**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД**
**«ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ**
**ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені К. Д.УШИНСЬКОГО»**

***Н.В. Яблонська, О.М. Синюкова,***

***Л.П. Ладиненко, М.О.Білозерова***

***Р.М. Гаджиєва***

# ТОПОЛОГІЯ

Частина IV

Навчальний посібник

для самостійної роботи студентів

ОДЕСА - 2013

УДК 514
ББК

Рекомендовано до друку Вченою радою державного закладу
"Південноукраїнський національний педагогічний
університет імені К. Д. Ушинського "
Протокол №2 від 26 вересня 2013 року

***Рецензенти:*** кандидат фізико-математичних наук, доцент С.М. Покась ,
кандидат педагогічних наук, доцент С.В. Іванова

**Н.В. Яблонська, О.М. Синюкова, Л.П. Ладиненко, М.О.Білозерова, Р.М. Гаджиєва.** Топологія. Частина IV/ Навчальний посібник для самостійної роботи студентів. – Одеса: ПНПУ, 2013. – 50 с.

# З М І С Т

# ПЕРЕДМОВА

За умови приєднання України до Болонського процесу, передбаченого цим і, фактично, всіма іншими вимогами сучасного життя перерозподілу навчальних годин між аудиторними заняттями студентів та їх самостійною роботою на користь останньої, вельми актуальним стає оновлення науково-методичного забезпечення всіх основних навчальних курсів університетів та інститутів. Мова йде про створення сучасних багатофункціональних навчальних комплексів, спроможних забезпечити ітоговий високий рівень знань, умінь і навичок різних студентів при наявності різних викладачів. Подібні комплекси повинні вміщати відповідні навчальні плани та програми разом із переліком необхідних джерел інформації та їх короткою характеристикою, друковані тексти лекцій, підручники, збірники вправ та задач, навчальні посібники, довідники, словники, збірники запитань для тематичного і текстового контролю, аналогічні видання на електронних носіях, навчаючі електронні програми.

Даний посібник є четвертою частиною навчального посібника з курсу "Диференціальна геометрія і топологія" для студентів других-третіх курсів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. Його зміст повністю відповідає діючій програмі вищевказаного курсу, яку затверджено Міністерством освіти і науки України. Розглянуто дві теми: 1. Неперервні відображення топологічних просторів. 2. Відкриті і замкнені відображення топологічних просторів. Гомеоморфні відображення.

Матеріал розбито на два параграфи. Першу частину кожного параграфу складають достатньо повні теоретичні відомості, які ,проте, не містять доведень. Надані лише посилки на відповідні літературні джерела як навчального, так і монографічного характеру. Мається на увазі, що для оволодінні цим теоретичним матеріалом студент звернеться або до вказаних джерел, або до власного конспекту лекцій, або ( у найкращому варіанті) буде проводити доведення самостійно.

Друга частина кожного параграфу містить детальні розв'язки значної кількості типових задач. Серед них є і практичні вправи, і твердження, які, фактично, є теоремами. Типовими є самі методи проведення необхідних міркувань.

У третіх частинах кожного з параграфів наведені умови завдань для самостійного розв’язання. Тут достатньо задач для тренування. Але немало також задач. які виходять за межи програмного курсу диференціальної геометрії і топології для студентів педагогічних університетів. Розв'язання та дослідження цих задач може стати предметом курсової або, навіть, дипломної роботи з геометрії

# § 1. НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ТОПОЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ

Основна рекомендована література [2, 3, 4, 5]

Додаткова рекомендована література [1, 6]

## 1.1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

### 1.1.А. ОЗНАЧЕННЯ ТА ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ТОПОЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ

Поняття про неперервне відображення одного топологічного простору в інший виникло як природне узагальнення поняття про неперервне відображення одного метричного простору у інший, що, у свою чергу, є природним узагальненням поняття про неперервну дійсну функцію дійсного аргументу [1].

Нехай задані топологічні простори $\left(X;\tau\right)$ і $\left(Y;\mu\right)$. Відображення $f:X\to Y$ називається **неперервним у точці** $x_0\in X,\ y_0=f(x_0)$, якщо для довільного околу $V$ точки $y_0\left(y_0\in V, V\in\mu\right)$ існує такий окіл точки $x_0\ \left(x_0\in U, U\in\tau\right)$, що $f(U)\subset V$. Відображення $f:X\to Y$ називається **неперервним відображенням топологічного простору** $\left(X;\tau\right)$ у **топологічний простір** $\left(Y;\mu\right)$, якщо воно є неперервним у кожній точці $x_0\in X$. Дане означення носить локальний характер, тому що неперервність відображення $f$ на всьому просторі означена як його неперервність у кожній точці цього простору. Але неперервність відображення одного топологічного простору в інший можна визначити і глобально, зокрема у термінах відкритих і замкнених множин. Дійсно, справедливі:

***Теорема 1.1.*** Відображення $f:X\to Y$ носія топології $X$ топологічного простору $\left(X;\tau\right)$ у носій топології $Y$ топологічного простору $\left(Y;\mu\right)$ є неперервним відображенням топологічного простору $\left(X;\tau\right)$ у топологічний простір $\left(Y;\mu\right)$ тоді та тільки тоді, коли при цьому відображенні прообраз кожної відкритої у просторі $\left(Y;\mu\right)$ множини є відкритою множиною у просторі $\left(X;\tau\right)$. (доведіть самостійно або див., наприклад, [2, с.104-105]).

***Теорема 1.2.*** Відображення $f:X\to Y$ носія топології $X$ топологічного простору $\left(X;\tau\right)$ у носій топології $Y$ топологічного простору $\left(Y;\mu\right)$ є неперервним відображенням топологічного простору $\left(X;\tau\right)$ у топологічний простір $\left(Y;\mu\right)$ тоді та тільки тоді, коли при цьому відображенні прообраз кожної замкненої у просторі $\left(Y;\mu\right)$ множини є замкненою множиною у просторі $\left(X;\tau\right)$.(доведіть самостійно або див., наприклад, [2, с. 105]).

Суттєвими для характеристики неперервних відображень топологічних просторів є також наступні теореми.

***Теорема 1.3.*** Нехай відображення $f:X\to Y$ є неперервним відображенням топологічного простору $\left(X;\tau\right)$ у топологічний простір $\left(Y;\mu\right)$, а топологічний простір $\left(Z;\nu\right)$ є підпростором простору $\left(X;\tau\right)$. Тоді звуження $f\big|_Z$ відображення $f$ на носій топології $Z$ простору $\left(Z;\nu\right)$ є неперервним відображенням топологічного простору $\left(Z;\nu\right)$ у топологічний простір $\left(Y;\mu\right)$(доведіть самостійно або див., наприклад, [2, с. 106-107]).

Обернене твердження у загальному випадку є невірним. Можна навести приклади таких топологічних просторів $\left(X;\tau\right)$, $\left(Y;\mu\right)$ і відображень $f:X\to Y$, що для певного підпростору $\left(Z;\nu\right)$ простору $\left(X;\tau\right)$ відображення $f\big|_Z:Z\to Y$ є : неперервним відображенням топологічного простору $(Z;\nu)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$, але відображення $f$ не є неперервним відображенням топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$.

Так, нехай $(X;\tau)$ такий топологічний простір (наприклад, множина $R$ з природною топологією), у якому існують дві взаємно доповняльні і скрізь щільні множини $A i B (A \cup B = X, A \cap B = \varnothing, \overline{A} = \overline{B} = X)$. Розглянемо відображення $f: X \to R$, задане формулою $f(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \in B \end{cases}$.

Будемо вважати топологію на $R$ природною. Очевидно, що відображення $f\big|_A$ неперервне у кожній точці $x \in A$ відносно топології підпростору на $A$, а відображення $f\big|_B$ неперервне у кожній точці $x \in B$ відносно топології підпростору на $B$. У той же час легко довести (доведіть самостійно або див., наприклад., [4, с. 61]), що відображення $f$ не є неперервним у кожній точці $x \in X$ .

Одночасно, наприклад, має місце

***Теорема 1.4.*** Якщо $A \, i \, B$ - замкнені множини топологічного простору $(X;\tau)$, $X = A \cup B$, а $f: X \to Y$ таке відображення носія топології $X$ топологічного простору $(X;\tau)$ у носій топології $Y$ топологічного простору $(Y;\mu)$, що звуження $f\big|_A$ і $f\big|_B$ є неперервним відображенням відповідних підпросторів простору $(X;\tau)$, то відображення $f$ є неперервним відображенням топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$.

***Теорема 1.5.*** Відображення $f: X \to Y$ носія топології $X$ топологічного простору $(X;\tau)$ у носій топології $Y$ топологічного простору $(Y;\mu)$ є неперервним відображенням топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$ тоді та тільки тоді, коли неперервним є відображення $f_E : X \to E(f)$ топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(E(f):\mu_E)$, який розглядається як підпростір топологічного простору $(Y;\mu)$. Тут $E(f)=f(X)\subset Y$, для кожного $x\in X$ $f_E(x)=f(x)$ (доведіть самостійно)

***Теорема 1.6.*** Нехай відображення $f : X \to Y$ є неперервним відображенням топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$, а відображення $g : Y \to Z$ -- неперервним відображенням топологічного простору $(Y;\mu)$ у топологічний простір $(Z;\nu)$. Тоді композиція цих відображень $g\circ f : X \to Z$ є неперервним відображенням топологічного простору $(X;\tau)$. у топологічний простір $(Z;\nu)$ (доведіть самостійно або див., наприклад, [2, с. 106-107]).

***Теорема 1.7****.* Неперервний образ компактного топологічного простору є компактним топологічним просторои. (доведіть самостійно або див., наприклад, [5, с. 199]).

