64. Наявність зображення трикутника і його ортоцентра дозволяє побудувати зображення прямих, що містять висоти даного трикутника. Далі задачу можна розв'язати за зразком розв'язання задачі 60.

65. Наявність зображень двох висот трикутника дозволяє побудувати зображення серединних перпендикулярів до двох сторін даного трикутника.

66. Див. розв'язання задачі 64.

67. Див. розв'язання задачі 65.

68. Див. розв'язання задачі 60.

69. Див. розв'язання задачі 60.

70. Див. розв'язання задачі 60.

71. Застосування трикутника оригінала не є обов'язковим. Достатньо провести медіани $A'A_1'$ і $B'B_1'$ заданого трикутника $A'B'C'$. $O' = A'A_1' \cap B'B_1'$. На промені, доповняльному до променя $B_1'B'$ відкласти відрізок $B_1'D' = B_1'O'$. Трикутник $A'D'C'$ є шуканим.

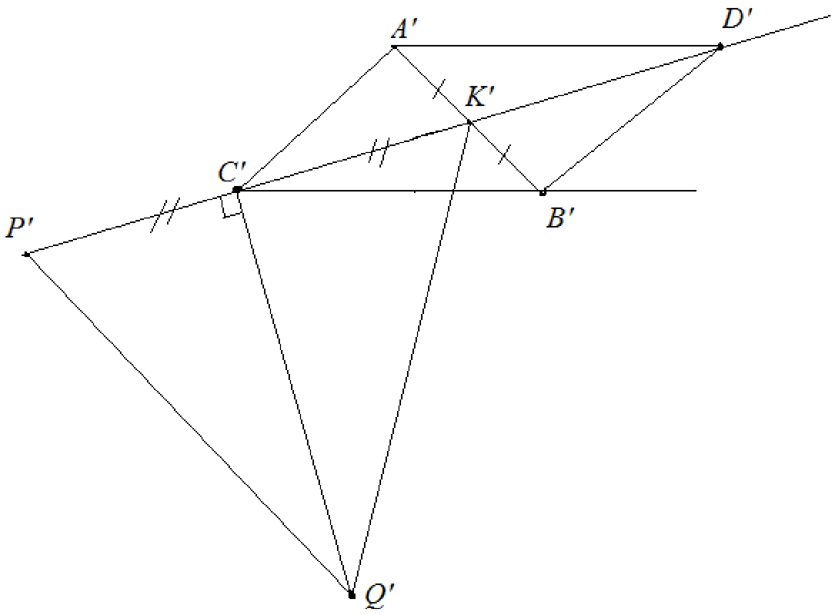


Рис. 239

72. Див. розв'язання задачі 60.

73. Побудувати оригінал зображення. Для побудови точки $D' = f(D)$ використати теорему Фалеса.

Можна обмежитися лише побудувати на картинній площині. Але уникнути допоміжних побудов неможливо. Треба побудувати медіану $C'K'$ заданого трикутника $A'B'C'$. На промені, доповняльному до променя $C'K'$, відкласти відрізок $C'P' = C'K'$, побудувати рівносторонній трикутник

$P'Q'K'$. На промені, доповняльному до променя $K'C'$, треба відкласти відрізок $K'D' = Q'C'$. Трикутник $A'D'C'$ є шуканим.

74. Можна уникнути побудови і явного використання оригіналу. У заданому трикутнику $A'B'C'$ достатньо провести медіану $B'B_1'$, через точку C' паралельно до прямої $B'B_1'$ провести пряму a'. Точка D' є точкою перетину прямих $A'B'$ і a', трикутник $B'D'C'$ є шуканим.

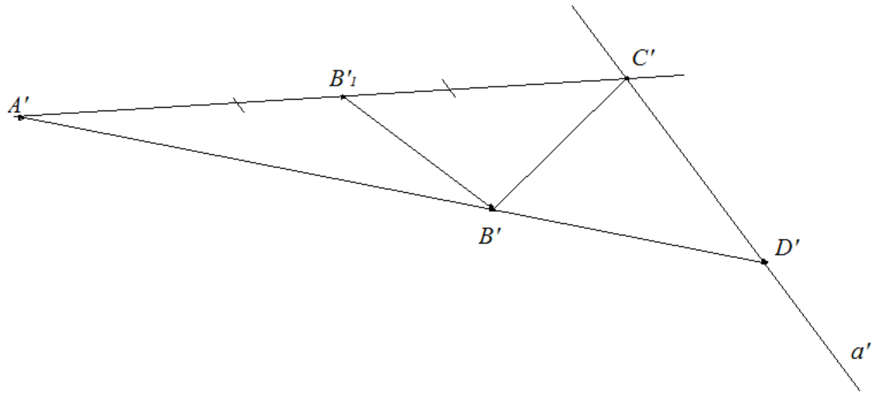


Рис. 240

75. Див. розв'язання задачі 73.

76. Можна уникнути побудови і явного використання оригіналу. У трикутнику $A'B'C'$ можна провести медіани $A'A_1'$ і $C'C_1'$, через точку C' паралельно до прямої $A'A_1'$ провести пряму a', через точку B' паралельно до прямої $C'C_1'$ провести пряму b'. $D' = a' \bigcap b'$, трикутник $B'C'D'$ є шуканим.

77. Безпосереднє використання трикутника-оригінала є обов'язковим. Можна побудувати квадрат-оригінал $AMNC$, провести висоту BH заданого трикутника ABC, знайти точку P перетину прямої BH з прямою MN. Потім, використовуючи теорему Фалеса, побудувати точку $H' = f(H)$ як точку прямої $A'C'$, побудувати точку $P' = f(P)$ як точку прямої $B'H'$. Далі, через точку P' паралельно до прямої AC провести пряму a, через точку A' паралельно до прямої $B'H'$ провести пряму b, через точку C' паралельно до прямої $B'H'$ провести пряму c, $M' = a \bigcap b, N' = a \bigcap c, M' = f(M),\ N' = = f(N)$, паралелограм $A'M'N'C'$ є шуканим зображенням квадрата $AMNC$.

78. Безпосереднє використання трикутника-оригінала є обов'язковим. Задачу можна розв'язати за зразком розв'язання задачі 76.

Якщо у заданому трикутнику ABC сторони $AB \neq BC$, можна запропонувати інший шлях розв'язання, технологічно, можливо, більш зручний. (У випадку $AB \neq BC$ він підходить і для розв'язання задачі 76).

У зовнішній відносно трикутника ABC області побудуємо прямокутник $AMNC$, у якого $AM : AC = 1:2$. Проведемо висоту BH трикутника ABC. Через середину K сторони AC, паралельно до прямої BH, проведемо пряму a до перетину з прямою MN у точці Q. Побудуємо відрізок BQ. Він перетне пряму AC у точці T, яка не співпадає з точкою H.

За допомогою теореми Фалеса на прямій $A'C'$ побудуємо точки $H' = f(H), T' = f(T)$. Через середину K' відрізка $A'C'$ паралельно до прямої $B'H'$ проведемо пряму a. Нехай $Q' = BT \bigcap a, Q' = f(Q)$. Через точку Q' паралельно до прямої $A'C'$ проведемо пряму b. Через точки A' і C' паралельно до прямої $B'H'$, відповідно, проведемо прямі c і d, $M' = b \bigcap c, N' = b \bigcap d, M' = f(M), N' = f(N)$. Паралелограм $A'M'N'C'$ є шуканим зображенням прямокутника $AMNC$.

79. Для розв'язання даної задачі побудова і безпосереднє використання оригіналу не є необхідним.

Можна провести медіану $C'Q'$ заданого трикутника $A'B'C'$, через точки A' і B', паралельно до прямої $A'B'$, яка не містить точку C', на прямій a відкласти відрізок $A'M' = 2 \cdot C'Q'$, на прямій b відкласти відрізок $B'H' = A'M'$, $M' = f(M), N' = f(N)$, паралелограм $A'M'N'B'$ є шуканим зображенням квадрата $AMNB$.

80. Див. вказівки до розв'язання задачі 78.

81. Див. вказівки до розв'язання задачі 78.

82. Для розв'язання даної задачі побудова і безпосереднє використання оригіналу не є необхідним. Достатньо через середину M' сторони $A'B'$ заданого трикутника $A'B'C'$ паралельно до прямої $B'C'$ провести пряму a до перетину з прямою $A'C'$ у точці N' і паралельно до прямої $A'C'$ провести пряму b до перетину з прямою $B'C'$ у точці K'. Паралелограм $C'K'M'N'$ є шуканим зображенням квадрата-оригінала.

83. Для розв'язання даної задачі побудова і безпосереднє використання оригіналу не є необхідним. На стороні $A'B'$ заданого трикутника $A'B'C'$ треба побудувати таку точку T', що $A'T' : T'B = 1:3$.

84. Для розв'язання даної задачі побудова і безпосереднє використання оригіналу не є необхідним.

Достатньо у заданому трикутнику $A'B'C'$ провести медіану $C'M'$, через середини N' і K' відрізків $B'N'$ і $M'A'$ паралельно до прямої $C'M'$, відповідно, провести прямі b і a. $Q' = b \bigcap B'C'$, $P' = a \bigcap A'C'$, паралелограм $Q'N'K'P'$ є шуканим зображенням квадрата-оригінала.

85. Задача має безліч розв'язків. Зрозуміло, що, якщо точка L є тією вершиною квадрата-оригінала, яка належить гіпотенузі AB трикутника-оригінала, то відрізок CL є бісектрисою трикутника ABC, проведеною із вершини прямого кута. Треба обґрунтувати, що за умови даної задачі у якості зображення L' точки L можна прийняти довільну внутрішню точку відрізка $A'B'$.

86. Див. вказівки до розв'язання задачі 84.

За допомогою теореми Фалеса треба побудувати на відрізку $B'A'$ таку точку L', що $B'L' : L'A' = m : n$.

87. Для розв'язання даної задачі побудова і безпосереднє використання оригіналу не є необхідним.

Обгрунтувати, що, якщо відрізок CH є висотою, проведеною до гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC, то $BH : HA = m^2 : n^2$. Отже, за допомогою теореми Фалеса, на відрізку $B'A'$ можна побудувати таку точку H', що $B'H' : H'A' = m^2 : n^2$, $H' = f(H)$. На промені, доповняльному до променя $H'C'$ треба відкласти відрізок $H'D' = H'C'$. Через середину M' відрізка $A'B'$ паралельно до прямої $C'H'$ треба провести пряму a. Точка Q' є точкою перетину прямих $B'D'$ і a, $Q' = f(Q)$, трикутник $A'Q'B'$ є шуканим.

88. Задача має єдиний розв'язок. З технічної точки зору зручніше за все побудувати медіану $B'P'$ трикутника $A'B'C'$, на промені, доповняльному до променя $P'B'$, відкласти відрізок $P'D' = B'P'$. Паралелограм $A'B'C'D'$ буде шуканим зображенням паралелограма $ABCD$ при паралельному проектуванні f.

89. Для розв'язання даної задачі побудова і безпосереднє використання оригіналу не є необхідним.

У заданому трикутнику $A'B'C'$ провести медіани $A'A_1'$, $B'B_1'$, $C'C_1'$ які перетинаються у певній точці O', і продовжити кожну з них, відповідно, на відрізки $A_1'E' = O'A_1'$, $B_1'H' = O'B_1'$, $C_1'D' = O'C_1'$. Шестикутник $A'D'B'E'C'H'$ буде шуканим зображенням правильного шестикутника $ADBECH$ при паралельному проектуванні f.

90. Розглянемо рівнобедрений трикутник ABC, у якому $\angle ABC = 120°$. Зрозуміло, що у цьому трикутнику саме $AB = BC$. (рис. 241). Проведемо медіану BK трикутника ABC. Вона одночасно буде і бісектрисою, і висотою цього трикутника, $\angle ABK = 60°$, $\angle AKB = 90°$. Проводимо промінь BL, доповняльний до променя BC. $\angle LBA = 180° - \angle ABC =$
$= 180° - 120° = 60°.$
Паралельно до прямої BK, у ту півплощину відносно прямої AC, що містить точку B, проведемо промінь AP. $\angle PAB = 90° - \angle BAC = 90° - 30° = 30°$. Позначимо через M точку перетину променів AP і BL. Утворений трикутник AMB є правильним. Через середину T відрізка AB проведемо пряму MT до перетину з прямою BK у точці N. Чотирикутник $AMBN$ буде шуканим ромбом.

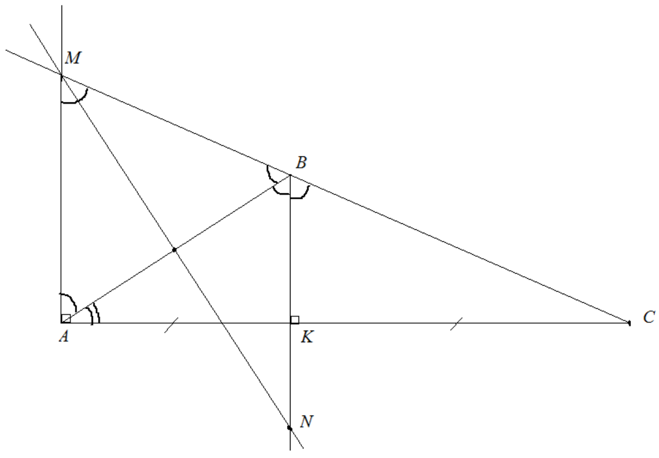


Рис. 241

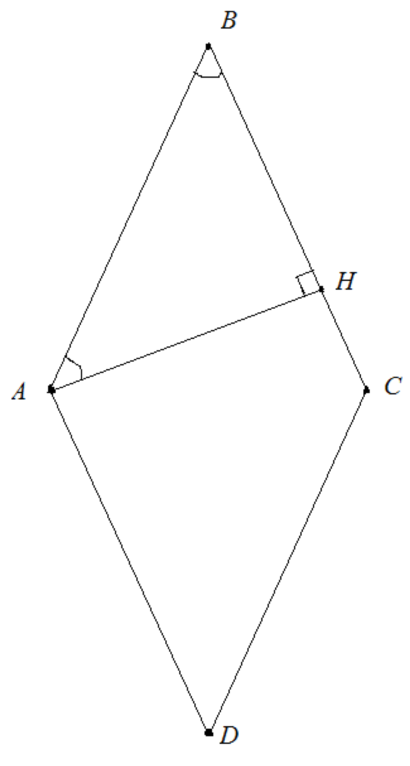
Властивості зображень геометричних фігур при паралельному проектуванні дозволяють виконати всі аналогічні побудови на підставі трикутника $A'B'C'$. Безпосереднє використання трикутника-оригінала ABC для цього не є потрібним.