***Теорема 1.8.*** Якщо відображення $f : X \to Y$ зв'язного топологічного простору $(X;\tau)$ на топологічний простір $(Y;\mu)$ є неперервним і сюр'єктивним, то топологічний простір $(Y;\mu)$ також є зв'язним. (доведіть самостійно або див., наприклад, [2, с. 108]).

Звідси випливає, що, якщо відображення $f : X \to Y$ зв'язного топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$ є неперервним, але $f(X)\neq Y$, то множина $f(X)$ є зв'язною множиною у топологічному просторі $(Y;\mu)$.

Розглянемо топологічний простір $(X;\tau)$. **Шляхом** $l$ у $X$ називають неперервне відображення у $X$ певного сегмента $[a;b]$, $a<b$, множини $R$ з

природною топологією. Говорять, що шлях $l:[a;b]\to X$ з'єднує точки $x_1, x_2 \in X$, якщо $l(a)=x_1;\ l(b)=x_2$. Топологічний простір, довільні точки якого можна з'єднати певним шляхом, називається **лінійно зв'язним**.

Справедлива

***Теорема 1.9.*** Кожний лінійно зв'язний топологічний простір є зв'язним.(доведня див., наприклад, [2, с. 109, 110]).

Обернене твердження у загальному випадку є невірним. (наведіть відповідні приклади самостійно або див., наприклад, [2, с. 110]).

## 1.1.Б. Неперервні дійсні функції на топологічних просторах.

Нехай $(X;\tau)$ – довільний топологічний простір, на множині $R$ всіх дійсних чисел розглянуто природну топологію $\mu$. Відображення $f : X \to R$ називається **неперервною дійсною функцією** на просторі $(X;\tau)$, якщо воно є неперервним відображенням топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(R;\mu)$. Як і у загальному випадку, функція $f$ вважається неперервною, якщо відображення $f$ є неперервним у кожній точці $x_0$ множини $X$. Справедлива

***Теорема 1.10.*** Дійсна функція $f$, задана на топологічному просторі $(X;\tau)$ є неперервною у точці $x_0 \in X$ тоді та тільки тоді, коли для довільного
додатного дійсного числа $\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ існує такий окіл $U$ точки $x_0 (x_0 \in U, U \in \tau)$, що $f(U) \subset (f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon)$ (доведіть самостійно, використовуючи означення відкритої множини
у метричному просторі).

Під постійною функцією на множині $X$ розуміють функцію, яка кожному елементу множини $X$ ставить у відповідність однакове дійсне число $a \in R$. Має місце

***Теорема 1.11.*** Постійна функція є неперервною функцією на довільному топологічному просторі $(X;\tau)$. (доведіть самостійно)

Саме тому постійні функції вважають тривіальними неперервними функціями на топологічних просторах.

Існують топологічні простори, на яких взагалі немає нетривіальних неперервних функцій. Найпростішим прикладом подібного простору є антидискретний топологічний простір (доведіть самостійно).

Природним виявилося питання про знаходження характеристик топологічних просторів, на яких існує значна кількість різних нетривіальних неперервних функцій. Дослідження цього питання привело до виникнення поняття цілком регулярного топологічного простору.

Замкнені диз’юнктні множини $A$ і $B$ топологічного простору $\left(X;\tau\right)$ називаються **функціонально відокремленими**, якщо існує така неперервна функція $f: X \to R$, $f(X)=[0;1]$, що $f(x)=\begin{cases}0, \text{ÿêù î } x\in A;\\ 1, \text{ÿêù î } x\in B\end{cases}$.

Зрозуміло, що для функціонально відокремлених множини $A$ і $B$ топологічного простору $\left(X;\tau\right)$ існує і неперервна функція $g: X \to R$, $g(X)=[a,b]$, $[a;b]\in R$, $a<b$, для якої $g(x)=\begin{cases}a, \text{ÿêù î } x\in A;\\ b, \text{ÿêù î } x\in B\end{cases}$.

Такою функцією буде функція $g(x)=(b-a)\cdot f(x)+a$.

Топологічний простір $\left(X;\tau\right)$ називається **цілком регулярним топологічним простором**, якщо він є $T_1-$ простором і будь-яка його точка є функціонально відокремленою від будь-якої його замкненої множини, що цю точку не містить.

Як відомо, кожна одноелементна підмножина топологічного $T_1-$ простору є замкненою підмножиною цього простору. Отже, по-перше, наведене означення є цілком коректним. По-друге, для будь-яких двох точок $x_1$ і $x_2$ цілком регулярного топологічного простору $\left(X;\tau\right)$ існує таке неперервне відображення $f: X \to [a;b]$, $[a;b]\subset R$, $a<b$, що $f(x_1)=a$, $f(x_2)=b$. Тому потужність множини неперервних функцій на цілком регулярному топологічному просторі $\left(X;\tau\right)$ безпосередньо залежить від потужності множини $X$.

Кожний нормальний топологічний простір є цілком регулярним (доведення див., наприклад, у [3, с.92, 93]), дане твердження вперше було доведене П.С.Урисоном і носить назву великої леми Урисона).

Таким чином, цілком регулярними є всі метричні простори, зокрема всі простори $R^n$, $n\in N$. У той же час існують цілком регулярні топологічні простори, що не є нормальними. Кожний цілком регулярний топологічний простір є регулярним (доведення див., наприклад, у [2, с.118,119]).

Неперервним дійсним функціям на топологічних просторах притаманні стандартні властивості неперервних дійсних функцій дійсного аргументу.

Справедливі наступні

***Теорема 1.12.*** Нехай функції $f$ і $g$ є неперервними функціями на топологічному просторі $(X;\tau)$. Тоді неперервними на $(X;\tau)$ будуть і функції 1) $f \pm g$;

2) $f \cdot g$;

3) $\dfrac{f}{g}$, якщо $0 \notin g(X)$;

4) $\max_{x\in X}\{f;g\}$;

5) $\min_{x\in X}\{f;g\}$;

6) $|f|$.

(доведіть самостійно).

***Теорема 1.13.*** Нехай на топологічному просторі $(X;\tau)$ задані неперервні функції $f_1, f_2,..., f_n : X \to R$. Підмножина $A \subset X$ утворена розв'язками системи рівнянь $f_i(x)=0,\ i=\overline{1,n}$, є замкненою підмножиною носія топології $X$ топологічного простору $(X;\tau)$.(доведіть самостійно).

***Теорема 1.14.*** Нехай на топологічному просторі $(X;\tau)$ задані неперервні функції $f_1, f_2,..., f_n : X \to R$. Підмножина $A \subset X$ утворена розв'язками системи нерівностей $f_i(x) \geq 0,\ i=\overline{1,n}$ є замкненою підмножиною носія топології $X$ топологічного простору $(X;\tau)$. У той же час підмножина $B \subset X$, утворена розв'язками системи нерівностей $f_i(x) > 0,\ i=\overline{1,n}$, є відкритою підмножиною носія топології $X$ топологічного простору $(X;\tau)$.(доведіть самостійно).

***Теорема 1.15.*** Нехай на множині $R^n, n \in N$, розглянуто природну топологію. Відображення $f : X \to R^n$ топологічного простору $(X;\tau)$ у простір $R^n$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли неперервною є кожна з функцій $f_i : X \to R,\ i = \overline{1,n},\ \forall x \in X,\ f(x) = \left( f_1(x);...; f_n(x)\right) \in R^n$ (доведіть самостійно).

***Теорема 1.16.*** Нехай функція $f : X \to R$ неперервна на компактному топологічному просторі $(X;\tau)$. Тоді функція $f$ обмежена і приймає на $X$ свої найбільше і найменше значення (доведення див., наприклад, у [3, с.101]).

Сім'я $\{f_s\}_{s\in S}$ неперервних відображень носія топології $X$ топологічного простору $(X;\tau)$ у одиничний відрізок $[0;1] \subset R$ називається **розбиттям одиниці** на просторі $(X;\tau)$, якщо $\sum\limits_{s\in S} f_s(x) = 1$ для кожного $x \in X$. Остання рівність має той зміст, що для довільної фіксованої точки $x_0 \in X$ лише злічена кількість функцій $f_s$ у точці $x_0$ не дорівнює нулю і ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_{s_i}(x_0)$, де $\{s_1, s_2, ...\} = \{s \in S : f_s(x_0) \neq 0\}$ збігається до 1. Це ряд з додатніми членами, отже він збігається абсолютно, порядок членів не має значення, збіжність до 1 означає, що число 1 є найменшою верхньою межею всіх чисел виду $f_{s_{i_1}}(x_0) + f_{s_{i_2}}(x_0) + ... + f_{s_{i_k}}(x_0)$, де $s_1, s_2, ..., s_k \in S$.

**Розбиття одиниці** $\{f_s\}_{s\in S}$ на просторі $(X;\tau)$ називається **локально скінченним**, якщо локально скінченним є покриття $\left\{f_s^{-1}((0;1])\right\}_{s\in S}$ простору $(X;\tau)$. Це означає, що для кожної точки $x_0 \in X$ знайдеться її окіл $U_0$ і скінченна множина $S_0 = \{s_1; s_2; ...; s_k\} \subset S$, такі, що $f_s(x) = 0$ для всіх точок $x \in U_0$, всіх $s \in S \setminus S_0$, і $\sum\limits_{i=1}^{k} f_{s_i}(x) = 1$

**Розбиття одиниці** $\left\{ f_s \right\}_{s\in S}$ на топологічному просторі $\left( X;\tau \right)$ називається **підкоренним покриттю** $A$ цього простору, якщо покриття $\left\{ f_s^{-1}((0;1]) \right\}_{s\in S}$ є вписаним у покриття $A$.