91. Через середину P' відрізка $B'C'$ треба провести промінь $A'P'$. Безпосереднє використання оригінала не є потрібним.

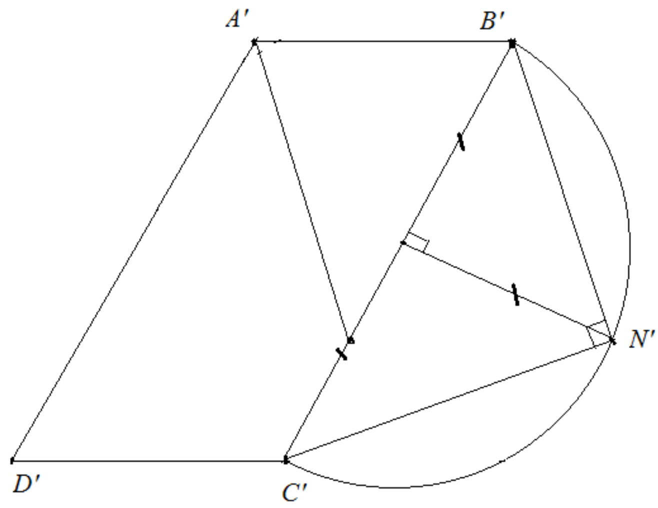
92. Див. вказівки до розв'язання задачі 60.

93. За умови задачі зрозуміло, що меншою основою трапеції-оригіналу є відрізок BC. Для розв'язання задачі треба побудувати відрізок $M'N'$, що сполучає середини основ $B'C'$ і $A'D'$ трапеції $A'B'C'D'$, через точки B' і C' паралельно до прямої $M'N'$, відповідно, провести прямі a і b до перетину з відрізком $A'D'$ у точках H' і P'. Відрізки $B'N'$ і $C'P'$ є шуканими зображеннями висот трапеції $ABCD$. За умови задачі відновлення форми трапеції-оригінала $ABCD$ не є можливим, та і потреби у цьому немає. Розв'язок задачі умовою задачі визначений однозначно.

94. Умовою задачі форму ромба-оригінала визначено однозначно. Отже, задачу можна розв'язати за теоремою Фалеса при явному використанні оригіналу. Але зрозуміло, що менше діагональ AC ромба-оригінала $ABCD$ ділить цей ромб на два правильних трикутника, а кожна висота правильного трикутника одночасно є і його медіаною. Тому достатньо знайти середину K' відрізка $A'D'$ і на промені, доповняльному до променя $A'D'$, відкласти відрізок $A'H' = A'K'$. Відрізок $B'H'$ буде шуканим зображенням висоти BH.



95. Умовою задачі форму ромба-оригінала визначено однозначно. Тому задачу можна розв'язати за теоремою Фалеса при явному застосуванні оригінала. Але, використовуючи властивості оригінала, можна обмежитися і побудувати лише на картинній площині. Дійсно, розглянемо ромб $ABCD$, у якого $\angle ABC = 45°$ (рис. 242). Проведемо його висоту $AH \perp BC$. Трикутник ABH є рівнобедреним прямокутним. Нехай $AH = BH = a$. Тоді $AB = a\sqrt{2}$. Але $ABCD$– ромб. Отже, і $BC = a\sqrt{2}$,



$B'N'=B'K'$

Рис. 242

$BH : BC = a : a\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$. А під час зображення фігур при паралельному проектуванні зберігається відношення відрізків, які належать одній прямій. Значить, на стороні $B'C'$ заданого паралелограма $A'B'C'D'$ достатньо побудувати таку точку H', що $B'H' : B'C' = 1 : \sqrt{2}$. Такі побудови можна виконати, наприклад, наступним чином (див. рис. 242). **1**) На стороні $B'C'$ заданого паралелограма $A'B'C'D'$, як на діаметрі, побудувати півколо. Нехай $B'M' = M'C'$, точка M' є центром даного півкола. **2**) Перпендикулярно до діаметра $B'C'$ провести радіус $M'N'$. Трикутник $B'H'C'$ є рівнобедреним прямокутним трикутником з гіпотенузою $B'C'$. Якщо $B'N' = N'C' = b$, то $B'C' = b\sqrt{2}$, $B'H' : B'C' = b : b\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$. **3**) Отже, для побудови точки $H' = f(H)$ достатньо на відрізку $B'C'$ відкласти відрізок $B'N' = B'N'$. Відрізок $A'H'$ є шуканим зображенням висоти AH ромба $ABCD$ при паралельному проектуванні f.

96. Див. вказівки до розв'язання задачі 94.

97. Задача є у повному сенсі оберненою до задачі 93.

98. Задача є у повному сенсі оберненою до задачі 94.

99. Задача є у повному сенсі оберненою до задачі 95.

Рис. 243

100. Для розв'язання даної задачі можна побудувати правильний восьмикутник-оригінал і використати загальну методику побудови зображень заданих n-кутників, $n \in N, n > 3$ (див. §6).

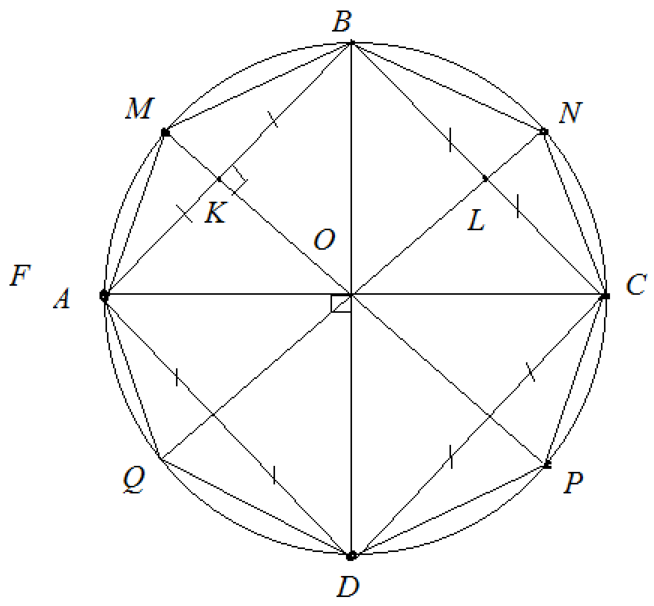


Рис. 244

Можна розв'язати дану задачу за зразком розв'язання задачі 94. Для останнього, перш за все, з'ясуємо певні особливості оригіналу. Зручніше за все будувати правильний восьмикутник вписаним у коло.

Розглянемо довільне коло з центром у точці O (рис 244). Проведемо у ньому взаємно перпендикулярні діаметри AC і BD. Чотирикутник $ABCD$ є квадратом, вписаним у коло F. Через середину K відрізка AB проведемо діаметр MP кола F. Через середину L відрізка BC проведемо діаметр QN. Восьмикутник $AMBNCPDQ$ є правильним. Нехай відрізок $AK = a$. Тоді $OK = a$, $OM = OA = a\sqrt{2}$, $OM : OK = a\sqrt{2} : a = \sqrt{2} : 1$. Зображенням квадрата $ABCD$ при невиродженому паралельному проектуванні згідно теореми 4.2 може бути довільний паралелограм.

Розглянемо який-небудь паралелограм $A'B'C'D'$. Будемо вважати, що він є зображенням квадрата $ABCD$ при паралельному проектуванні f,

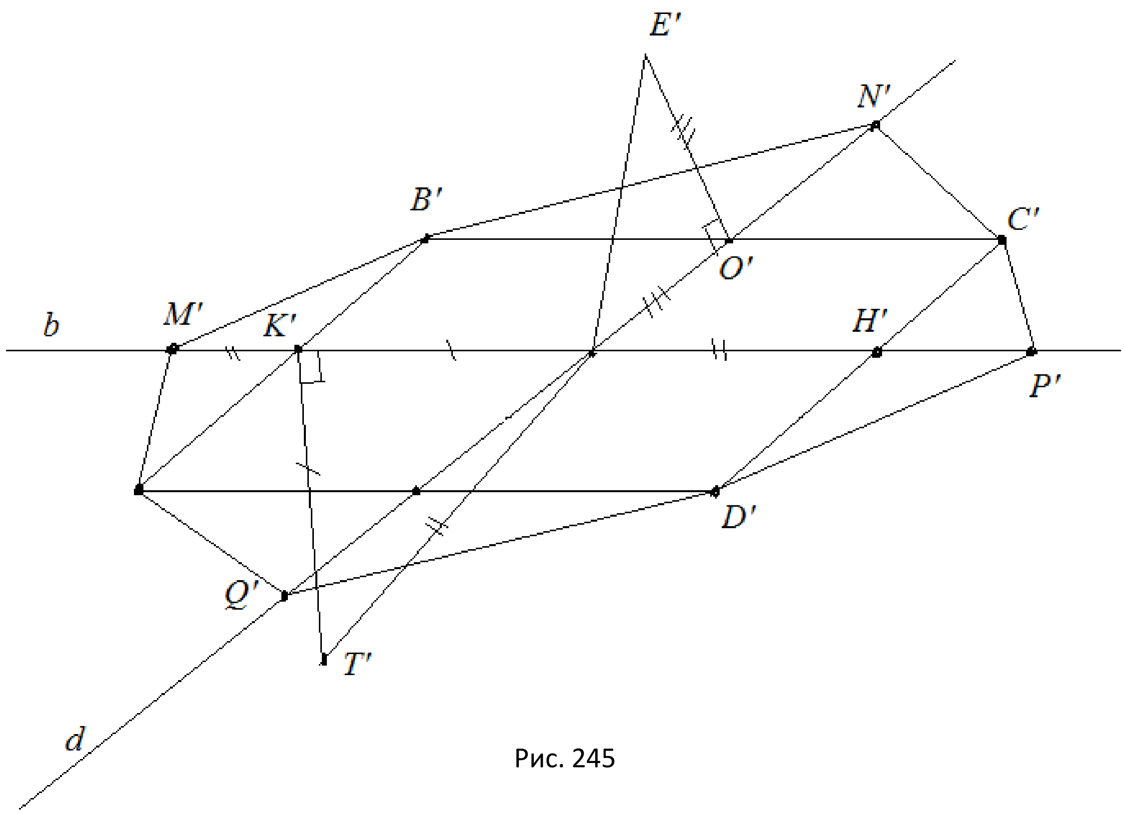


Рис. 245

$A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)$. Через середину K' сторони $A'B'$ ($K' = f(K)$) і через середину H' сторони $D'C'$ проведемо пряму b (рис. 245). Аналогічну пряму d проведемо через середини відрізків $B'C'$ і $A'D'$. $O' = b \cap d$, $O' = f(O)$. На відрізку $O'K'$, як на катеті, побудуємо рівнобедрений прямокутний трикутник $O'K'T'$ ($O'K' = K'T'$). Тоді $O'T' = O'K'\sqrt{2}$. На промені $O'K'$ відкладемо відрізок $O'M' = O'T'$. Зрозуміло, що $O'M' : O'K' = O'K'\sqrt{2} : O'K' = \sqrt{2} : 1$. Це означає, що $M' = f(M)$. На промені $O'H'$ побудуємо відрізок $O'P' = O'M'$, $P' = f(P)$. Аналогічні побудови виконаємо і на прямій d (див. рис. 245). $O'N' = O'Q' = O'E'$, $Q' = f(Q), N' = f(N)$. Восьмикутник $A'M'B'N'C'P'D'Q'$ є шуканим зображенням правильного восьмикутника.

101. Розв'язання задачі є аналогічним до розв'язання задачі 99. Воно спирається на той факт, що у правильного п'ятикутника всі діагоналі є рівними між собою, якщо п'ятикутник $ABCDE$ є правильним, а його діагоналі перетинаються у точці N (рис. 246), то чотирикутник $ABNE$ є ромбом, $AC \parallel DE$, $\dfrac{ND}{BN} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Довільний паралелограм $A'B'N'E'$ картинної площини α обирають за зображення ромба $ABNE$ при певному паралельному проектуванні f так, що $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), E' = f(E)$ (рис 247). На відрізку $B'N'$, як на катеті, будують такий прямокутник трикутник $T'B'N'$ ($\angle T'B'N' = 90°$), що $T'B' = 2B'N'$. Тоді $T'N' = B'N'\sqrt{5}$. На промені $T'N'$ відкладають відрізок $T'K' = B'N'$. $K'N' = B'N'(\sqrt{5}-1)$. Якщо точка M' є серединою відрізка $K'N'$, то $M'N' = B'N'\dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2}$. На промені, доповняльному до променя $N'B'$, відкладають відрізок $N'D' = M'N'$. $N'D' : B'N' = \left(B'N'\dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2} \right) : B'N' = \dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2}$. Отже, $D' = f(D)$. Точку C' знаходять як точку перетину прямої $E'N'$ і прямої, що проходить

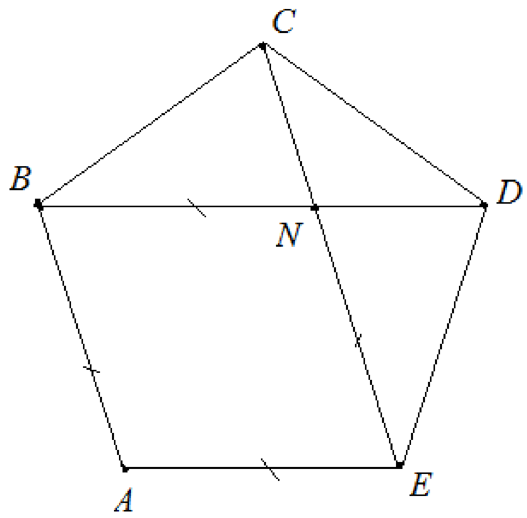


Рис. 246

через точку A' паралельно до прямої $E'D'$. $C' = f(C)$, п'ятикутник $A'B'C'D'E'$ є шуканим зображенням правильного п'ятикутника.

102. Згідно умови задачі, у даній трапеції $A'B'C'D'$ основами є сторони $B'C'$ і $A'D'$, $B'C' < A'D'$. У всьому іншому вона може бути цілком довільною. Згідно умов задачі, форму оригінала трапеція $A'B'C'D'$ визначає однозначно. Отже, можна побудувати оригінал і розв'язувати дану задачу за допомогою теореми Фалеса. Але дану задачу можна розв'язати і без явного використання оригіналу (див. рис 246). У заданій трапеції $A'B'C'D'$ треба провести пряму $M'N'$, яка проходить через середини її основ ($B'M' = M'C'$, $A'N' = N'D'$). Через вершину C', паралельно до прямої $M'N'$, треба провести пряму, яка перетне основу трапеції $A'D'$ у точці P'. Якщо точка Q' є серединою бічної сторони $C'D'$, то шукане зображення O' центра O кола, описаного навколо трапеції-оригінала $ABCD$, є точкою перетину прямих $M'N'$ і $Q'P'$.

103. Задачу можна розв'язати за зразком розв'язання попередньої задачі, без побудови і явного використання оригінала.

За умовами задачі у заданій трапеції $A'B'C'D'$ основами є сторони $B'C'$ і $A'D'$, $B'C' < A'D'$, у всьому іншому вона може бути цілком довільною.

У заданій трапеції треба провести пряму $M'N'$, що сполучає середини її основ ($B'M' = M'C'$, $A'N' = N'D'$) (рис 247). Через вершину C' паралельно до прямої $M'N'$ треба провести пряму, яка перетне основу трапеції $A'D'$ у точці P'. Нехай точка K' ділить відрізок $C'P'$ у відношенні $2:1$. Якщо точка Q' є серединою бічної сторони $C'D'$, то шукане зображення O' центра O кола, описаного навколо трапеції-

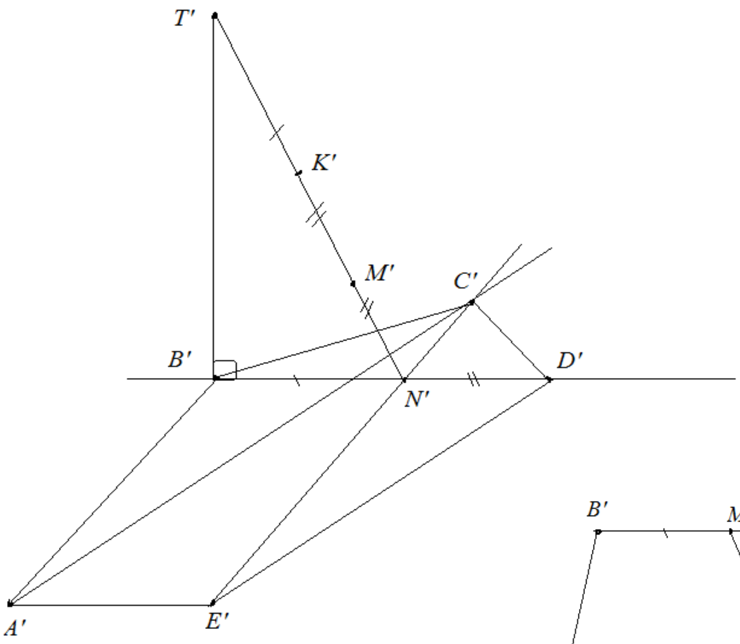
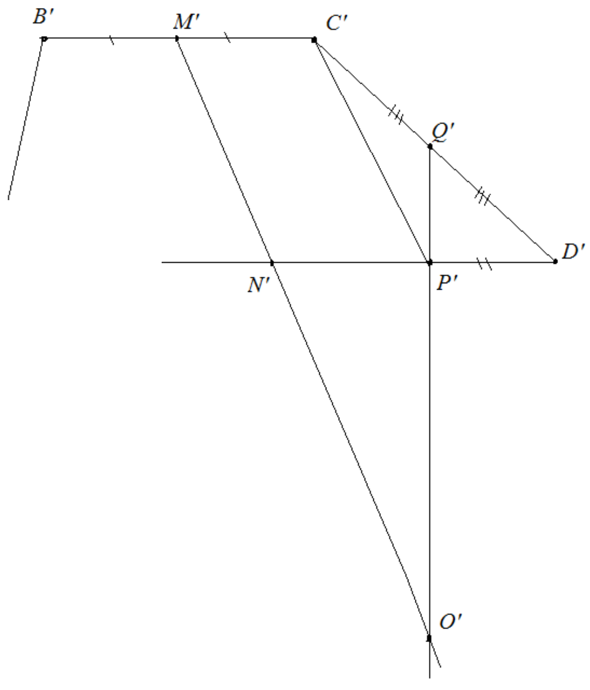


Рис. 247



оригінала $ABCD$, є точкою перетину прямих $M'N'$ і $Q'K'$.

104. Шукане зображення співпадає з серединою відрізка $A'D'$.

105. Задачу можна розв'язати без явного використання оригіналу.

У заданій трапеції $A'B'C'D'$ треба провести пряму $M'N'$, що сполучає середини її основ ($(B'M' = M'C',\ A'N' = N'D')$. Через вершину C' паралельно до прямої $M'N'$ треба провести пряму, яка перетне основу трапеції $A'D'$ у точці P'. Нехай точка K' ділить відрізок $P'D'$ у відношенні $1:2$ (рис 248). Якщо точка Q' є серединою бічної сторони $C'D'$, то шукане зображення O' центра O кола, описаного навколо трапеції-оригінала $ABCD$, є точкою перетину прямих $M'N'$ і $Q'K'$.

106. Вказівка. Зрозуміло, що у трапеції $ABCD$ основами є відрізки BC і AD, $BC : AD = B'C' : A'D'$.

Рис. 248

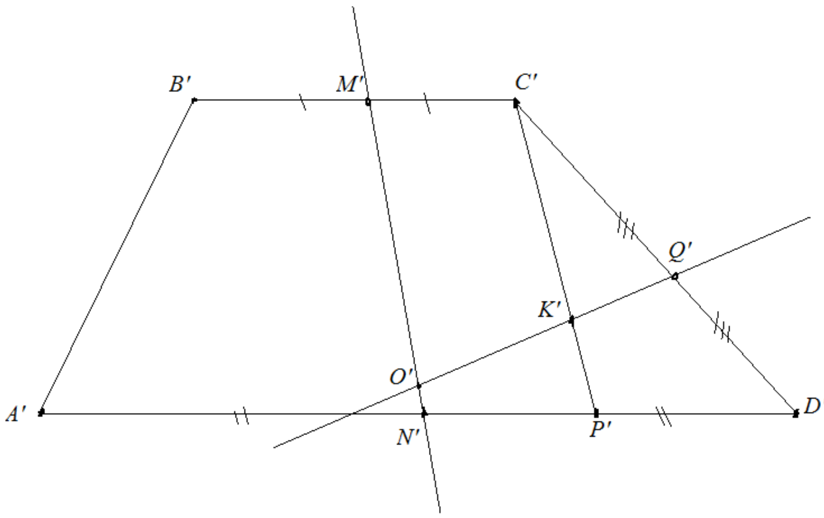
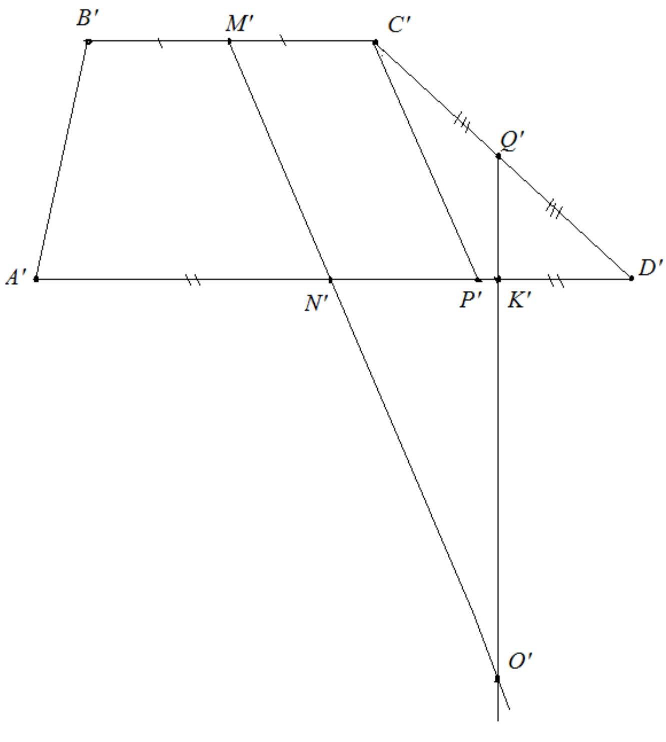


Рис. 249

Розв'язання даної задачі вимагає безпосереднього використання трапеції-оригіналу трапеції $ABCD$ треба побудувати серединний перпендикуляр l до бічної сторони CD і знайти точку K перетину прямої l з прямою AD. Зображення K' точки K при паралельному проектуванні f на картинній площині треба побудувати за допомогою теореми Фалеса.

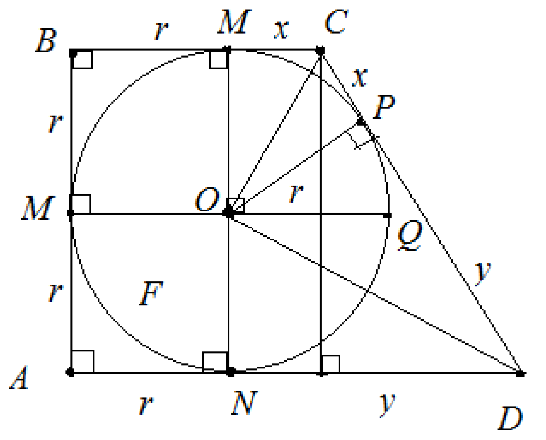


107. Всі прямокутні трапеції з кутом у $60°$, описані навколо одного й того ж кола, є рівними між собою. Тому умова даної задачі однозначно визначає форму оригінала. Отже, можна побудувати трапецію-оригінал, а потім можливе зображення такої трапеції при паралельному проектуванні згідно загальної теорії побудови зображень

плоских n-кутників, $n \in N, n > 3$, при паралельному проектуванні (див. §6). У той же час за умови даної задачі, справедливими є певні співвідношення, які дозволяють розв'язати її без побудови оригіналу.

Розглянемо прямокутну трапецію $ABCD$ з кутом у $60°$, описану навколо кола F з центром у точці O (рис 251). Нехай $BC \parallel AD$, $BC < AD$, $AB \perp AD$, $\angle CDA = 60°$, коло F дотикається сторін AB, BC, CD, AD, відповідно, у точках M, N, P, K. Позначимо радіус кола F через r, відрізок CN через x, відрізок DK через y. Тоді $OM = ON = OP = OK = AK = AM = = MB = BH = r$, $CN = CP = x$, $PD = KD = y$. Проведемо $CQ \perp AD$, $CQ = AB = 2r$, $QD = KD - KQ$, $KQ = NC = x$, $OD = y - x$. У трикутнику QCD, $\angle QCD = 30°$. Отже, $CD = 2QD$, або $x + y = 2(y - x), y = 3x$.

Рис. 250



З іншого боку, промені CO і DO, відповідно, є бісектрисами $\angle BCD$ і $\angle CDA$. Тому $\angle COD = 90°$, відрізок OP є висотою прямокутного трикутника COD, проведеною до його гіпотенузи. Тому $OP^2 = CP \cdot PD$ або $r^2 = xy$. Але тоді $r^2 = 3x^2$, $r = x\sqrt{3}$. Остання рівність разом із рівністю $y = 3x$ і дозволяє здійснити бажану побудову.