Справедлива

***Теорема 1.17.*** Для кожного $T_1$– топологічного простору $\left( X;\tau \right)$ наступні умови є рівносильними:

(1) простір $\left( X;\tau \right)$ є паракомпактом;

(2) для кожного відкритого покриття топологічного простору $\left( X;\tau \right)$ існує підкорене до нього локально скінченне розбиття одиниці;

(3) для кожного відкритого покриття топологічного простору $\left( X;\tau \right)$ існує підкорене до нього розбиття одиниці.

(доведення див., наприклад, [5, с.447, 448]).

## 1.1.В. НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Неперервні відображення метричних просторів як топологічних характеризується критеріями, цілком аналогічними до тих, що є загальноприйнятими у теорії дійсних функцій дійсного аргументу класичного математичного аналізу. Справедливі наступні

***Теорема 1.18***. Відображення $f$ простору $X$ з топологією, індукованою метрикою $\rho$, у простір $Y$ з топологією, індукованою метрикою $\sigma$, є неперервним тоді та тільки тоді, коли для кожного $x \in X$ і довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що $\sigma\left(f(x), f(x_1)\right) < \varepsilon$, як тільки $\rho(x, x_1) < \delta$. (доведіть самостійно або див., наприклад, [5, с.377])

***Теорема 1.19***. Для того, щоб відображення $f$ простору $X$ з топологією, індукованою метрикою $\rho$, у простір $Y$ з топологією, індукованою метрикою $\sigma$, було неперервним, необхідно і достатньо, щоб для кожної збіжної до $x_0$ послідовності $(x_n)$ послідовність $(f(x_n))$ її образів збігалася би до $f(x_0)$ (доведіть самостійно або див., наприклад, [4, с.62]).

***Теорема 1.20***. Нехай у метричному просторі $(M; \rho)$ множину $A \subset M$, $A \neq \varnothing$, фіксовано. Функція $\rho$, що кожній точці $x \in M$ ставить у відповідність відстань $\rho(x; A)$, є неперервною функцією на даному метричному просторі. (доведіть самостійно або див., наприклад, [5, с.378]).

Метричні простори дозволяють також ввести поняття рівномірно неперервних відображень. Відображення $f: X \to Y$ метричного простору $(X; \rho)$ у метричний простір $(Y; \sigma)$ називається **рівномірно неперервним** відносно метрик $\rho$ і $\sigma$, якщо для кожного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке дійсне число $\delta > 0$, що $\sigma(f(x); f(x_1)) < \varepsilon$ для кожної пари елементів $x, x_1 \in X$, що задовольняють умову $\rho(x; x_1) < \delta$. Зрозуміло, що кожне рівномірно неперервне відображення є неперервним. Але обернене твердження не має місця. У той же час справедлива

***Теорема 1.21***.Ізометричне відображення метричного простору $(X;\rho)$ на метричний простір $(Y;\sigma)$ є рівномірно неперервним відображенням. (доводіть самостійно)

## 1.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Доведемо, що відображення $f: X \to Y$ топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$ є неперервним тоді та тільки тоді, коли образ замикання кожної множини $A$ простору $(X;\tau)$ міститься у замиканні образа цієї множини $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Дійсно, нехай відображення $f: X \to Y$ є неперервним, $y_0$- довільна точка множини $f(\overline{A})$. Тоді $y_0 = f(x_0)$, де $x_0 \in \overline{A}$. Покажемо, що $y_0 \in \overline{f(A)}$. Розглянемо довільний окіл $V$ точки $y_0$. Внаслідок неперервності відображення $f$ знайдеться такий окіл $U$ точки $x_0$, що $f(U) \subset V$ Точка $x_0$ є точкою дотику множини $A$. Тому у околі $U$ існує точка, наприклад, $x_1$, що належить множині $A$. Зрозуміло, що $f(x_1) \in V$ і $f(x_1) \in f(A)$. Таким чином, у довільному околі $V$ точки $y_0$ міститься точка $f(x_1)$ множини $f(A)$, тобто $y_0 \in \overline{f(A)}$.

Нехай тепер для кожної множини $A \subset X$ справедливе включення $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Доведемо неперервність відображення $f$. Розглянемо довільну замкнену множину $F \subset Y$. позначимо $f^{-1}(F) = A$. Якщо $x_0 \in \overline{A}$, то $f(x_0) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Оскільки $f(A) \subset F$ і множина $F$ є замкненою, то $\overline{f(A)} \subset \overline{F} = F$. Отже, $f(x_0) \in F$. Звідси $x_0 \in A$, $\overline{A} \subset A$ і тому $\overline{A} = A$, множина
$A = f^{-1}(F)$ є замкненою. Таким чином , при відображенні $f$ прообраз довільної замкненої множини є замкненою множиною, згідно теореми 1.2, відображення $f$ є неперервним.

2. Доведемо, що відображення $f:X\to Y$ топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$ є неперервним тоді та тільки тоді, коли існують такі системи околів $\{B(x)\}_{x\in X}$ у $(X;\tau)$ і $\{D(y)\}_{y\in Y}$ у $(Y;\mu)$, що для кожної точки $x\in X$ і кожного її околу $V\in D(f(x))$ існує окіл $U\in B(x)$, що задовольняє включення $f(U)\subset V$.

Нехай $B=\overline{B}$ – замкнена підмножина простору $(Y;\mu)$. $f^{-1}(B)=X\setminus f^{-1}(Y\setminus B)$. Для кожної точки $x\in f^{-1}(Y\setminus B)$ справедливе включення $f(x)\in Y\setminus B$. Отже, існує такий окіл $V\in D(f(x))$, що $V\subset Y\setminus B$. Але тоді знайдеться окіл $U\in B(x)$, що задовольняє включення $f(U)\subset V$. Очевидно, що $x\in U\subset f^{-1}(f(U))\subset f^{-1}(V)\subset f^{-1}(Y\setminus B)$. Таким чином, множина $f^{-1}(Y\setminus B)$ є відкритою у просторі $(X;\tau)$, а множина $f^{-1}(B)$ замкненою, За теоремою 1.2 відображення $f$ є неперервним, достатність сформульованого вище твердження доведено. Необхідність легко доводиться аналогічно.

3. Зрозуміло, що будь-яке відображення дискретного топологічного простору $(X;\tau)$ у будь-який топологічний простір $(Y;\mu)$ є неперервним. Аналогічно неперервним є і будь-яке відображення довільного топологічного простору у довільний антидискретний топологічний простір.

4. Нехай на непорожній множині $X$ визначені дві топології : $\tau_1$ *і* $\tau_2$. Тотожнє відображення $f$ буде неперервним відображенням топологічного простору $(X;\tau_1)$ у топологічний простір $(X;\tau_2)$ тоді та тільки тоді, коли топологія $\tau_1$ є тоншою за топологію $\tau_2$.

5. Нехай $(X;\tau)$ і $(Y;\mu)$ - довільні топологічні простори , відображення $f:X\to Y$ є постійним для кожної точки $x\in X$, $f(x)=y_0$, де $y_0$ - певна фіксована точка простору $(Y;\mu)$. Кожна відкрита множина $V$ простору $(Y;\mu)$ або містить точку $y_0$, і тоді $f^{-1}(V)=X\in\tau$, або не містить

точку $y_0$, і тоді $f^{-1}(V)=\varnothing\in\tau$. Отже, за теоремою 1.1 відображення $f$ є неперервним.

6. Нехай $f$ $i$ $g$ - неперервні відображення певного топологічного простору $(X;\tau)$ у хаусдорфів топологічний простір $(Y;\mu)$. Множина $\{x\in X : f(x)=g(x)\}$ є замкненою множиною простору $(X;\tau)$.

Щоб довести сформульоване твердження покажемо, що множина $A=\{x\in X : f(x)\neq g(x)\}$ є відкритою множиною простору $(X;\tau)$. Дійсно, для кожної точки $x\in A$ $f(x)\neq g(x)$ і тому у $(Y;\mu)$ існують такі відкриті множини $V_1$ $i$ $V_2$, що $f(x)\in V_1$, $g(x)\in V_2$, $V_1\cap V_2=\varnothing$. Множина $f^{-1}(V_1)\cap g^{-1}(V_2)$ є околом точки $x$, що міститься у $A$.

7. Для неперервності відображення $f : X\to Y$ топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$ достатньо , щоб прообрази відкритих множин , які входять до складу певної передбази простору $(Y;\mu)$ були відкритими у просторі $(X;\tau)$.

Дійсно, нехай $\alpha$ – певна передбаза топології $\mu$, $\beta$ – база топології $\mu$, породжена передбазою $\alpha$, а $V$ - довільна відкрита множина , що входить до складу бази $\beta$, тобто $V=\bigcap_{i=1} V_i$ , де $V_i\in\alpha$. За властивістю прообразів перетину множин будемо мати $f^{-1}(V)=\bigcap_{i=1}^{N} f^{-1}(V_i)$, де $f^{-1}(V_i)$ відкриті у просторі $(X;\tau)$ за умовою. Отже, прообрази всіх множин, що входять до складу бази $\beta$, також відкриті у просторі $(X;\tau)$. Нехай тепер $W$ – довільна відкрита множина простору $(Y;\mu)$. Тоді її можна представити у вигляді $W=\bigcup V_1$, де $V_i\in\beta$ і $f^{-1}(W)=\bigcup f^{-1}(V_i)$. Таким чином, множина $f^{-1}(W)$, як об'єднання відкритих у просторі $(X;\tau)$ множин, сама повинна бути відкритою у просторі $(X;\tau)$.

Необхідність вищевказаного твердження є очевидною, тому що всі елементи передбази топології $\mu$ є відкритими множинами простору $(Y;\mu)$.