Рис. 251

Зручніше за все у вигляді довільного паралелограма $K'N'C'Q'$ побудувати зображення паралелограма $KNCQ$ при певному паралельному проектуванні f, так, що $K' = f(K)$, $N' = f(N)$, $C' = f(C), Q' = f(Q)$ (рис. 252). Нехай точка O' є серединою відрізка $K'N'$. Тоді $O' = f(O)$. На промені, доповняльному до променя $Q'K'$ побудуємо відрізок

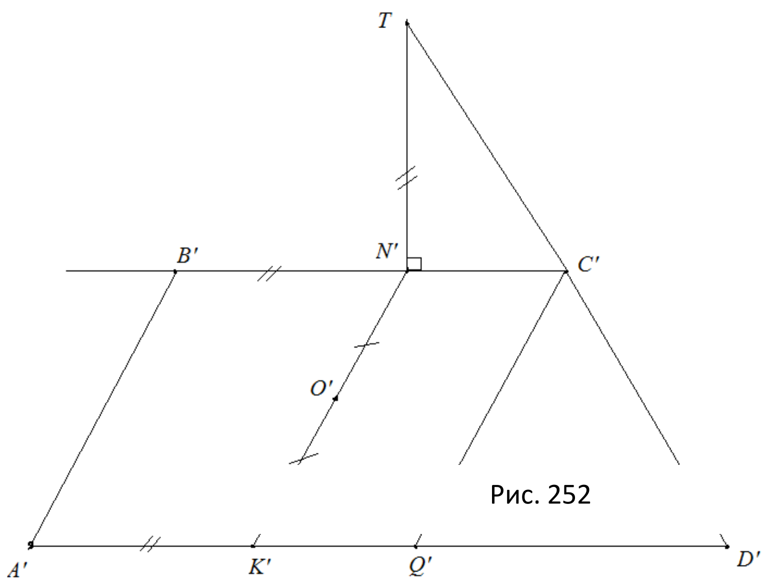


Рис. 252

$Q'D' = 3K'Q'$. $D' = f(D)$. На відрізку $N'C'$, як на катеті, побудуємо прямокутний трикутник $TN'C'$ ($\angle TN'C' = 90°$), у якого $TC' = 2N'C'$. Зрозуміло, що $TN' = N'C'\sqrt{3}$. На промені, доповняльному до променя $N'C'$, відкладемо відрізок $N'B' = N'T$. $B' = f(B)$. На промені, доповняльному до променя $K'Q'$, відкладемо відрізок $K'A' = N'T$, $A' = f(A)$, трапеція $A'B'C'D'$ є шуканою.

108. Див. розв'язання задачі 105.

109. Див. розв'язання задачі 105.

110. За умови даної задачі задано певний гострий кут. Треба побудувати оригінал, форму якого умовою задачі визначено однозначно.

111. Див. схему розв'язання задачі 105.

112. Див. схему розв'язання задачі 105.

113. Див. схему розв'язання задачі 105.

114. За умови даної задачі задано певний гострий кут. Треба побудувати оригінал, форму якого умовою задачі визначено однозначно.

115. Перевірити, що для заданих трапецій $ABCD$ і $A'B'C'D'$ виконано умову $BC : AD = B'C' : A'D'$. На площині трапеції-оригіналу провести $BP \perp CD$, для побудови точки $P' = f(P)$ використати теорему Фалеса.

116. З'єднати точки A' і C'.

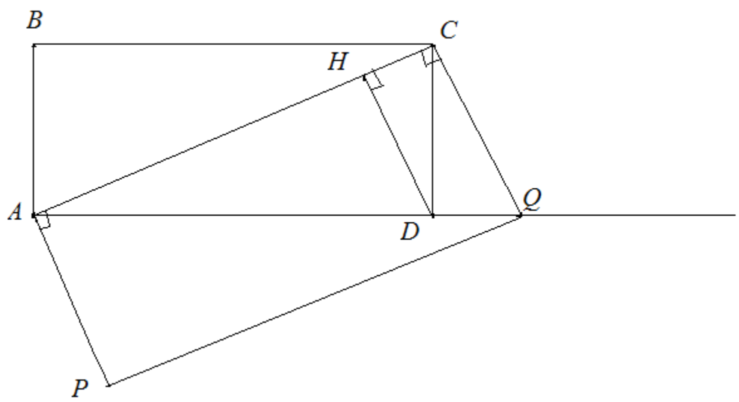
117. Безпосереднє використання трапеції-оригіналу є неминучим. Треба побудувати ромб $BPCQ$, у якого $\angle BCP = 60°$, а потім, за допомогою теореми Фалеса, точки $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$ на прямій, що сполучає середини основ трапеції $A'B'C'D'$.

118. У трапеції $A'B'C'D'$ достатньо побудувати відрізок $M'N'$, що сполучає середини її основ. Точка Q' є серединою відрізка $M'N'$, точка P' належить променю, доповняльному до променя $M'N'$, $M'P' = M'Q'$. Паралелограм $B'P'C'Q'$ є шуканим зображенням квадрата $BPCQ$ при паралельному проектуванні f ($P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$).

119. Треба побудувати відрізок $M'N'$, що сполучає середини основ трапеції $A'B'C'D'$, і за допомогою теореми Фалеса поділити відрізок $M'N'$ на необхідну кількість однакових частин.

120. Побудувати паралелограм $B'D'P'Q'$, у якого $D'P' = B'Q' = A'C'$.

121. У заданому прямокутнику $ABCD$ треба провести перпендикуляр DH до гіпотенузи AC (рис. 253).



На картинній площині α за допомогою теореми Фалеса на промені $A'D'$ треба побудувати таку точку Q', що $A'D' : D'Q' = AH : HC$. На відрізках $A'C'$ і $C'Q'$, як на сторонах, треба побудувати паралелограм $A'C'Q'P'$, який і буде шуканим зображенням прямокутника $ACQP$ при паралельному проектуванні f.

Рис. 253

122. Безпосереднє використання оригіналу не є потрібним. За допомогою теореми Фалеса на необхідну кількість однакових частин треба поділити відрізок $A'D'$.

123. Треба побудувати відрізок $M'N'$, що сполучає середини сторін $A'B'$ і $C'D'$ паралелограма $A'B'C'D'$, і за допомогою теореми Фалеса поділити відрізок $M'N'$ на необхідну кількість однакових частин.

124. Треба побудувати відрізок $M'N'$, що сполучає середини сторін $A'B'$ і $C'D'$ паралелограма $A'B'C'D'$, і за допомогою теореми Фалеса поділити відрізок $M'N'$ на необхідну кількість однакових частин.

125. Див. розв'язання задачі 117.

Але у даному випадку побудова і безпосереднє використання оригіналу не є необхідним. Можна легко обґрунтувати, що $AH : HC = 3:1$.

126. Провести медіану $B'P'$ заданого трикутника $A'B'C'$, продовжити її за точку P' на відрізок $P'N' = B'P'$. Через середину K' сторони $A'B'$ провести відрізок $N'K'$, продовжити його за точку K' на відрізок $K'M'$. Паралелограм $A'M'B'N'$ є шуканим зображенням ромба $A'M'B'N'$ при паралельному проектуванні f.

127. Бісектриси протилежних кутів паралелограма, який не є ромбом, паралельні між собою. Тому у заданому паралелограмі $ABCD$ достатньо побудувати бісектриси суміжних кутів $\angle ABC$ і $\angle BCD$, знайти точки K і L, відповідно, перетину цих бісектрис з прямою AD і побудувати зображення цих точок при паралельному проектуванні f: $K' = f(K), L' = f(L)$ за допомогою теореми Фалеса. Подальші побудови є очевидними.

128. Використання оригінала для розв'язання даної задачі є необхідним. Треба побудувати одну з бісектрис, наприклад, бісектрису $\angle ABC$, знайти її точку перетину M з прямою AD, за допомогою теореми Фалеса на картинній

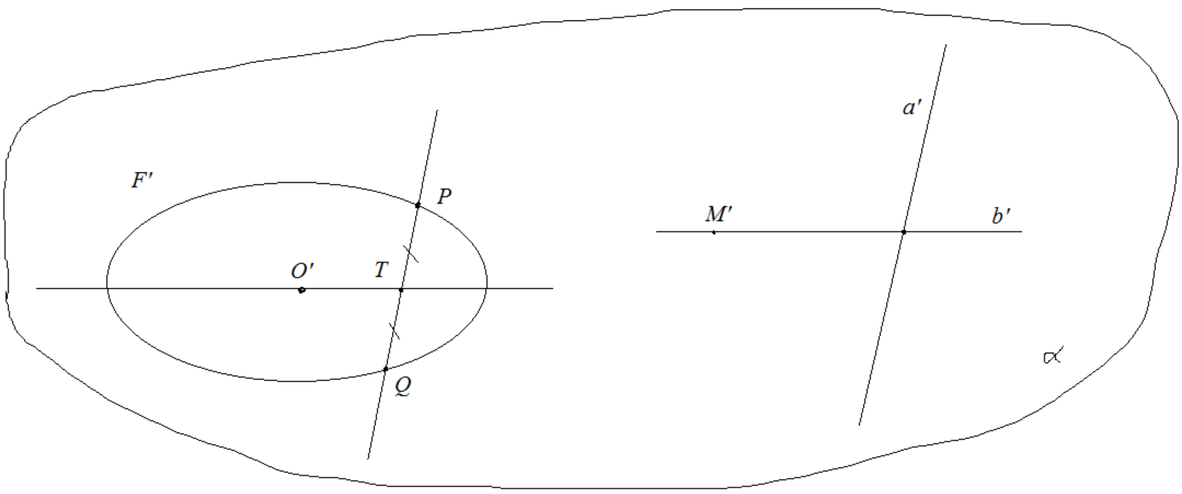


Рис. 254

площині побудувати її зображення $M' = f(M)$. Шукана точка $Q' = f(Q)$ буде серединою відрізка BM .

129. Як було обґрунтовано у §…., задане зображення є метрично повним. Отже, сформульована задача має єдиний розв’язок. Для його знаходження треба у заданому еліпсі F' паралельно до прямої a' провести хорду PQ (рис…), через середину T хорди PQ провести пряму $O'T$. Шукана пряма b' проходить через точку M' паралельно до прямої $O'T$.

130. Див. розв’язання задачі 9.5.

131. Див. розв’язання задачі 9.6.

132. Див. розв’язання задачі 9.6.

Якщо у прямокутному трикутнику катет відноситься до гіпотенузи, як $3:5$, то згідно теореми Піфагора, катети цього трикутника відносяться, як $3:4$.

133. Див. розв’язання задачі 9.7.

134. Див. розв’язання задачі 9.14 і 9.7.

135. Див. розв’язання задачі 9.14 і 9.7.

136. Див. розв’язання задачі 9.14 і 9.7.

137. Див. розв’язання задачі 9.11.

138. Див. розв’язання задачі 9.3.

139. Див. розв’язання задачі 9.11 і 131.

140. Всі правильні десятикутники є подібними між собою. Отже, будь-який з них можна прийняти за оригінал шуканого зображення. Для розв’язання даної задачі, мабуть, зручніше за все побудувати оригінал, а для

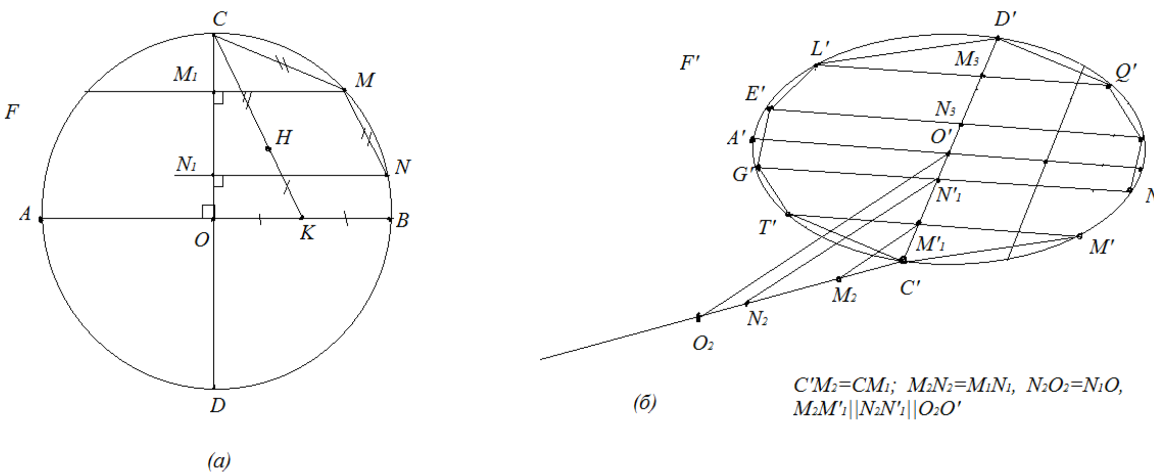


Рис. 255

побудови відповідного зображення використати теорему Фалеса.

Розглянемо довільне коло F з центром у точці O. Нагадаємо стандартний спосіб побудови вписаного у це коло правильного десятикутника. Побудуємо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD. Нехай точка K буде серединою радіуса OB. На промені KC відкладемо відрізок $KH = OK$. Довжина відрізка CH дорівнює довжині сторони правильного десятикутника, вписаного у коло F (рис. 255). На дузі CB кола F послідовно побудуємо такі точки M і N, що $CM = MN = CH$. Через точки M і N паралельно до діаметра AB проведемо, відповідно, прямі a і b. $M_1 = a \cap CD,\ N_1 = b \cap CD$.

Для заданого еліпса F' побудуємо пару спряжених діаметрів $A'B'$ і $C'D'$. Згідно теореми 8.3 і її наслідків, можна вважати, що $F' = f(F)$, $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)$. За допомогою теореми Фалеса на діаметрі $C'D'$ побудуємо точки $M_1' = f(M_1),\ N_1' = f(N_1)$. На промені $O'D'$ послідовно відкладемо відрізки $O'N_3 = O'N_1', N_3M_3 = N_1'M_1'$. Паралельно до діаметра $A'B'$, через точки M_1' , N_1' , N_3 , M_3 проведемо прямі, які перетнуть еліпс F', відповідно, у точках $T'\ i\ M', G'\ i\ N', E'\ i\ P', L'\ i\ Q'$ (рис….б). $M' = f(M\ ),\ N' = f(N)$, десятикутник $E'L'D'Q'P'N'M'C'T'G'$ буде шуканим зображенням правильного десятикутника, вписаного у коло F.

141. Можна спочатку так, як було показано у вказівках до розв'язання задачі 132, побудувати зображення $E'L'D'Q'P'N'M'C'T'G'$ правильного десятикутника, вписаного у коло-оригінал. П'ятикутник $E'D'P'M'T'$ буде шуканим зображенням правильного п'ятикутника, вписаного у коло-оригінал.