8. Нехай $f$ - дійсна функція, задана на топологічному просторі $(X;\tau)$, $\xi$- певне дійсне число , $E_\xi^+ = \{x \in X; \quad f(x) > \xi\}$, $E_\xi^- = \{x \in X; \quad f(x) < \xi\}$. Множини $E_\xi^+$ і $E_\xi^-$ є, відповідно, прообразами інтервалів виду $(\xi;+\infty)$ $i$ $(-\infty;\xi)$, які утворюють передбазу природної топології множини $R$. Отже, дійсна функція $f$, задана на топологічному просторі $(X;\tau)$, є неперервною функцією на цьому просторі тоді і тільки тоді, коли для кожного $\xi \in R$ множини $E_\xi^+$ і $E_\xi^-$ належать топології $\tau$.

9. Покажемо, що для того, щоб відображення $f: X \to Y$ топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$ було неперервним у точці $x_0$, необхідно, а якщо простір $(X;\tau)$ є метричним, то і достатньо, щоб для кожної збіжної до $x_0$ послідовності $(x_n)$ послідовність $(f(x_n))$ її образів збігалася би до $f(x_0)$.

Дійсно, нехай відображення $f$ є неперервним у точці $x_0 \in X$, а $(x_n)$- довільна послідовність точок простору $(X;\tau)$, що збігається до $x_0$. Покажемо, що для кожного околу $V$ точки $f(x_0)$ , починаючи з певного номеру, всі точки послідовності $(f(x_n))$ належать $V$ . У силу неперервності відображення $f$ у точці $x_0$ існує такий окіл $U$ цієї точки, що $f(U) \subset V$. Починаючи з певного номеру, всі елементи послідовності $(x_n)$ належать цьому околу, отже, їх образи $f(x_n)$ належать $V$ .

Нехай тепер простір $(X;\tau)$ є метричним, а відображення $f: X \to Y$ таким., що образи $f(x_n)$ кожної збіжної до $x_0$ послідовності $(x_n)$ збігаються до $f(x_0)$. Припустимо, що відображення $f$ не є неперервним у точці $x_0$ і тому існує такий окіл $V_0$ точки $f(x_0)$, що у кожній відкритій кулі $B(x_0;\frac{1}{n})$ з центром у точці $x_0$ і радіусом , що дорівнює $\frac{1}{n}$, існує принаймні одна така точка $x_n$, що $f(x_n) \notin V_0$ . Але, таким чином, знайдено послідовність $(x_n) \to x_0$, образи $f(x_n)$ якої утворюють послідовність, яка прямувати до $f(x_0)$ не може. Отже, припущення є невірним, відображення $f$ є неперервним у точці $x_0$.

10. Нехай точка $x_0$ є внутрішньою точкою підмножини $A$ топологічного простору $(X;\tau)$. Тоді для неперервності відображення $f: X \to Y$ топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$ у точці $x_0$ необхідно і достатньо, щоб у точці $x_0$ було неперервним звуження $f|_A: A \to Y$, де на множині $A$ розглядається топологія , індукована топологією $\tau$.

Необхідність умови є очевидною внаслідок теореми 1.3. Нехай тепер $x_0 \in IntA$ і відображення $f$ є неперервним відносно підмножини $A$. Значить, для кожного околу $V$ точки $f(x_0)$ у просторі $(Y;\mu)$ знайдеться такий окіл $U$ точки $x_0$ у підпросторі $A$, що $f|_A(U) \subset V$. Але множина $A$ є околом точки $x_0$ у просторі $(X;\tau)$. Отже, $U$ буде околом точки $x_0$ і у просторі $(X;\tau)$. Таким чином, у точки $x_0$ у просторі $(X;\tau)$ знайшовся такий окіл $U$, що $f(U) \subset V$.

11. Нехай $S = \{A_i\}$ - певне замкнене і скінченне покриття носія топології $X$ топологічного простору $(X;\tau)$. Нехай $f: X \to Y$ - відображення топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$, всі звуження $f_i$ якого на підмножині $A_i \in S$ є неперервними. Тоді $f$ є неперервним відображенням всього топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$.

Дійсно, розглянемо у топологічному просторі $(Y;\mu)$ довільну замкнену множину $F$. Нехай $E = f^{-1}(F)$. Очевидно, що

$$f_i^{-1}(F) = E \cap A_i, \quad E = \bigcup_i (E \cap A_i).$$

За умовою, кожне відображення $f_i$ є неперервним. тому кожна із множин $f_i^{-1}(F)$ замкнена у $A_i$-му як прообраз замкненої множини $F$. Але множина $A_i$ замкнена у топологічному просторі $(X;\tau)$. Отже, множина $f_i^{-1}(F)$ повинна бути замкненою і у просторі $(X;\tau)$. Але тоді прообраз $E$ множини $F$ є замкненою множиною простору $(X;\tau)$ як об'єднання скінченної кількості замкнених множин, за теоремою 1.2. відображення $f$ є неперервним, що й треба було довести. Доведене твердження є природним узагальненням теореми 1.4.

12. Нехай $S=\{A_i \mid i\in I\}$ - певне покриття носія топології $X$ топологічного простору $(X;\tau)$. Нехай для кожного $i\in I$ задане певне відображення $h_i$ підпростору $A_i$ у топологічний простір $(Y;\mu)$, при цьому виконуються умови

$$h_i\,|_{B_{i,j}}=h_j\,|_{B_{i,j}}\text{, де } B_{i,j}=A_i\cap A_j$$

Очевидно, що локальні відображення $h_i,\quad i\in I$ однозначно визначають відображення $f$ всього топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$, яке задається формулою $f(x)=h_i(x),\quad x\in A_i,\quad i\in I$.

Таке відображення $f$ називається глобальним відображенням топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$, породженим локальним відображенням $h_i, i\in I$. При цьому зрозуміло , що кожне відображення $h_i$ є звуженням глобального відображення $f$ на підмножину $A_i$. Аналогічно до попереднього, легко довести, що, якщо покриття $S=\{A_i \mid i\in I\}$ довільного топологічного простору $(X;\tau)$ є відкритим, то глобальне відображення $f$, породжене локальними неперервними відображеннями $h_i$, є неперервним.

13. Для хаусдорфовості топологічного простору $(X;\tau)$ необхідно і достатньо, щоб для кожної пари різних точок $x_1$ і $x_2$ із множини $X$ існувало

таке неперервне відображення $f$ простору $(X;\tau)$ у хаусдорфів простір $(Y;\mu)$, що $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Необхідність є очевидною тому, що за простір $(Y;\mu)$ можна взяти сам простір $(X;\tau)$. а за відображення $f$ – тотожне відображення множини $X$ на себе.

Обґрунтуємо справедливість достатності. Нехай $x_1$ і $x_2$ різні точки топологічного простору $(X;\tau)$, $f:X\to Y$ – таке неперервне відображення простору $(X;\tau)$ у хаусдорфів топологічний простір $(Y;\mu)$. що $f(x_1)\neq f(x_2)$. Розглянемо такі околи $V_1$ і $V_2$ точок $f(x_1)$ і $f(x_2)$, що $V_1\cap V_2=\varnothing$. Зрозуміло, що множини $U_1=f^{-1}(V_1)$ і $U_2=f^{-1}(V_2)$ будуть околами точок $x_1$ і $x_2$ у просторі $(X;\tau)$, які не перетинаються.

14. Нехай $K$ – пряма Зоргенфрея, $[x;r]$ – певний елемент бази $\beta$ цього простору. Множина $[x;r]$ є відкрито-замкненою у даному топологічному просторі. Тому формула

$$f(y)=\begin{cases}0, \textit{ якщо } x\le y<r,\\ 1 \textit{ у супротивному випадку},\end{cases}$$

визначає неперервну функцію на $K$.

15. Нехай $(X;\tau)$ – топологічний простір, $\{f_i\}$ – послідовність функцій, що діють із $X$ у $R$. Говорять, що послідовність $\{f_i\}$ рівномірно збігається до повної дійсної ф рівномірно збігається до повної дійсної функції $f$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує такий номер $k\in N$, що $|f(x)-f(x_i)|<\varepsilon$ при кожному $x\in X$ і довільному $i\ge k$. Якщо послідовність $\{f_i\}$ неперервних на $X$ функцій рівномірно збігається до функції $f:X\to R$, то $f$ – неперервна на $X$.

Для доведення достатньо показати, що для кожної точки $x_0 \in X$ і довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий окіл $U$ точки $x_0$, що
$\left| f(x_0) - f(x_1) \right| < \varepsilon$
при кожному $x_1 \in U$.

Оберемо таке натуральне число $k$, що

$$\left| f(x) - f_i(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при всіх } x \in X_i \ i \geq k \qquad (1).$$

Із неперервності функції $f_k$ випливає, що існує такий окіл $U$ точки $x_0$, що

$$\left| f_k(x_0) - f_k(x_1) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при всіх } x_1 \in U \qquad (2).$$

Покажемо, що саме окіл $U$ має необхідні властивості. Нехай $x_1 \in U$. В силу $(1)$ і $(2)$

$$\left| f(x_0) - f(x_1) \right| \leq \left| f(x_0) - f_k(x_0) \right| + \left| f_k(x_0) - f_k(x_1) \right| +$$
$$+ \left| f_k(x_1) - f(x_1) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

16. Нехай $(X;\tau)$ – нормальний топологічний простір, $F \subset X$ – певна його замкнена множина, $f : F \to R$ – неперервна функція на множині $F$. Тоді функцію $f$ можна продовжити до неперервної функції $g : X \to R$ на всьому просторі $(X;\tau)$. Якщо функція $f$ обмежена, $\left| f(x) \right| \leq A$ на $F$, то і функцію $g$ можна обрати обмеженою тією ж самою константою $\left| g(x) \right| \leq A$ на $X$.

Доведемо сформульоване вище положення. Припустимо спочатку, що функція $f$ є обмеженою: $\left| f(x) \right| \leq A$ на $F$. Покладемо $\varphi_0(x) = f(x)$ і розглянемо на $F$ дві замкнені підмножини $A_0 = \left\{ x \,\middle|\, \varphi_0(x) \leq -\frac{A}{3} \right\}$,

$B_0=\left\{x\left|\varphi_0(x)\geq\frac{A}{3}\right.\right\}$. Зрозуміло, що $A_0\cap B_0=\varnothing$. Тоді, згідно леми П.С.Урисона, існує неперервна функція $f_0:X\to\left[-\frac{A}{3};\frac{A}{3}\right]$, що дорівнює $-\frac{A}{3}$ множині $A_0$ і $\frac{A}{3}$ на множині $B_0$. Іншими словами, $\left|f_0(x)\right|\leq\frac{A}{3}$, $x\in X$, $\left|\varphi_0(x)-f_0(x)\right|\leq\frac{2A}{3}$. Покладемо $\varphi_1(x)=\varphi_0(x)-f_0(x)$. Функція $\varphi_1(x)$ обмежена на множині $F$ константою $\frac{2A}{3}$. Тому, повторюючи весь процес, можна побудувати дві замкнені множини $A_1=\left\{x\left|\varphi_1(x)\leq-\frac{2A}{9}\right.\right\}$ і $B_1=\left\{x\left|\varphi_1(x)\geq\frac{2A}{9}\right.\right\}$, $A_1\cap B_1=\varnothing$, і неперервну функцію $f_1:X\to\left[-\frac{2A}{9};\frac{2A}{3}\right]$, що дорівнює $-\frac{2A}{9}$ на множині $A_1$ і $\frac{2A}{3}$ на множині $B_1$. Тоді на $X$ $\left|f_1(x)\right|\leq\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}A$, $\left|\varphi_1(x)-f_1(x)\right|\leq\frac{4}{9}A$. Повторюючи указаний процес до нескінченності, побудуємо дві послідовності функцій $f_n:X\to R$ і $\varphi_n:F\to R$, які задовольняють наступні умови

$$\varphi_{n+1}(x)=\varphi_n(x)-f_n(x);$$

$$\left|f_n(x)\right|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{A}{3}; \qquad (3)$$

$$\left|f_n(x)\right|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot A; \qquad (4)$$

$$f(x)=\varphi_0(x)=f_0(x)+\varphi_1(x)=\ldots=f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_n(x)+\varphi_{n-1}(x)$$

коли $x\in F$.

Завдяки нерівності (3), ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ рівномірно збігається на всьому просторі $(X;\tau)$. Як було доведено під номером 14, функція $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ є неперервною і $g(x)=f(x)$, коли $x\in F$. В силу нерівності (3) $\left|g(x)\right| \le \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|f_n(x)\right| \le \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{A}{3} = A.$

У випадку зближеної функції $f$ сформульоване твердження доведено.

У загальному випадку розглянемо взаємно однозначне і взаємно неперервне відображення $h:R\to(-1;1)$. Тоді композиція $h\circ f:F\to(-1;1)$ є неперервною обмеженою функцією. На її підставі можна побудувати неперервну функцію $g:X\to[-1;1]$, що є продовженням функції $h\circ f$. Значення $\pm 1$ функція $g$ приймає на певній замкненій множині $F_1$, що не перетинається зі множиною $F$. За лемою П.С.Урисона, існує неперервна функція $\psi:X\to[0;1]$, яка дорівнює $1$ на множині $F$ і нулю на множині $F_1$. Тоді функція $g_1(x)=\psi(x)\cdot g(x)$, $x\in X$, співпадає з функцією $h\circ f$ на множині $F$ і не приймає значень $\pm 1$. Таким чином, функція $g_1$ відображає простір $(X;\tau)$ у інтервалі $(-1;1)$. Покладемо $g_2(x)=h^{-1}g_1(x)$. Тоді, при $x\in F$, $g_2(x)=h^{-1}g_1(x)-h^{-1}hf(x)=f(x)$. Сформульоване твердження повністю доведене.

## 1.3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ.

1.1. Нехай $\left(X;\tau\right)$ і $\left(Y;\mu\right)$ – певні топологічні простори. Доведіть, що відображення $f:X\to Y$ є неперервним відображенням простору $\left(X;\tau\right)$ у простір $\left(Y;\mu\right)$ тоді і тільки тоді, коли прообраз довільного елемента певної бази топології $\mu$ є відкритою множиною у топологічному просторі $\left(X;\tau\right)$.

1.2. Нехай $\left(X;\tau\right)$ і $\left(Y;\mu\right)$ – певні топологічні простори. Доведіть, що відображення $f:X\to Y$ є неперервним відображенням простору $\left(X;\tau\right)$ у простір $\left(Y;\mu\right)$ тоді і тільки тоді, коли для довільної підмножини $B$ множини $Y$ справедливе включення $\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$.

1.3. Нехай $\left(X;\tau\right)$ і $\left(Y;\mu\right)$ – певні топологічні простори. Доведіть, що відображення $f:X\to Y$ є неперервним відображенням простору $\left(X;\tau\right)$ у простір $\left(Y;\mu\right)$ тоді і тільки тоді, коли для кожної підмножини $B$ множини $Y$ справедливе включення $f^{-1}(Int\ B)\subset Int\ f^{-1}(B)$.

1.4. Нехай $L$ – площина Немицького, $U_i(x)$ – довільний елемент бази $\beta(x)$ у точці $x\in L$ Для кожної точки $y\in U_i(x)\setminus\{x\}$ позначимо через $y'$ точку, у якій промінь, що виходить з точки $x$ і проходить через точку $y$, перетинає коло, обмежене околом $U_i(x)$. Перевірте, що формула

$$f(y)=\begin{cases}0,\ якщо\ y=x;\\ 1,\ якщо\ y\in L\setminus U_i(x);\\ |xy|/|xy'|,\ якщо\ y\in U_i(x)\setminus\{x\},\end{cases}$$

де $|ab|$ позначає довжину сегмента, що з'єднує точки $a$ і $b$, визначає неперервну функцію $f: L \to [0;1]$.

1.5. Доведіть, що неперервний образ сепарабельного топологічного простору є сепарабельним топологічним простором.

1.6. Доведіть, що. якщо $f: X \to Y$ неперервне відображення компактного

топологічного простору $(X;\tau)$ у хаусдорфів топологічний простір $(Y;\mu)$, то для кожної підмножини $A$ множини $X$ справедливе включення $\overline{f(A)} = f(\bar{A})$.

1.7. Нехай $\tau_1$ і $\tau_2$ дві топології на певній непорожній множині $X$, топологія $\tau_1$ тонша за топологію $\tau_2$. Доведіть, що, якщо топологічний простір $(X;\tau_1)$ є компактним, а топологічний простір $(X;\tau_2)$ хаусдорфовим, то $\tau_1 = \tau_2$.

1.8. Доведіть, що, якщо компактний хаусдорфів топологічний простір $(Y;\mu)$ є неперервним образом топологічного простору $(X;\tau)$, то вага топологічного простору $(Y;\mu)$ не перевищує ваги топологічного простору $(X;\tau)$.

1.9. Доведіть, що топологічний простір $(X;\tau)$ є зв'язним тоді і тільки тоді, коли кожне неперервне відображення $f: X \to D$ цього простору у двоточковий дискретний простір $D = \{0,1\}$ є постійним, тобто або $f(X) = \{0\}$, або $f(X) = \{1\}$.

1.10. Нехай $f: X \to X$ – неперервне перетворення хаусдорфова топологічного простору $(X;\tau)$. Доведіть, що множина нерухомих точок цього відображення, тобто таких точок $x \in X$, що $f(x) = x$, є замкненою у просторі $(X;\tau)$.

1.11. Доведіть, що образ нормального топологічного простору при його неперервному відображенні у хаусдорфів топологічний простір є нормальним.

1.12. Доведіть, що на кожному некомпактному метричному просторі існує неперервна не обмежена функція.

1.13. Нехай $S=\{A_i\}$ певне відкрите покриття носія топології $X$ топологічного простору $(X;\tau)$, $f:X\to Y$ – відображення топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$, всі звуження $f_i$ якого на підмножини $A_i\in S$ є неперервними. Доведіть, що $f$ є неперервним відображенням топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$.

1.14. Нехай $S=\{A_i\}$ певне замкнене локально скінченне покриття носія топології $X$ топологічного простору $(X;\tau)$, $f:X\to Y$ – відображення топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$, всі звуження $f_i$ якого на підмножини $A_i\in S$ є неперервними. Доведіть, що $f$ є неперервним відображенням топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$.

1.15. Нехай $f,g:X\to Y$ – неперервні відображення топологічного простору $(X;\tau)$ у хаусдорфів топологічний простір $(Y;\mu)$. Доведіть, що множина $A=\{x\in X\,|\,f(x)=g(x)\}$ є замкненою множиною у топологічному просторі $(X;\tau)$.

1.16. Нехай $f,g:X\to Y$ – неперервні відображення топологічного простору $(X;\tau)$ у хаусдорфів топологічний простір $(Y;\mu)$, які співпадають на певній скрізь щільній підмножині множини $X$. Доведіть, що тоді $f$ і $g$ співпадають у кожній точці множини $X$.

1.17. Нехай $f: X \to Y$ – неперервне відображення топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$. З'ясуйте, чи буде це відображення неперервним відносно

1) сильнішої топології на $X$ і тієї ж самої топології на $Y$;

2) слабкішої топології на $X$ і тієї ж самої топології на $Y$;

3) сильнішої топології на $Y$ і тієї ж самої топології на $X$;

4) слабкішої топології на $Y$ і тієї ж самої топології на $X$.