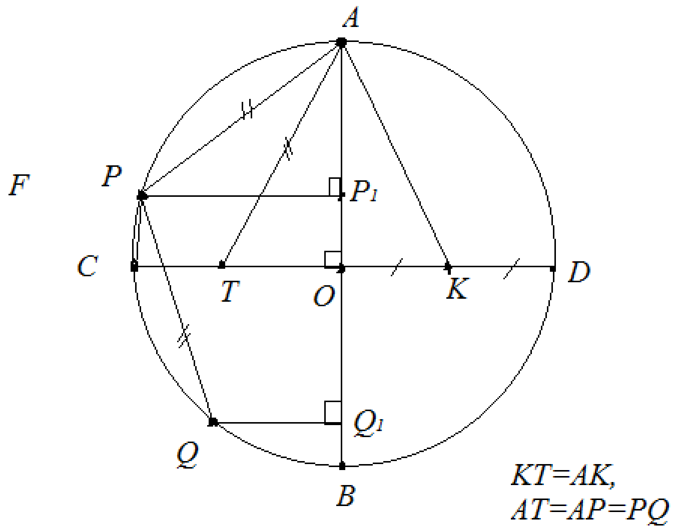


Рис. 256

Можна застосувати той відомий спосіб побудови правильного п'ятикутника, вписаного у коло, який не вимагає попередньої побудови сторін правильного вписаного десятикутника. Для його реалізації побудуємо у колі F з центром у точці O пару взаємно перпендикулярних діаметрів AB і CD. Нехай точка K буде серединою радіуса OD. На промені KC побудуємо відрізок $KT = AK$. Довжина відрізка AT дорівнює довжині сторони правильного п'ятикутника, вписаного у коло F. На дузі AB кола F послідовно побудуємо такі точки P і Q, що $AP = PQ = AT$ (рис 256). Точки $A, P\ i\ Q$ є послідовними вершинами правильного п'ятикутника, вписаного у коло F. Якщо мова йде про правильний п'ятикутник $APQMN$, то вершина M є симетричною до вершини Q відносно прямої AB, вершина N –

симетричною до вершини P відносно прямої AB. Проведемо $PP_1 \perp AB$, $QQ_1 \perp AB$. У заданому еліпсі F' треба побудувати пару спряджених діаметрів $A'B'$ і $C'D'$, які при розв'язанні попередньої задачі, можна, вважати, що $F' = f(F)$, $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C), D' = f(D)$. За допомогою теореми Фалеса можна побудувати точки $P_1' = f(P_1)$, $Q_1' = f(Q_1)$. За їх допомогою неважко відновити і вершини P', Q', M', N' шуканого п'ятикутника $A'P'Q'M'N'$.

142. Див. розв'язання задачі 9.14.

143. Див. розв'язання задачі 9.17.

144. Усвідомимо, як можна побудувати прямокутник-оригінал.

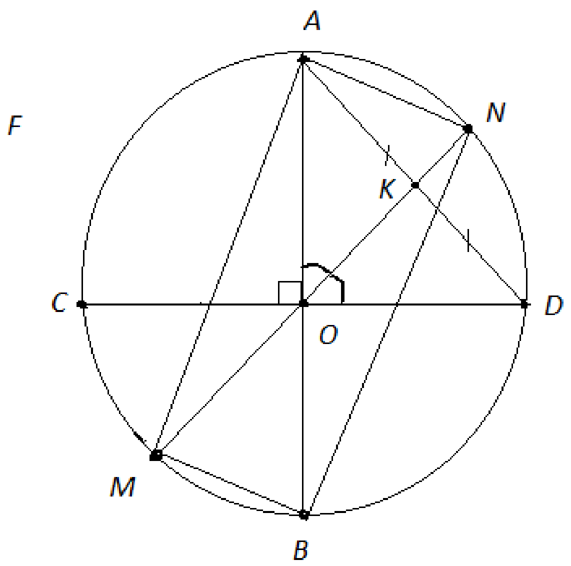


Рис. 257

Проведемо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD. Через середину K хорди AD проведемо діаметр MN. $\angle AON = \frac{1}{2}\angle AOD = 45°$, прямокутник $ANBM$ є шуканим (рис….). Властивості паралельного проектування дозволяють виконати аналогічні побудови і для еліпса F'. Безпосереднє використання оригіналу для цього не є потрібним.

145. Достатньо усвідомити, як можна побудувати прямокутник-оригінал. Проведемо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD. Через середину K радіуса OB паралельно до діаметра CD

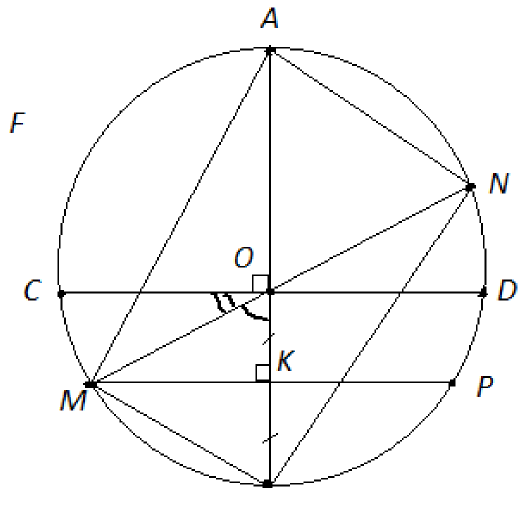


Рис. 258

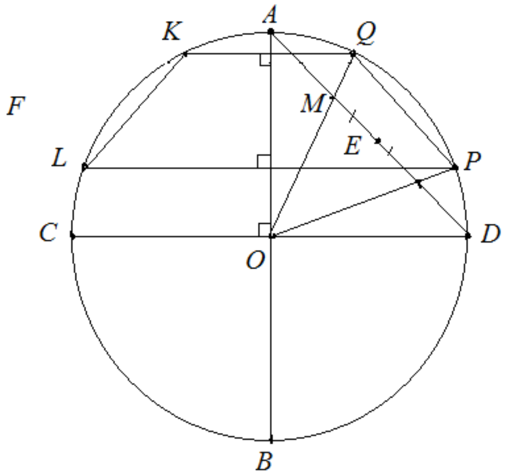


Рис. 259

проведемо хорду MP. $\angle MOB = 60°$. Проведемо діаметр MN. Прямокутник $MANB$ є шуканим (рис…). Властивості паралельного проектування дозволяють виконати аналогічні побудови і для еліпса

F'. Безпосереднє використання оригіналу для цього не є потрібним.

146. Див. вказівки до розв'язання задачі 145.

На відміну від задачі 136 , тут треба розглянути прямокутник $CNDM$.

147. Див. розв'язання задачі 9.14 і вказівки до розв'язання задачі 144.

148. Див. розв'язання задачі 9.19, 9.20.

149. Див. розв'язання задачі 9.20.

150. Див. розв'язання задачі 9.14 і 9.20.

151. Див. розв'язання задачі 9.14 і 9.20.

152. Див. розв'язання задачі 9.14.

153. Для розв'язання задачі важливо усвідомити, як можна вписати рівнобічну трапецію з кутом у $45°$, основи якої відносяться як $1:3$.

Проведемо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD. Поділимо хорду AD на чотири однакові частини: $AM = ME = EN = ND$ (рис…). Через точки M і N проведемо, відповідно, радіуси OQ і OP. Паралельно до діаметра CD проведемо хорди KQ і LP. Можна довести, $KQ : LP = 1:3$, $\angle LPQ = 45°$, трапеція є шуканою.

Аналогічні побудови можна виконати і для еліпса F', вони повністю відповідають властивостям зображень фігур при паралельному проектуванні.

154. Усвідомимо, як можна побудувати трапецію-оригінал. Проведемо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD. Через середину K радіуса OB, паралельно до діаметра CD, проведемо хорду MN. Неважко довести, що $\angle MON = 120°$. Отже, хорду MN із центра O кола F видно під кутом у $120°$. Проведемо діаметри MT і NH , $\angle HOT = \angle NOM = 120°$. Хорду HT також видно із центра O під кутом у $120°$, $HT \parallel MN$. Проведемо хорди HA і AT. Через середини E і L цих хорд ($HE = EA = AL = LT$) проведемо радіуси OP і OQ, $\angle POQ = \frac{1}{2}\angle HOT = 60°$, хорду PQ із центра O видно під кутом у $60°$, $PQ \parallel HT$. Таким чином, знайдені дві рівнобічні трапеції, вписані коло F, основи яких із центра O цього кола, відповідно, видно під кутами у $60°$ і $120°$. Це трапеції $HPQT$ і $MPQT$. Отже, для кола задача має два розв'язки. Властивості зображень фігур при паралельному проектуванні дозволяють виконати всі аналогічні побудови і для еліпса F', сформульована

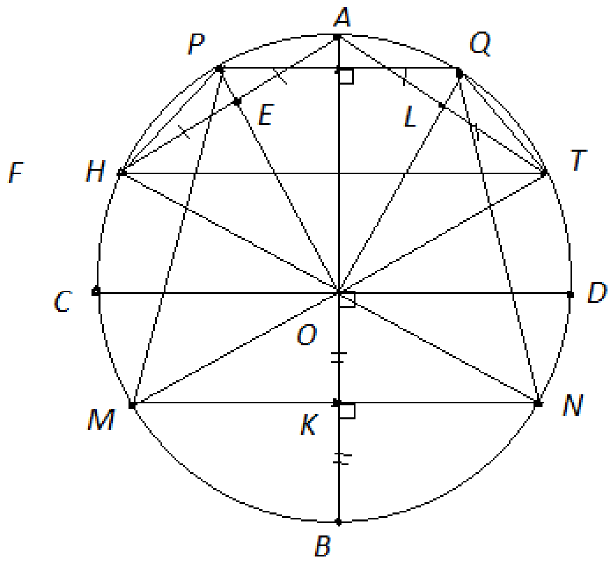


Рис. 260

задача має два розв'язки, для їх знаходження безпосереднє використання оригіналу не є потрібним.

155. Див. вказівки до розв'язання задачі 140.

156. Див. розв'язання задачі 9.14 і вказівки до розв'язання задачі 140.

157. Див. вказівки до розв'язання задачі 141.

158. Вказівка. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції з кутом у $60°$, основи якої відносяться як 1:2, знаходяться посередині більшої з основ даної трапеції, основи висот даної трапеції, проведених з вершин тупих кутів, і точка O ділять більшу основу даної трапеції на чотири однакові частини. Розв'язання задачі не вимагає безпосереднього використання оригіналу.

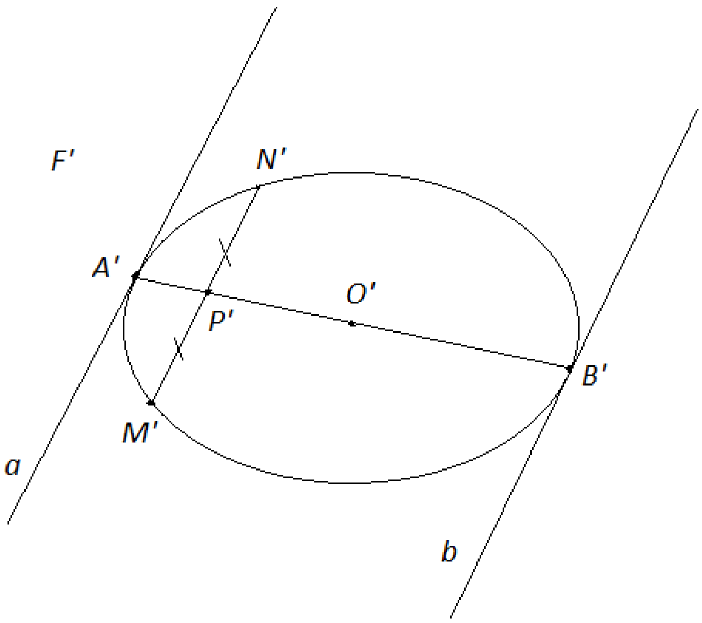


Рис. 261

159. Через середину P' хорди $M'N'$ проведемо діаметр $A'B'$ еліпса F' (рис 261). Шукані дотичні до еліпса F' – це прямі a і b, що проходять, відповідно, через точки A' і B' паралельно до прямої $M'N'$.

160. Треба провести промінь $A'O'$ до перетину з відрізком $B'C'$.

161. Див. розв'язання задачі 10.6.

162. Див. розв'язання задачі 10.4.

163. Див. розв'язання задачі 10.10.

164. Вказівка. Спочатку побудуйте зображення правильного шестикутника, описаного навколо кола-оригінала.

165. Вказівка. Спочатку побудуйте зображення правильного п'ятикутника, вписаного у коло-оригінал. Див. розв'язання задачі 142 і 159.

166. Вказівка. Спочатку побудуйте зображення правильного п'ятикутника, вписаного у коло-оригінал. Див. розв'язання задачі 159 і 159.

167. Див. розв'язання задачі 10.10.

168. Вказівка. Побудуйте спочатку зображення при проектуванні f рівнобедреного трикутника з кутом при вершині у $135°$, вписаного у коло-оригінал. Див. розв'язання задачі 9.13 і 159.

169. Вказівка. Побудуйте спочатку зображення кута, що складає $\frac{1}{2}\angle ABC$, вписаного у коло F. Див. також розв'язання задачі 9.14 і 10.11.

170. Див. вказівку до розв'язання задачі 169.

171. Дослідимо питання про те, як можна навколо кола F описати трикутник-оригінал.

Проведемо у колі F пару взаємно перпендикулярних діаметрів AB і CD. Паралельно до діаметра CD через точку B проведемо пряму a. До прямої a проведемо перпендикуляр CM. На промені, доповняльному до променя AO, відкладемо відрізок $AN = \frac{1}{2}AO$. Побудуємо трикутник MBN: $MB : BN = 2:5$, $\angle MBN = 90°$. Пряма MN перетинає коло F за хордою PQ.

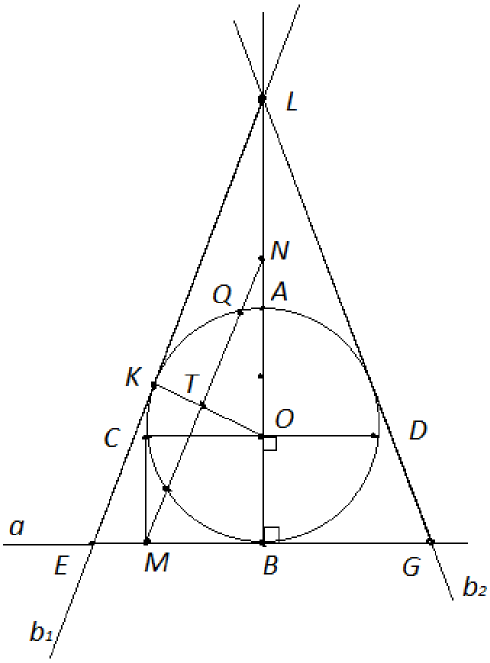


Рис. 262

Через середину T хорди PQ проведемо радіус OK. Через точку K паралельно до прямої MN проведемо пряму b_1. $E = a \cap b_1$, $L = AB \cap b_1$, трикутник EBL дотикається кола F у точці K і є подібним до трикутника MBN. Отже, $EB : BL = 2:5$. На промені, доповняльному до променя BE, відкладемо відрізок $BG = BE$. $\triangle LBG = \triangle LBE$, $BG : BL = 2:5$, гіпотенуза LG трикутника LBG дотикається кола F. Отже, $\triangle LBE$ є рівнобедреним трикутником, описаним навколо кола F, LB є висотою даного трикутника, проведеною до його основи, $EG : LB = 4:5$ (рис. 262).

Властивості паралельного проектування дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса F' без явного використання оригінала. 1) У еліпсі F' проведемо пару спряджених діаметрів $A'B'$ і $C'D'$. 2) Паралельно до діаметра $C'D'$ через точку B' проведемо пряму a'. 3) Через точку C' паралельно до діаметра $A'B'$ проведемо пряму $C'M'$ до перетину з прямою a' у точці M'. 4) На промені, доповняльному до променя $A'O'$,

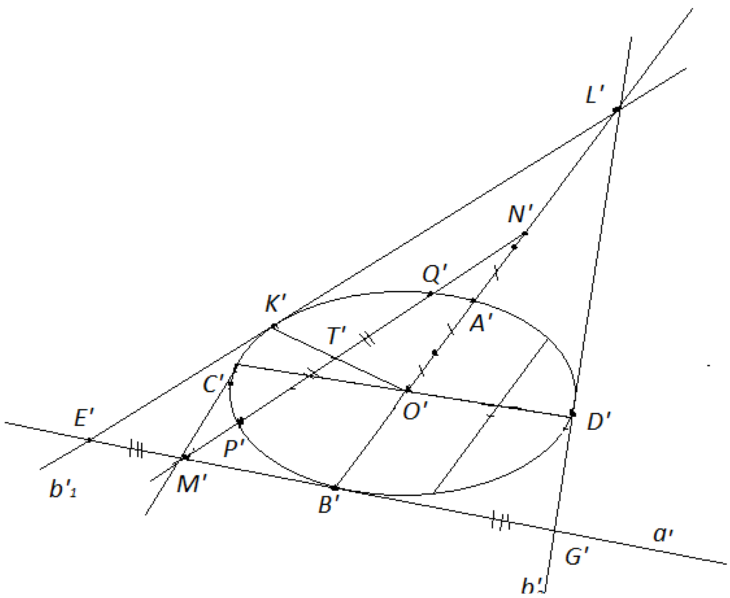


Рис. 263

відповідно, відкладемо відрізок $A'N' = \frac{1}{2} A'O'$. 5) Проведемо пряму $M'N'$, яка перетне еліпс F' за хордою $P'Q'$. 6) Через середину T' хорди $P'Q'$ проведемо радіус $O'K'$. 7) Через точку K' паралельно до прямої $M'N'$ проведемо пряму b_1'. 8) $E' = a' \cap b_1'$, $L' = A'B' \cap b_1'$. 9) На промені, доповняльному до променя BE, відкладемо відрізок $B'G' = E'B'$. 10) Трикутник $E'L'G'$ є шуканим.

172. Див. розв'язання задачі 171.

173. Див. розв'язання задачі 10.14.

174. Розглянемо ромб $ABCD$, діагоналі якого перетинаються у точці O (рис. 264). Проведемо $OK \perp AB,\ ON \perp BC,\ OL \perp CD,\ OM \perp AD.\ OK = ON = = OL = OM$ – це радіуси кола, вписаного у ромб $ABCD$. Відрізки ON і OM лежать на одній прямій як перпендикуляри, проведені з однієї точки до паралельних прямих, у сумі вони дорівнюють висоті ромба. (Те ж саме справедливе і для відрізків OK і OL). Якщо сторона даного ромба відноситься до його висоти як 5:4, то $BC : MN = 5:4$, $BC : ON = 5:2$. Відрізок ON є висотою, проведеною до гіпотенузи прямокутного трикутника BOC. Отже, $ON^2 = BN \cdot NC$. З іншого боку, $BN + NC = BC$. Якщо $BC = 5p$, $ON = 2p$, то $\begin{cases} BN \cdot NC = 4p^2 \\ BN + NC = 5p \end{cases}$. Звідси $BN = 4p,\ NC = p$ (якщо припустити, що саме $BN > NC$). Тоді $ON : NC : BN = 2:1:4$. Останні співвідношення дозволяють наступним чином описати навколо кола F ромб-оригінал.

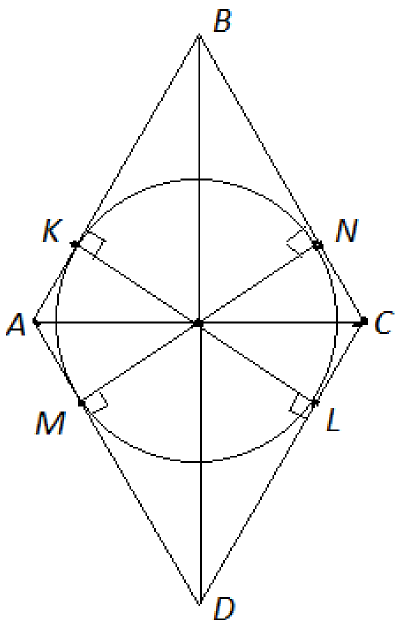


Рис. 264

1. Проведемо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD. 2. Паралельно до діаметра CD через точку A проведемо пряму a_1, через точку B – пряму a_2 (рис. 265). 3. Через середину T радіуса OC проведемо перпендикуляр TM до прямої a_2

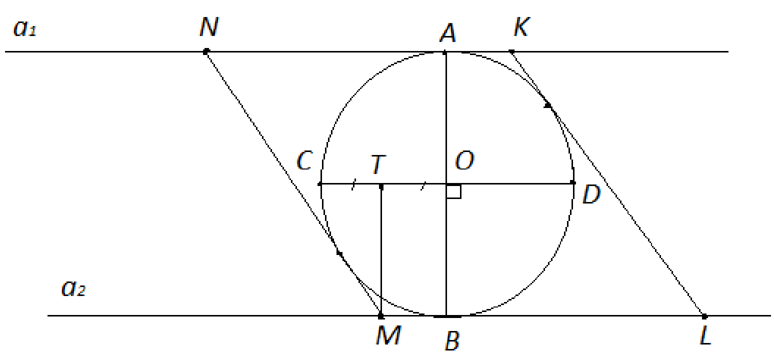


Рис. 265

($TM \parallel AB$). 4. На промені, доповняльному до променя BM, відкладемо відрізок $BL = 2CO$. $OB : BM : BL = 2:1:4$. 5. На тому промені з початком у точці A прямої a_1, що є протилежно спрямованим до променя BM, відкладемо відрізок $AK = BM$. 6. На промені, доповняльному до променя AK, відкладемо відрізок $AN = BL$. 7. Паралелограм $MNKL$ є шуканим ромбом.

Властивості паралельного проектування дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса F' без явного використання побудованого оригінала.

175. Див. розв’язання задачі 174.

176. Див. розв’язання задачі 10.18.

177. Див. розв’язання задачі 10.18.

178. Див. розв’язання задачі 10.18 і 160.

179. Див. розв’язання задачі 9.14, 10.18 і 160.

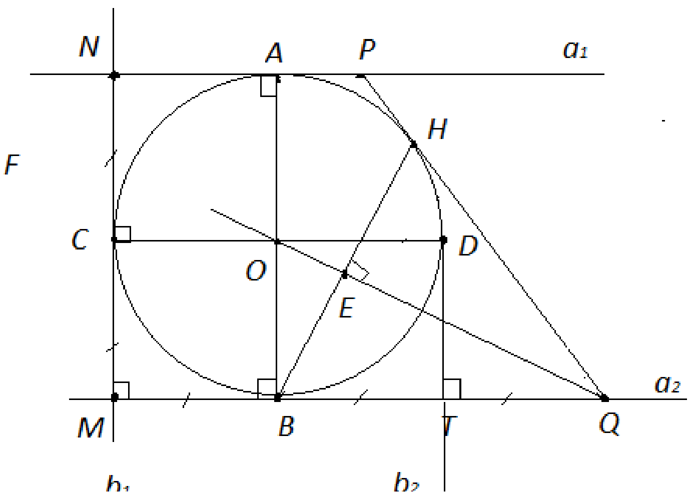


Рис. 266

180. Вказівка. Побудуйте трапецію-оригінал і застосуйте теорему Фалеса. Для побудови оригіналу знайдіть бісектрису заданого кута $\angle MNK$.

181. Дослідимо, по-перше, питання про те, як можна побудувати трапецію-оригінал. Проведемо у колі F взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD. Паралельно до діаметра CD через точку A проведемо пряму a_1, через точку $B-$ пряму a_2. Паралельно до діаметра AB через точку C проведемо пряму b_1, через точку $D-$ пряму b_2. $N = a_1 \cap b_1$, $M = a_2 \cap b_1$, $T = a_2 \cap b_2$. Висота прямокутної трапеції співпадає з її бічною стороною, перпендикулярною до основ, і дорівнює

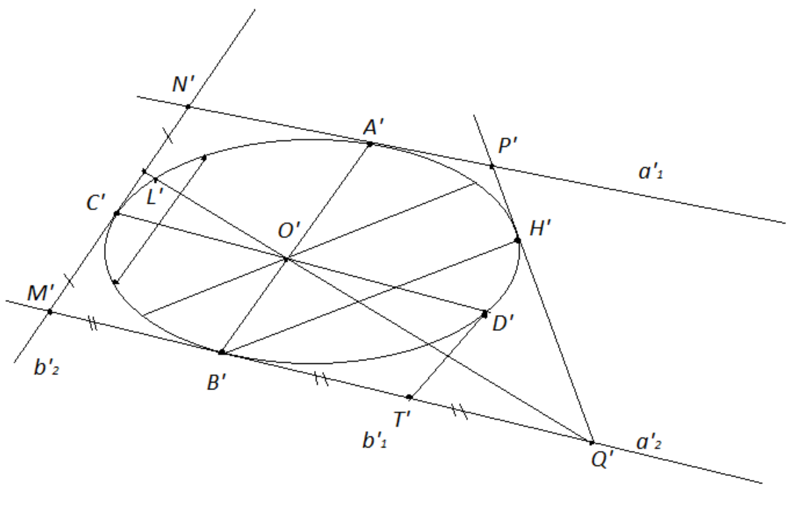


Рис. 267

подвоєному радіусу вписаного кола. Отже, $MN = NC + CM = MB + BT = MT$, $NC = CM = \ = MB = BT$. На промені, доповняльному до променя TM, відкладемо відрізок $TQ = TB$, $MQ : MN = 3:2$. Пряма QM є дотичною, проведеною з точки Q до кола F (рис 266). Для побудови шуканої трапеції достатньо через точку Q провести другу дотичну до кола F. Обидві дотичні є симетричними відносно прямої QO. Проведемо хорду BH перпендикулярно до прямої QO. Точка H є точкою дотику другої дотичної до кола F. Проведемо дотичну QH. Нехай $P = QH \cap a_2$. Трапеція $MNPQ$ є шуканою.

Властивості паралельного проектування дозволяють виконати аналогічні побудови для еліпса F' без явного використання побудованого оригінала.
1. Проведемо у еліпсі F' пару спряджених діаметрів (рис. 267). 2. Паралельно до діаметра $C'D'$ через точку A' проведемо пряму a_1', через точку B' – пряму a_2'. 3. Паралельно до діаметра $A'B'$ через точку C' проведемо пряму b_1', через точку D' – пряму b_2'. 4. $N' = a_1' \cap b_1'$, $M' = a_2{}' \cap b_1{}'$, $T' = a_2' \cap b_2'$. 5. На промені, доповняльному до променя $T'M'$, відкладемо відрізок $T'Q' = B'T'$. 6. Проведемо пряму QO, яка перетне еліпс F' за діаметром $K'L'$. 7. Побудуємо діаметр, спряджений до діаметра $K'L'$. Паралельно до цього спрядженого діаметра проведемо хорду $B'H'$. 8. Проведемо пряму $Q'H'$. 9. $P' = Q'H' \cap a_1'$, трапеція $M'N'P'Q'$ є шуканим зображенням.