1.18. Матриці вимірності $p \times q$ утворюють топологічний простір $Mat(p \times q; R)$, який відрізняється від простору $R^{p \times q}$ лише характером нумерації координат точок. Нехай відображення $f: X \to Mat(p \times q; R)$; $g: X \to Mat(p \times q; R)$ є неперервними відображеннями топологічного простору $(X;\tau)$. Перевірте, що відображення $X \to Mat(p \times r; R): x \to g(x) \cdot f(x)$ також буде неперервним.

1.19. Нехай відображення $f: X \to GL(n;R)$ є неперервним відображенням топологічного простору $(X;\tau)$. Перевірте, що відображення $g: X \to GL(n;R): x \to \left(f(x)\right)^{-1}$ також буде неперервним.

1.20. Відображення $f: X \to X$ метричного простору $(X;\rho)$ називається **стискуючим**, якщо існує таке число $\alpha \in (0;1)$, що для довільних точок $x_1, x_2 \in X$ справедлива нерівність $\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) \le \alpha\rho(x_1, x_2)$. Доведіть, що кожне стискуюче відображення є неперервним.

1.21. Доведіть, що кожне стискуюче відображення повного метричного простору у себе має єдину нерухому точку.

1.22. Наведіть приклад неповного метричного простору і його стискуючого відображення у себе, що не має жодної нерухомої точки.

1.23. Наведіть приклад повного метричного простору і його ізометричного відображення у себе, яке не має жодної нерухомої точки.

1.24. Нехай $(X;\rho)$ і $(Y;d)$ метричні простори. Відображення $f: X \to Y$ називається **відображенням Гьольдера**, якщо існують такі додатні числа $C$ і $\alpha$, що для довільних точок $x_1, x_2 \in X$ справедлива нерівність $d\big(f(x_1), f(x_2)\big) \le C\big(\rho(x_1; x_2)\big)^{\alpha}$. Доведіть, що кожне відображення Гьольдера є неперервним.

1.25. Нехай $(X;\tau)$ – довільний топологічний простір, $f: X \to R$ певна функція на $(X;\tau)$. Доведіть, що функція $f$ є неперервною на $(X;\tau)$ тоді і тільки тоді, коли для кожного дійсного числа $c$ множини $\{x \in X; f(x) > c\}$ і $\{x \in X; f(x) < c\}$ належать топології $\tau$.

1.26. Доведіть, що кожне неперервне відображення нескінченної множини з топологією Зариського у множину R всіх дійсних чисел з природною топологією є постійним відображенням.

1.27. З'ясуйте питання про те, чи може образом замкненої множини при неперервному відображенні одного топологічного простору на інший бути відкрита і незамкнена множина.

1.28. Наведіть приклад такого неперервного сюр'єктивного відображення f: X→Y топологічного простору (X,τ) у топологічний простір (Y,μ) і множини B, скрізь щільної у Y, що множина $f^{-1}(B)$ не є скрізь щільною у X.

1.29. Доведіть, що якщо неперервна дійсна функція f на зв'язному топологічному просторі (X,τ) приймає додатні і від'ємні значення, то у певній точці цього простору вона приймає нульове значення.

1.30. Доведіть, що відображення f метричного простору (X,d) на метричний простір (Y,ρ) є неперервним тоді і тільки тоді, коли для довільної точки $x \in X$ і довільної множини $A \subset X$, таких, що d(x,A)=0, справедлива рівність ρ(f(x);f(A))=0.

1.31. Доведіть, що образ цілком обмеженого метричного простору при неперервному відображенні у метричний простір є цілком обмеженим підпростором.

1.32. Нехай f — рівномірно неперервне відображення метричного простору (X,d) на повний метричний простір (Y,ρ). Доведіть, що (X,d) —

повний метричний простір.

1.33. Доведіть, що метричний простір (X,d) є компактним тоді і тільки тоді, коли кожна неперервна на X функція є обмеженою.

1.34. Доведіть, що кожне неперервне відображення одного компактного метричного простору на інший є рівномірно неперервним.

1.35. Доведіть, що кожна неперервна на компактному метричному просторі функція є рівномірно неперервною на цьому просторі.

# § 2. ВІДКРИТІ І ЗАМКНЕНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ТОПОЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ. ГОМЕОМОРФНІ ВІДОБРАЖЕННЯ.

Основна рекомендована література [2,3,4,5].

Додаткова рекомендована література [6,7,8].

## 2.1. Основні теоретичні відомості.

### 2.1.А. Відкриті і замкнені відображення топологічних просторів.

При неперервному відображенні одного топологічного простору на інший образ відкритої множини не обов'язково є відкритою множиною так само як і образ замкненої множини не обов'язково є множиною замкненою. (Наведіть відповідні приклади самостійно, або див., наприклад, [2, с. 107].)

Неперервне відображення $f$: $X\to Y$ топологічного простору $(X,\tau)$ у топологічний простір $(Y,\mu)$ називається **відкритим**, якщо при цьому відображенні образом кожної відкритої у просторі $(X,\tau)$ множини є множина, відкрита у просторі $(Y,\mu)$.

Неперервне відображення $f$: $X\to Y$ топологічного простору $(X,\tau)$ у топологічний простір $(Y,\mu)$ називається **замкненим**, якщо при цьому відображенні образом кожної замкненої у просторі $(X,\tau)$ множини є множина, замкнена у просторі $(Y,\mu)$.

Нехай $(X,\tau)$ — довільний топологічний простір. Тотожне відображення $f$: $X\to X$: $f(x)=x$ для кожного $x\in X$, очевидно, є відображенням і відкритим, і замкненим. Відображення вкладання $i$: $A\to X$, $A\subset X$, $i(x)=x$ для кожної точки множини $A$, є відкритим тоді і тільки тоді, коли множина $A$ є відкритою у просторі $(X,\tau)$ та є замкненим тоді і тільки тоді, коли множина $A$ є замкненою у просторі $(X,\tau)$.

Зрозуміло, що композиція відкритих відображень є відкритим відображенням, композиція замкнених — замкненим. (доведіть самостійно.)

***Теорема 2.1.*** Неперервне відображення компактного топологічного простору у хаусдорфів топологічний простір є замкненим відображенням. (доведіть самостійно, або див., наприклад, [3, с. 100].)

***Теорема 2.2***. Неперервне відображення $f: X \to Y$ топологічного простору $(X,\tau)$ у топологічний простір $(Y,\mu)$ є замкненим (відкритим) тоді та тільки тоді, коли для кожної множини $B \subset Y$ і кожної відкритої (замкненої) множини $A \subset X$, що містить $f^{-1}(B)$ існує така відкрита (замкнена) множина $\mathbf{C} \subset \mathbf{Y}$, що містить множину $B$ і $f^{-1}(C) \subset A$.(доведення див., наприклад, [5, с. 62, 63].)

## 2.1.Б. ГОМЕОМОРФНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ТОПОЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ. ПРОБЛЕМА ГОМЕОМОРФІЗМУ.

У основі топології як науки лежить поняття про гомеоморфне відображення топологічного простору. За допомогою саме цього поняття розв'язується фундаментальне питання про те, які топологічні структури варто визнати нерозрізняльними (ізоморфними). Вперше гомеоморфізми, як і неперервні відображення, топологічних просторів розглядав Фреше ([1]).

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічного простору $(X,\tau)$ на топологічний простір $(Y,\mu)$ називається **гомеоморфізмом** або **гомеоморфним відображенням**, якщо $f$ взаємно однозначно відображає множину $X$ на множину $Y$, і обернене відображення $f^{-1}Y \to X$ також є неперервним.

Для довільного топологічного простору $(X,\tau)$ тотожне відображення $i$: $X \to X$, очевидно, є гомеоморфізмом. У той же час, нехай на множині X задані дві топології $\tau_1$ і $\tau_2$, перша з яких - $\tau_1$ є сильнішою за другу - $\tau_2$ . Тоді тотожне відображення $i$: $X \to X$ як відображення простору $(X,\tau_1)$ на простір $(X,\tau_2)$, очевидно буде взаємно однозначним і неперервним. Але обернене до нього відображення неперервним не буде. Отже, це не гомеоморфізм.

Справедливі наступні

***Теорема 2.3.*** Гомеоморфне відображення $f$: $X \to Y$ топологічного простору $(X,\tau)$ на топологічний простір $(Y,\mu)$ є одночасно і відкритим, і замкненим.

(доведіть самостійно, або див., наприклад, [6, с. 66, 67].)

***Теорема 2.4.*** Відкрите взаємно однозначне відображення $f$: $X \to Y$ топологічного простору $(X,\tau)$ на топологічний простір $(Y,\mu)$ є гомеоморфізмом.

(доведіть самостійно, або див., наприклад, [6, с. 67].)

Вважають, що топологічний простір $(X,\tau)$ пов'язаний **відношенням гомеоморфності** з топологічним простором $(Y,\mu)$ , якщо існує гомеоморфне відображення $f$: $X \to Y$. Має місце

***Теорема 2.5***. Бінарне відношення гомеоморфності є відношенням еквівалентності на множині всіх топологічних просторів. (доведіть самостійно.)