182. Див. розв’язання задачі 181.
183. Див. розв’язання задачі 182.
184. Див. розв’язання задачі 10.21.
185. Див. розв’язання задачі 10.21.
186. Див. розв’язання задачі 178.
187. Див. розв’язання задачі 179.
188. Див. розв’язання задачі 176.
189. Див. розв’язання задачі 183.
190. Див. розв’язання задач 172 і 173.
191. Див. розв’язання задачі 176 і 177.

Відповіді до тестових завдань для самоконтролю до розділу ІІ

1.В
2.А
3. Б
4.

	А	Б	В	Г	Д
1			X		
2	X				
3					X
4		X			

5. Б
6.Г
7. В.
8.А.
9.Б
10.Б
11.В
12.Г
13.А
14.В
15.Б
16.Г
17.В
18.Г
19.А
20.Б
21..В

22..В
23.

	А	Б	В	Г	Д
1				X	
2	X				
3					X
4			X		

24. А
25.

	А	Б	В	Г	Д
1			X		
2	X				
3					X
4				X	

26.Г.
27.Б
28.Г
29.В
30.Б

Відповіді, розв'язки або вказівки до розв'язання практичних завдань до розділу I

1. 1) Під час побудови точок M_1 і M_2 проводять $MM_1 \perp \alpha$, $MM_2 \perp \beta$. $MM_1 \parallel \gamma$, $MM_2 \parallel \gamma$, отже, $(M_1MM_2) \parallel \gamma$. $\alpha \cap \beta = BC$, $\gamma \cap BC = B$. Отже, існує точка $N = (M_1MM_2) \cap BC$. Паралельні площини перетинають будь-яку площину паралельними прямими. Отже, $\alpha \cap \gamma = AB$, $(M_1MM_2) \cap \alpha = M_1N$, $M_1N \parallel AB$, $M_1N \perp BC$. Аналогічно $M_2N \perp BC$ (рис. 66). Після відповідного «розрізання» і «розгортання», які є рухами рис. 66 у просторі, на картинній площині отримаємо фігуру рис. 67, де $M_1N \perp BC$ і $M_2N \perp BC$. Але на площині через точку N проходить єдина пряма, перпендикулярна до прямої BC. Отже точки M_1, N, M_2 лежать на одній прямій, $M_1M_2 \perp BC$. Одночасно $AB \perp BC$. Тому $M_1M_2 \parallel AB$.

2) Аналогічним чином доводиться, що пряма M_1M_3 картинної площини є перпендикулярною до прямої AB. У оригіналі (до «розрізання» і «розгортання») прямі BD_1 і BD_2 співпадають, точка K співпадає з точкою Q, $M_3K \perp BD_2$, $M_2K \perp BD_2$ (рис. 66). Тому на картинній площині $M_2Q \perp BD_1$, $M_3K \perp BD_2$, $BQ = BK$ (рис. 46).

4. Оригінал — точку M — можна відновити навіть лише за множиною точок $\{M_1; M_2\}$. Якщо за рис. 50 через пряму AB та через пряму BC відповідно провести площини β' і γ', перпендикулярні до площини α, утвориться тригранний кут з плоскими прямими кутами ABC, ABD_1, CBD_1, як на рис. 67. У площині β' проведемо $M_2'N \perp BC$, $M_2'N \perp M_2N$. Площина (M_1NM_2') буде паралельною до площини γ'. Прямі $MM_1 \perp M_1N$ і $MM_2 \perp M_2N$ цієї площини будуть перпендикулярними і перетнуться саме у шуканій точці M.

5. 1) Точки M, N, M', N' належать одній площині β, тій площині, яка містить прямі AM і AN. Отже, прямі MN і $M'N'$ лежать у одній площині β. При цьому пряма $M'N'$ лежить у площині α. Якщо припустити, що прямі MN і $M'N'$ перетинаються у певній точці, то ця точка буде спільною точкою прямої MN і площини α. А це є неможливим, бо за умови $MN // \alpha$. Значить, $MN // M'N'$.

2) Оскільки за умови задачі точки A і M лежать по різні сторони відносно площини α, то відрізок AM перетинає площину α. Точкою перетину є саме точка M', точка M' є внутрішньою точкою відрізка AM, $AM' < AM$. Аналогічно, точка N' є внутрішньою точкою відрізка AN, $AN' < AN$. Трикутник $\Delta AM'N'$ подібний до трикутника ΔAMN, коефіцієнт подібності $k = \dfrac{AM'}{AM} < 1$. Отже, $M'N' = k \cdot MN$, $\dfrac{M'N'}{MN} < 1$, $M'N' < MN$.

6. Згідно методу лінійної перспективи, основа, основа картини h — це пряма перетину картинної площини α і площини другорядних проекцій β, $\alpha \perp \beta$, точка M' - центральна проекція на площину α із точки зору A точки M, M_1' — центральна проекція на площину α із точки зору A ортогональної проекції M_1 точки M на площину β: $MM_1 \perp \beta$ (див. рис. 21). Звідси випливає, що $MM_1 // \alpha$. Площина (MAM_1) перетинає площину α по прямій $M'M_1'$. Отже, згідно завдання 5, $M'M_1' // MM_1$. Звідси $M'M_1' \perp \beta$, тому $M'M_1' \perp h$, бо основа картини h лежить у площині β.

7. На картинній площині α розглянемо зображення $\{M', M'\}$ точки M евклідового простору за методом лінійної перспективи (див. Рис.22). площина α містить також основу картини h, лінію горизонту h' і головну точку B' картини, $M'M' \perp h$, $h' // h$, $B' \notin h'$. Через пряму h проведемо площину $\beta \perp \alpha$, проведемо $B'B \perp h'$. Через точку B проведемо пряму $a \perp \alpha$, відкладемо на ній відрізок $AB = B'B$ (рис. 21). Зрозуміло, що $a // \beta$, $A \notin \beta$. Проведемо пряму AM_1'. Оскільки $AM_1' \notin h'$, пряма AM_1' перетинає площину

β у певній точці M_1. Через точку M_1 проведемо пряму $b \perp \beta$. $M = AM' \cap b$. Для обґрунтування існування точки M достатньо довести, що прямі AM' і b належать одній площині і не перетинаються. Зрозуміло, пряма AM' лежить у площині $(AM_1'M')$.

8. Якщо за методом Федорова зображенням точки є точка, то оригінал співпадає з самим зображенням. Нехай зображенням точки на картинній площині α за методом Федорова є орієнтоване коло з центром у точці M_1 (рис. 29). Через точку M_1 проведемо пряму $l \perp \alpha$. Площина α розбиває евклідів простір на два півпростори, треба, щоб один з них було визначено, як додатній, а другий — як від'ємний. У залежності від орієнтації даного кола на прямій l, по той чи інший бік, відносно площини α, відкладемо відрізок M_1M, який дорівнює радіусу даного кола. Точка M є шуканим оригіналом.

9. 1)

Нескінченна сукупність однаково орієнтованих кіл однакових радіусів, які дотикаються до прямих a_1 і a_2 картинної площини, $a_1 \parallel a_2$.

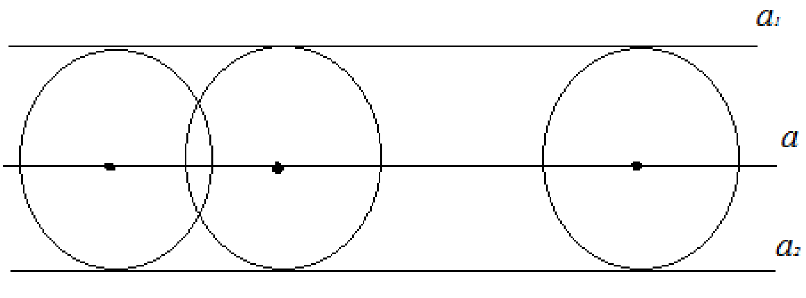


Рис. 231

Зрозуміло, що центра цих кіл розташовані на прямій a, що є рівновіддаленою від прямих a_1 і a_2, ($a \parallel a_1$), радіуси кіл дорівнюють відстані прямої-оригіналу від картинної площини (див. рис. 231).

2)

Нескінченна

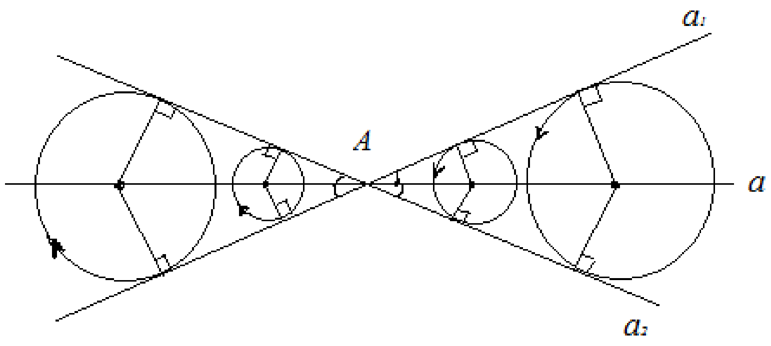


Рис.231

сукупність орієнтованих кіл, вписаних у пару вертикальних кутів, утворених прямими a_1 і a_2 картинної площини, які перетинаються у точці A, разом з точкою A. Кола, вписані у один кут, мають однакову орієнтацію, у різні кути — різну (див. рис. 231).

3) Безліч однаково орієнтованих кіл однакових радіусів, центри яких розташовані на певному колі (див. рис. 232).

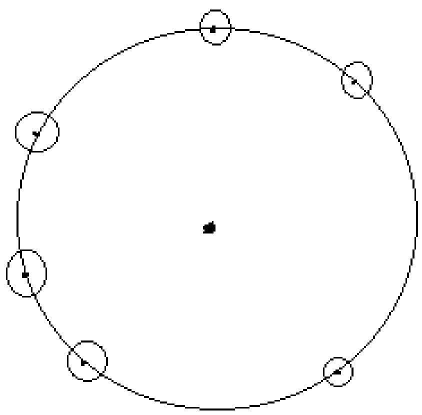


Рис.232

10. Ні. У випадку, коли точки M і M' належать картинній площині і є різними, точка M' не може бути паралельною проекцією точки M на дану площину при жодному паралельному проектуванні.

11. Так.

12. Так.

13. Нехай пряма l задає напрямок паралельного проектування. Паралельною проекцією пари точок A і B буде пара точок, якщо $AB \ l$, і одна точка, якщо $AB \parallel l$ або $AB \equiv l$.

14. Нехай пряма l задає напрямок паралельного проектування.

1) Якщо точки A, B, C лежать на одній прямій m, то їх паралельною проекцією на картинну площину будуть три різні точки, які лежать на одній прямій, якщо $m \# l$, і одна точка, якщо $m \parallel l$ або $m \equiv l$.

2) Якщо точки A, B, C не лежать на одній прямій, то їх паралельною проекцією на картинну площину будуть три точки, які не лежать на одній прямій, якщо $l \# (ABC)$ і пряма l не лежить у площині (ABC); три різні точки однієї прямої, якщо $l \# (ABC)$ або $l \subset (ABC)$, але пряма l не є паралельною і не співпадає з жодною із прямих $AB,\ AC$ чи BC; пара точок, якщо пряма l є паралельною і співпадає з однією з прямих $AB,\ AC$ чи BC.

15. Ні.

16. Ні. Точка не може бути зображенням жодної прямої, що є паралельною до картинної площини або лежить у картинній площині.

17. Пряма, що проходить через точку M' паралельно до прямої l, яка задає напрямок паралельного проектування або сама пряма l, якщо $M' \in l$.

18. Про прямі, які є паралельними до картинної площини, або належать картинній площині.

19. Прямі a та a' не повинні бути мимобіжними. Якщо це різні прямі, то площина, що їх містить, повинна бути паралельною до прямої l, що задає напрямок паралельного проектування, або містити цю пряму.

20. Так.

21. Довжина відрізка $A'B'$ є не меншою за відстань між прямими, що проходять через точки A і B паралельно до прямої l, яка задає напрямок паралельного проектування.

22. Довжина відрізка AB може бути довільною. Прямі AB і $A'B'$ не є мимобіжними, $AA' \parallel BB'$, або $A \equiv A'$ чи $B \equiv B'$.

23. Так.

24. Нехай точка O є початком променя h, а точка O' — початком променя h'. При фіксованому апараті паралельного проектування промінь h' є паралельною проекцією променя h тоді і тільки тоді, коли прямі, що містять промені h і h' не є мимобіжними, площина β, що містить промені h і h', є паралельною до прямої l, яка задає напрямок проектування або містить цю пряму, якщо точка O' не співпадає з точкою O, то пряма OO' повинна бути паралельною до прямої l або співпадати з нею, промені h і h' у площині β повинні лежати по один бік відносно прямої OO', якщо точки O і O' співпадають, то промені h і h' у площині β повинні лежати по один бік відносно прямої, яка проходить через точку O паралельно до прямої l (або відносно самої прямої l, якщо $O \in l$).

25. Так.

26. Ні. Наприклад, це неможливо для променя, який належить картинній площині.

27. Це відбувається тоді і тільки тоді, коли ці два різних променя належать одній площині β, яка є паралельною до прямої l, що задає напрямок паралельного проектування, початки променів співпадають і обидва променя лежать у площині β по один бік відносно прямої, що проходить через їх спільний початок паралельно до прямої l, початки променів не співпадають, пряма, що їх містить, є паралельною до прямої l або співпадає з прямою l, у площині β промені лежать по один бік відносно цієї прямої.

28. Відстань між прямими a' і b' не може бути меншою за певну сталу величину, яка залежить від прямих a, b і прямої l, що задає напрямок проектування. Нехай пряма p перетинає прямі $a\ i\ b$ відповідно у точках A і B під прямим кутом. Проведемо через точку A пряму $a_1 \parallel l$, через точку B — пряму $b_1 \parallel l$. Відстань між прямими a' і b' може бути довільною, але не меншою за відстань між прямими $a_1\ i\ b_1$.

29. Нехай площина α і пряма l утворюють апарат паралельного проектування, прямі $a\ i\ b$ перетинаються у певній точці. Існує єдина площина β, що містить прямі $a\ i\ b$. Проекцією даної пари прямих на площину α у напрямку прямої l буде пара прямих a' і b' даної площини, які перетинаються у випадку, коли $l \# \beta$. Проекцією даної пари прямих буде одна пряма у випадку, коли $l \parallel \beta$, але $l \# a,\ l \# b$. Проекцією даної пари прямих буде пряма з виділеною на ній точкою у випадках, коли $l \parallel a$ або $l \parallel b$.

30. Нехай площина α і пряма l утворюють апарат паралельного проектування, прямі $a\ i\ b$ є мимобіжними. У просторі існує така площина β, що $a \parallel \beta,\ b \parallel \beta$. Таких площин безліч, всі вони є паралельними між собою. Проекцією даної пари прямих на площину α у напрямку прямої l буде пара прямих a' і b' площини α, які перетинаються у випадку, коли $l \# \beta$, пара

паралельних прямих у випадку, коли $l \parallel \beta$, але $a \# l$ і $b \# l$. Проекцією даної пари прямих на площину α у напрямку прямої l будуть пряма і точка, що цій прямій не належать, у випадках, коли $a \parallel l$ або $b \parallel l$.

31. Так. За площину α можна прийняти будь-яку площину, яка є одночасно паралельною до прямих a *і* b.

32. Треба, щоб прямі AA' і BB' були паралельними. Тому, якщо положення відрізків AB і $A'B'$ у просторі фіксовано, то — ні, якщо за допомогою рухів відрізки AB і $A'B'$ можна переміщувати у просторі — то так.

33. Так.

34. Точку A' на прямій a' можна обрати довільним чином.

35. За промінь h' можна прийняти довільний промінь прямої a'.

36. Будь-яка площина, що містить пряму a, і та ж сама пряма l у якості прямої, яка задає напрямок паралельного проектування.

37. За точку B' можна прийняти довільну точку прямої a', відмінну від точки A'.

38. Якщо пряма a' є зображенням прямої a при паралельному проектуванні, то при цьому між прямими a і a' встановлено взаємно однозначну відповідність f (теорема 3.2). Нехай точки $A, B \in a$, $A \neq B$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'\left(A', B' \in a'\right)$. Позначимо $k = \dfrac{A'B'}{AB}$. Якщо точки $P, Q \in a$, $P \neq Q$, $f(P) = P'$, $f(Q) = Q'(P', Q' \in a')$, то, за теоремою 3.9, $\dfrac{P'Q'}{A'B'} = \dfrac{PQ}{AB}$ або $\dfrac{P'Q'}{PQ} = \dfrac{A'B'}{AB}$, $\dfrac{P'Q'}{PQ}$=k, $P'Q' = k \cdot PQ$. Отже, при відображенні $f:\ a \to a'$ відстань між будь-якими двома точками змінюється у k разів, f — відображення подібності прямої a на пряму a', відношення подібності у прямих a і a' є однаковими, зображення a' є подібно-повним.

39. Згідно задач 33 і 35, у випадку, коли відомо, що пряма a' є зображенням прямої a при певному паралельному проектуванні, довільний відрізок $A'B'$ прямої a' можна вважати зображенням довільного відрізка AB прямої a при даному паралельному проектуванні. Отже, довжину відрізка AB за відрізком $A'B'$ визначити неможливо.

40.

Згідно теореми 3.4., при даному паралельному проектуванні

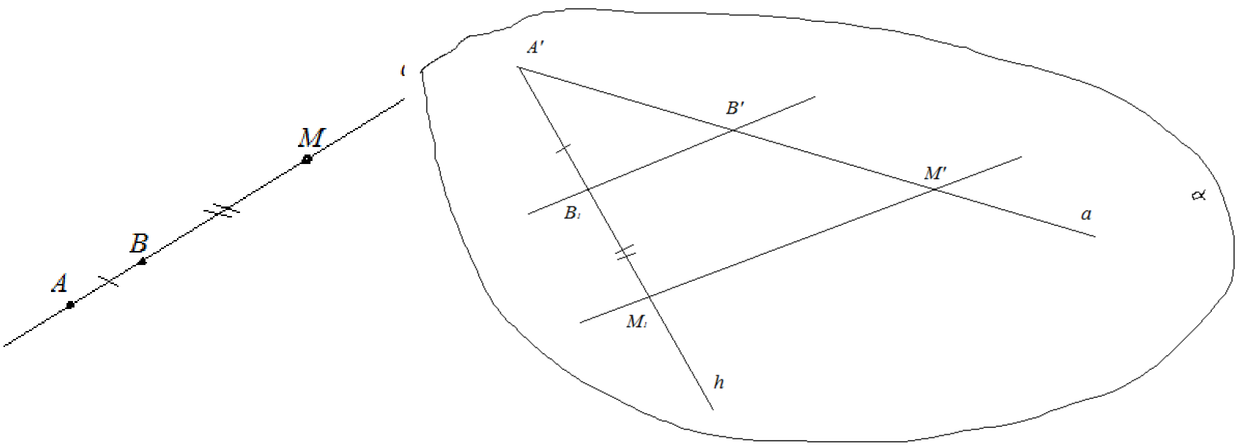


Рис.233

зображенням відрізка AB є відрізок $A'B'$, шукана точка M' лежить між точками A' і B'. Згідно теореми 3.9., при зображенні фігур за допомогою паралельного проектування зберігається відношення довжин відрізків, які лежать на одній прямій. Тому $\frac{A'M'}{M'B'} = \frac{AM}{MB}$. Відношення $\frac{A'M'}{M'B'}$ однозначно визначає положення точки M' на відрізку $A'B'$. На картинній площині α проведемо довільний промінь h з початком у точці A', який не лежить на прямій a' (рис. 233). Послідовно відкладемо на промені h відрізки $A'M_1 = AM$ і $M_1B_1 = MB$. Через точку M_1 проведемо пряму, паралельну прямій B_1B' до перетину з прямою a' у точці M'. За теоремою Фалеса $\frac{A'M'}{M'B'} = \frac{AM_1}{M_1B_1}$. Але, за побудовою, $\frac{AM_1}{M_1B_1} = \frac{AM}{MB}$. Отже, точка M' є шуканою.

41. Рис. 41.1.

На картинній площині α проведемо довільний промінь h з початком у точці A', який не лежить на прямій a'. Послідовно відкладемо на ньому відрізки $A'B_1 = AB$, $B_1M_1 = BM$. Через точку M_1 проведемо пряму паралельну прямій B_1B' до перетину з прямою a' у точці M'. Точка M' є шуканою.

Відповіді до тестових завдань для самоконтролю до розділу I

1.В

2.Б

3.А

4.А

5.А

6.

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З
I		X						
II			X					
III						X		
IV							X	

7. Г

8.

9.

	А	Б	В	Г	Д
I					X
II		X			
III				X	
IV	X				

10.

	А	Б	В	Г
I		X		
II				X
III	X			
IV			X	

11.А

12.Б

13.Г

14.В

15.А.

16.

	А	Б	В	Г	Д	Е
I	X					
II			X			
III						X
IV				X		
V					X	

17.Б

18.Г

19.А

20.В

21.Б

22.А

23.В

24.Б

25.Г

26.Б

27.А

28.

	А	Б	В	Г	Д
I			X		
II	X				
III					X
IV				X	

29.В.

30.Г.

Предметний покажчик

Іменний покажчик

Інформаційні джерела

1. Апостолова Г. В. Геометрія: Підручник для 7 класу загальноосвіт. навч. закл / Г. В. Апостолова — *К.:* Генеза, 2004. – 216 с.

2. Апостолова Г. В. Геометрія: 11 кл.: підручн. для загальноосвітн. навч. закл.: акад. рівень, профіл. рівень / Г. В. Апостолова — К.: Генеза, 2011. – 304 с.

3. Єршова А.П., Голобородько В.В., Крижановський О.Ф. Геометрія. 7 клас: Пробний підручник./ А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський,– Х.:Веста: Видавництво «Ранок», 2007. –224 с.

4. Єршова А. П. Геометрія: 11 кл.: підручн. для загальноосвітн. навч. закл.: акад. рівень, профіл. рівень/ А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов — К.: Генеза, 2011. –304 с.

5. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень. Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html

6. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html

7. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень для поглибленого вивчення / Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html

8. Погорелов А. В. Геометрія: Підручн. для *7—11* кл. загальноосвітніх. закладів/ А. В. Погорелов — К.: Освіта, 1990. – 348 с.

9. Романовський Б. В. Задачі на побудову в стереометрії/ Б. В. Романовський — К.: Радянська школа, 1936. –120с.

10. Тадеєв В.О. Геометрія. Фігури обертання. Векторно-координатний метод: Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних

закладів /За ред. М.Й. Ядренка// В. О. Тадеєв – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 480 с.

11. Четверухін М. Ф. Рисунки просторових фігур у курсі геометрії/ М. Ф. Четверухін — К.: Радянська школа, 1953. –188 с.

12. Александров А. Д. Основания геометрии/ А. Д. Александров — М.: Наука, 1987. – 288 с.

13. Атанасян Л. С. Геометрия. Учебн. пособие для студентов физ-мат фак.-тов. пед. ин-тов , Ч.1 / Л. С. Атанасян — М.: Просвящение, 1973, — 480 с.

14. Атанасян Л. С. Геометрия. В 2-х ч. Ч. I. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов./ Атанасян Л. С., Базылев В. Т. — М.: Просвещение, 1986— 336 с.

15. Атанасян Л. С. Геометрия. В 2-х ч. Ч. II. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов./ Атанасян Л. С., Базылев В. Т.– М., Просвещение, 1978 –352 с.

16. Атанасян Л. С. Геометрия Ч. II. [Учеб. Пособие для студентов физ-мат. faку.-ов пед. ин-ов] / Л. С. Атанасян, Г. Б. Гуревич — М.: Просвещение, 1976 – 447с.

17. Бескин Н. М. Изображение пространственных фигур/ Н. М. Бескин — М.: Наука, 1971. — 80 с.

18. Васильева М. В. Методы изображений/ М. В. Васильева — М.: МГПИ, 1980. – 92 с.

19. Гильберт Д. Основания геометри/ Д. Гильберт – М. : ГИТТЛ, 1948.

20. Гольберг Я. Е. С чего начинается решение стереометрической задачи. Пособие для учителя/ Я. Е. Гольберг – К.: Радянська школа, 1990, –118с.

21. Делоне Н. Б Аналитическая геометрия / Н. Б. Делоне, Д. А. Райков – М-Л: ОГИЗ Гостехиздат, 1948 – 419 с.

22. Зенгин А. Р. Основные принципы построения изображений в стереометрии/ А. Р. Зенгин –М., Учпедгиз, 1956., – 104 с.

23. Казаков П. Г. Параллельные проекции и методы решения конструктивных задач., М., Учпедгиз, 1964 – 115с.

24. Костицин В. Н. Моделирование на уроках геометрии. Библиотека учителя математики., М.: Владос, 2000, –160 с.

25. Лоповок Л.Н. Сборник стереометрических задач на построение/ Л. Н. Лоповок — М.: Учпедгиз, 1959. — 72 с.

26. Моденов П.С. Аналитическая геометрия/ П. С. Моденов –М.: МГУ, 1967

27. Начала Евклида. Книги I-VI/ М. –Л.: Гостехиздат,1948.

28. Погорелов А. В. Элементарная геометрия/ *А. В.* Погорелов — М.: Наука, 1977 – 279 с., ил.

29. Панкратов А. А. Начертательная геометрия/ А. А. Панкратов – М.: Учпедгиз, 1963. –204 с.

30. Погорелов А. В. Геометрия*:* Учеб. пособие для вузов/ А. В. Погорелов – 2 е изд. – М.: Наука, 1984. — 288 с.

31. Савченко В.М. Изображение фигур в математике/ В. М. Савченко — Киев: Вища школа, 1978. –133 с.

32. Четверухин Н. Ф. Изображение фигур в курсе геометрии Н. Ф. Четверухин — М.: Учпедгиз, 1958. – 216 с.

33. Четверухин Н. Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже Н.Ф. Четверухин — М.: Учпедгиз, 1962. – 129 с.

34. Четверухин Н.Ф. Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии/ Н.Ф. Четверухин – М.: Учпедгиз, 1946.

35. Яблонская Н. В. Элементы проективной геометрии. Методы изображений [методические рекомендации для студентов физико-математического факультета]/ Н. В. Яблонская, Н. И. Баранов, В. Ф. Брюховец, А. И. Коваленко, Е. Н. Синюкова , А. А. Тарасенко – Одесса: ОГПИ, 1990– 81 с.

36. http://www.tourkz.com/articles/petrog1_1.html

37. https://sites.google.com/site/journeythrougharthistory/ancient-greek-art

38. http://www.obretenir.info

39. http://home-sweet.ru/category/hand-made/rospis-po-steklu-keramike

40. http://www.ras.ru/win/db/show_per.asp?P=.id-218.ln-ru

41. http://3anona.ru/books/tkachev-vn-arkhitekturnyy-dizayn-funktsionalnye-i-khudozhestvennye-osnovy-proekt/stranica-106
42. http://www.focus.de/kultur/kunst/kunst-dresdner-gemaeldegalerie-zeigt-fruehen-vermeer_aid_548454.html
43. http://im-possible.info/russian/library/index.html
44. http://www.netlore.ru/moris-esher
45. http://www.lookandtravel.ru/
46. http://www.math.asu.ru/
47. http://en.wikipedia.org/www.aiway.ru/chem.msu.su