Як і кожне відношення еквівалентності, відношення гомеоморфності розбиває сукупність всіх топологічних просторів на класи гомеоморфних між собою топологічних просторів, що попарно не перетинаються. Всі простори, що входять до одного класу, називаються **топологічними просторами одного й того ж топологічного типу**. Властивість топологічного простору $(X,\tau)$ , притаманна всім топологічним просторам $(Y,\mu)$, які мають той же топологічний тип, що і простір $(X,\tau)$, називається **топологічною властивістю топологічного простору $(X,\tau)$, або топологічним інваріантом**. Очевидними прикладами топологічних інваріантів є потужність множин $X$ і $\tau$. Менш очевидними є властивості зв'язності, компактності, виконання певної аксіоми зліченності чи аксіоми відокремленості. Часто сам предмет топології визначають як науку про топологічні інваріанти і називають **гумковою геометрією**. Однією з найфундаментальніших проблем загальної топології є так звана **проблема гомеоморфізма**. Вона полягає у тому, щоб для двох даних топологічних просторів $(X,\tau)$ і $(Y,\mu)$ встановити, гомеоморфні вони, чи ні. У кожному конкретному випадку характер розв'язання цієї проблеми, фактично, залежить від відповіді. Для встановлення гомеоморфності просторів $(X,\tau)$ і $(Y,\mu)$ достатньо знати принаймні одне гомеоморфне відображення $f\colon X\to Y$. Для встановлення негомеоморфності зазвичай неможливо переглянути всі існуючі відображення $f\colon X\to Y$. Треба шукати непрямі шляхи. Як правило, знаходять топологічний інваріант, притаманний одному з просторів $(X,\tau)$, $(Y,\mu)$ і не притаманний іншому. Однією з найважливіших задач загальної топології залишається задача знаходження повної системи топологічних інваріантів для топологічних просторів того, чи іншого типу.

Неперервне відображення $f\colon X\to Y$ топологічного простору $(X,\tau)$ у топологічний простір $(Y,\mu)$ називається **топологічним вкладенням**, якщо відображення $g\colon X\to f(X)$: $f(x)=g(x)$ для будь якого $x\in X$, є гомеоморфним відображенням топологічного простору $(X,\tau)$ у відповідний підпростір топологічного простору $(Y,\mu)$.

Справедливі

***Теорема 2.5.*** Вкладення підпростору у топологічний простір є топологічним вкладенням.(доведіть самостійно.)

***Теорема 2.6***. Композиція топологічних вкладень є топологічним вкладенням.(доведіть самостійно.)

## 2.2. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ.

1. Нехай відображення $f\colon X\to Y$ і $g\colon Y\to Z$ є неперервними відображеннями топологічних просторів (X,τ), (Y,μ) і (Z,υ), відображення $f$ є сюр'єктивним $(f(X)=Y)$. Доведемо, що якщо композиція $g\circ f\colon X\to Z$ є відкритим відображенням, то і відображення $g$ є відкритим.

Розглянемо довільну відкриту множину $U$ простору (Y,μ). Із сюр'єктивності відображення $f$ випливає, що $f(f^{-1}(U))=U$. Тоді $g(U)=g(f(f^{-1}(U)))=gf(f^{-1}(U))$. В силу неперервності відображення $f$, множина $f^{-1}(U)$ є відкритою у просторі (X,τ). Тоді відкритим є і відображення $g$.

2. Нехай відображення $f\colon X\to Y$ є неперервним відображенням топологічного простору (X,τ) у топологічний простір (Y,μ). Доведемо, що відображення $f$ є замкненим тоді та тільки тоді, коли для кожної точки $y \in Y$ і кожної відкритої множини $U\subset X$, що містить точку $f^{-1}(y)$ і у $Y$ існує такий окіл $V$ токи y, що $f^{-1}(V)\subset U$.

В силу теореми 2.2. достатньо показати, що, якщо відображення $f$ задовольняє сформульовані вище умови, то $f$ є замкненим. Нехай $B\subset Y$ — певна множина, $A\subset X$ — така відкрита множина простору (X,τ), що $f^{-1}(B)\subset A$. Для кожної точки $y\in B$ оберемо такий окіл $V_y\subset Y$ точки $y$, що $f^{-1}(V_y)\in A$. Відкрита множина $C=\bigcup\limits_{y\in B} V_y$ задовольняє включення $B\subset C$, $f^{-1}(C)\subset A$. Отже, за теоремою 2.2, відображення $f$ є замкненим.

3. Доведемо, що, якщо існує відкрите відображення $f\colon X\to Y$ локально компактного топологічного простору (X,τ) на хаусдорфів топологічний простір (Y,μ), то простір (Y,μ) також є локально компактним.

Нехай y — довільна точка простору (Y,μ), $x\in f^{-1}(Y)$, $U$ – такий окіл точки x у просторі (X,τ), що $\overline{U}$ є компактним підпростором простору (X,τ). Образ

$f(U)$ є околом точки $y$ у просторі (Y,μ). Множина $f(\overline{U})$ є компактною і, отже, замкненою у просторі (Y,μ). Тому $\overline{f(U)} \subset f(\overline{U})$, $\overline{f(U)}$ — компакт.

4. Відображення проектування $p: R^2 \to R$, визначене формулою $p(x_1;x_2)=x_1$, є відкритим відображенням, бо проекція кожного відкритого круга з центром у точці $(x_1;x_2)$ є інтервалом з центром у точці $x_1$. Разом з цим це відображення не є замкненим, тому що, наприклад, образом гіперболи $x_1x_2=1$, яка, очевидно, є замкненою підмножиною простору $R^2$, є незамкнена множина $R\backslash\{0\}$

.

5. Легко перевірити, що функція $f: R \to R$, задана формулою $f(x)=1/(1+x^2)$ служить прикладом неперервного відображення, яке є ані відкритим, ані замкненим бо $f(R)=(0;1]$, а проміжок (0;1] не є ані відкритою, ані замкненою підмножиною множини R з природною топологією.

6. Нехай відображення $f: X \to Y$ і $g: Y \to Z$ є неперервними відображеннями топологічних просторів (X,τ), (Y,μ) і (Z,υ), $h=g \circ f$. Доведемо, що якщо відображення $g$ ін'єктивне, а відображення h відкрите, то відображення f також відкрите.

Зрозуміло, що в силу ін'єктивності відображення $g$ для кожної підмножини $B \in Y$ справедлива рівність $g^{-1}(g(B))=B$, звідкіля, зокрема для довільної відкритої у просторі (X,τ) підмножини $A$, будемо мати $g^{-1}(h(A)) = g^{-1}(g(f(A)))=f(A)$.

Разом з тим, за умовою, множина $h(A)$ є відкритою у просторі (Z,υ). Тому, в силу неперервності відображення $g$, множна $g^{-1}(h(A))$, а, отже, і множина $f(A)$ є відкритими у просторі (Y,μ), тобто відображення $f$ є відкритим.

7. Доведемо, що для того, щоб відображення $f: X \to Y$ топологічного простору (X,τ) у топологічний простір (Y,μ) було замкненим, необхідно і достатньо, щоб воно зберігало операцію замикання, тобто щоб $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A$ простору (X,τ).

Дійсно, в силу неперервності відображення $f$, як було доведено раніше, для довільної підмножини A топологічного простору (X,τ) справедливе включення $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$. Разом з тим, очевидно, що $f(A) \subset f(\overline{A})$. Тому $\overline{f(A)} \subset \overline{f(\overline{A})}$ і, оскільки відображення f є замкненим, то $\overline{f(\overline{A})} \subset f(\overline{A})$. Отже, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, що й необхідно було довести.

Нехай тепер для довільної підмножини $A$ топологічного простору (X,τ) справедлива рівність $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. Згідно доведеного раніше, неперервність відображення $f$ є очевидною. За умови замкненої множини $A \subset X$ будемо мати $f(A) = \overline{f(A)}$, тобто образ кожної замкненої підмножини простору (X,τ) є замкненою підмножиною простору (Y,μ).

8. Нехай (X,τ) - нормальний топологічний простір, $f\colon X \to Y$ — його замкнене сюр'єктивне відображення на топологічний простір (Y,μ). Доведемо, що простір (Y,μ) також буде нормальним.

Нехай $A$ — замкнена підмножина топологічного простору (Y,μ). $f^{-1}(A)=A'$, множина $A'$ замкнена в топологічному просторі (X,τ) в силу неперервності відображення $f$. Нехай $U$ — окіл множини $A$ у просторі (Y,μ). В силу неперервності відображення $f$, множина $f^{-1}(U)=U'$ є відкритою у просторі (X,τ). Очевидно, $A' \subset U'$. Отже, $U'$ — окіл множини $A'$ і, згідно малої леми П.С.Урисона, існує такий окіл $V'$ множини $A'$ , що $\overline{V'} \subset U'$. Маємо включення

$A' \subset V' \subset \underline{V'} \subset U'$.

Замкнене сюр'єктивне відображення є відкритим, отже множина $f(V')$ відкрита, а множина $f(\overline{V'})$ замкнена множина топологічного простору (Y,μ). До того ж справедливі включення $A = f(A') \subset f(V') \subset f(\overline{V'}) \subset f(U')=U,$
з яких очевидним чином випливає нормальність простору (Y,μ).

9. Очевидно, що два дискретних чи два антидискретних топологічні простори гомеоморфні тоді та тільки тоді, коли мають однакову потужність.

10. Множина $R$ з природною топологією гомеоморфна інтервалу (0;1), топологія якого індукована топологією множини $R$. Гомеоморфізм між ними встановлює, наприклад, функція $y = \frac{1}{\pi} arctg\, x + \frac{1}{2}$.

11. Сфера і поверхня куба у просторі $R^3$ гомеоморфні (мається на увазі, що на сфері і на кубі — природна топологія, індукована топологією простору $R^3$ ). Якщо влаштувати центри сфери і куба у одній точці, то гомеоморфізмом між ними буде відображення проектування із спільного центру.

Нехай $S$ — сфера простору $R^3$ , точка $A\in S$. Тоді множина $S\backslash\{A\}$ є гомеоморфною до площини. Дійсно, проведемо площину $\alpha$, що дотикається до сфери $S$ у точці В, діаметрально протилежній до точки $A$. Гомеоморфізм множини $S\backslash\{A\}$ на $\alpha$ можна встановити за допомогою центрального проектування із точки $A$.

12. Відкрита напівсфера $A=\{(x_1;x_2;x_3)\in R^3: x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_3<0\}$ також гомеоморфна до площини. Нехай $\alpha$ - площина з рівнянням $x_3=-1$. Гомеоморфізм між $A$ і $\alpha$ можна встановити за допомогою центрального проектування із точки O(0;0;0). Мається на увазі, що топологія на $A$ і на $\alpha$ є природною, тобто індукованою природною топологією простору $R^3$.

13. Топологічні простори (0;1) і $(0;1)\cup(1;2)$ з природною топологією (тобто топологією, індукованою природною топологією множини $R$) не є гомеоморфними, бо перший з них є зв'язним топологічним простором, а другий – ні.

14. Якщо відображення $f: X\to Y$ є гомеоморфізмом топологічного простору $(X,\tau)$ не на топологічний простір $(Y,\mu)$, а на певний його підпростір $Y_0$, то образи відкритих (замкнених) у просторі $(X,\tau)$ множин, зрозуміло, відкриті (замкнені) у просторі $Y_0=f(X)$, можуть виявитися невідкритими (незамкненими) підмножинами простору $(Y,\mu)$. Так, наприклад, відображення $\varphi: R^1\to R^2$, задане формулою $\varphi(x)=(x;0)$, очевидно є гомеоморфізмом на підпростір $Y_0=\varphi(R)\subset R^2$, разом з тим, воно не є відкритим відображенням простору $R$ у простір $R^2$.

15. Нехай $f$: $X\to Y$ неперервне взаємно однозначне відображення компактного топологічного простору $(X,\tau)$ у хаусдорфів топологічний простір $(Y,\mu)$. Доведемо, що $f$ – гомеоморфізм. Розглянемо обернене

відображення $f^{-1} : Y \to X$. Достатньо обґрунтувати його неперервність. Нехай $A \subset X$ - довільна замкнена множина простору (X,τ) . За раніше доведеним відображення $f$ є замкненим. Отже, множина $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ замкнена у просторі (Y,μ), що і означає неперервність відображення $f^{-1}$.

## 2.3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.1. Нехай відображення $f: X \to Y$ і $g: Y \to Z$ є неперервними відображеннями топологічних просторів $(X;\tau)$, $(Y;\mu)$ і $(Z;\upsilon)$, відображення $f$ є сюр'єктивним $\left(f(X)=Y\right)$. Доведіть, що, якщо композиція $g \circ f: X \to Z$ є замкненим відображенням, то і відображення $g$ є замкненим.

2.2. Доведіть, що неперервне відображення $f: X \to Y$ топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$ є відкритим тоді і тільки тоді, коли образ кожного околу $U_0$ довільної точки $x_0 \in X$ є околом точки $f(x_0) \in Y$.

2.3. Нехай відображення $f: X \to Y$ і $g: Y \to Z$ є неперервними відображеннями топологічних просторів $(X;\tau)$, $(Y;\mu)$ і $(Z;\upsilon)$, $h = g \circ f$. Доведіть, що, якщо відображення $g$ є ін'єктивним, а відображення $h$ є замкненим, то і відображення $f$ також буде замкненим.

2.4. Доведіть, що неперервне відображення $f: X \to Y$ топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$ є відкритим тоді і тільки тоді, коли існує така база $\beta$ простору $(X;\tau)$, що множина $f(U)$ є відкритою у топологічному просторі $(Y;\mu)$ для кожної множини $U \in \beta$.

2.5. Доведіть, що відображення $r: R \to Y$ множини $R$ з природною топологією у сегменті $Y=[0;1] \subset R$ з природною топологією, визначене формулою $r(x) = \begin{cases} 0.\ при\ x \le 0; \\ x.\ при\ 0 \le x \le 1; \\ 1\ при\ x \ge 1 \end{cases}$ є замкненим, але не відкритим.

2.6. Доведіть, що замкнене взаємно однозначне відображення $f : X \to Y$ топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$ є гомеоморфізмом.

2.7. Доведіть, що взаємно однозначне відображення $f : X \to Y$ топологічного простору $(X;\tau)$ у топологічний простір $(Y;\mu)$ є гомеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли воно зберігає операцію замикання, тобто коли для кожної множини $A \subset X$ справедлива рівність $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

2.8. Доведіть, що інтервал, півінтервал та сегмент на множині $R$ дійсних чисел з природною топологією є множинами попарно не гомеоморфними.

2.9. Нехай відображення $f : X \to Y$ є взаємно однозначним відображенням топологічного простору $(X;\tau)$ на топологічний простір $(Y;\mu)$. Доведіть, що для того, щоб відображення $f$ було гомеоморфізмом, необхідньою і достатньою є наступна умова: множина $f(A)$ є замкненою у топологічному просторі $(Y;\mu)$ тоді і тільки тоді, коли множина $A$ є замкненою у просторі $(X;\tau)$.

2.10. Нехай відображення $f : X \to Y$ є взаємно однозначним відображенням топологічного простору $(X;\tau)$ на топологічний простір $(Y;\mu)$. Доведіть, що для того, щоб відображення $f$ було гомеоморфізмом, необхідньою і достатньою є наступна умова: множина $f(B)$ є замкненою множиною . топологічного простору $(X;\tau)$ тоді і тільки тоді, коли множина $B$ є замкненою у топологічному просторі $(Y;\mu)$.

2.11. Нехай відображення $f : X \to Y$ є взаємно однозначним відображенням топологічного простору $(X;\tau)$ на топологічний простір $(Y;\mu)$. Доведіть, що для того, щоб відображення $f$ було гомеоморфізмом, необхідньою і достатньою є наступна умова: множина $f(A)$ є відкритою у. просторі $(Y;\mu)$ тоді і тільки тоді, коли множина $A$ є відкритою у просторі $(X;\tau)$.

2.12. Нехай відображення $f: X \to Y$ є взаємно однозначним відображенням топологічного простору $(X;\tau)$ на топологічний простір $(Y;\mu)$. Доведіть, що для того, щоб відображення $f$ було гомеоморфізмом, необхідньою і достатньою є наступна умова: множина $f^{-1}(B)$ є відкритою у. просторі $(X;\tau)$ тоді і тільки тоді, коли множина $B$ є відкритою у просторі $(Y;\mu)$.

2.13. Нехай множину $R$ всіх дійсних чисел наділено однією з наступних топологій: $\tau_1$ – дискретна топологія; $\tau_2$ – природна топологія; $\tau_3$ – топологія інтервалів з центром у точці $x_0 = 0$; $\tau_4$ – топологія прямої Заргенфрея. Доведіть, що для кожного дійсного числа $a > 0$ відображення $f_a : X \to X$ топологічного простору $(X;\tau_i)$, $i = \overline{1,4}$, на себе, задане формулою $f_a(x) = ax$, є гомеоморфізмом. Доведіть, що при $a < 0$ дане відображення також є гомеоморфізмом відносно топологій $\tau_1$, $\tau_2$ і $\tau_3$, але не є неперервним відображенням відносно топології $\tau_4$.

2.14. Доведіть, що хаусдорфів топологічний простір є локально компактним тоді і тільки тоді, коли він є гомеоморфним до відкритого підпростору певного компакта.

2.15. Знайдіть неперервне взаємно однозначне відображення множини $[0;1] \subset R$ з природною топологією у коло $S \subset R^2$ з природною топологією, що не є гомеоморфізмом.

2.16. Доведіть, що кожне ізометричне відображення одного метричного простору на інший є гомеоморфізмом.

2.17. Доведіть, що кожне невироджене афінне перетворення евклідового простору $R^n$, $n \in N$, є гомеоморфізмом відносно природної топології $R^n$.

2.18. Нехай відображення $f: R \to R$ є взаємно однозначним. Доведіть, що відображення $f$ є гомеоморфізмом відносно природної топології на $R$ тоді і тільки тоді, коли функція $f$ є строго монотонною.

2.19. Наведіть приклад двох гомеоморфних між собою топологічних просторів $(X;\tau)$ та $(Y;\mu)$ і взаємно однозначного неперервного відображення $f: X \to Y$, яке не є гомеоморфізмом.

2.20. Доведіть, що наступні відкриті підмножини площини $R^2$ з природною топологією є гомеоморфними між собою:

(1) сама площина $R^2$;

(2) внутрішність одиничного квадрата

$$\mathrm{I} = \{(x;y) | x \in (0;1); y \in (0;1)\};$$

(3) відкрита смуга $\Pi = \{(x;y) | x \in (0;1); y \in R\}$;

(4) відкрита півплощина $\mathrm{H} = \{(x;y) | x \in R; y > 0\}$;

(5) відкрита півсмуга $\mathrm{A} = \{(x;y) | x > 0; y \in (0;1)\}$;

(6) відкритий круг $\mathrm{B} = \{(x;y) | x^2 + y^2 < 1\}$;

(7) відкритий прямокутник $\mathrm{P} = \{(x;y) | a < x < b; c < y < d\}$ ;

(8) відкритий квадрант $\mathrm{K} = \{(x;y) | x > 0; y > 0\}$;

(9) відкритий кут $\Gamma = \{(x;y) | x > y > 0\}$;

(10) множина $\mathrm{N} = \{(x;y) | y^2 + |x| > x\}$;

(11) відкритий півкруг $\Theta = \{(x;y) | x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$ ;

(12) відкритий сектор $\mathrm{T} = \{(x;y) | x^2 + y^2 < 1, x > y > 0\}$.

2.21. Доведіть, що наступні підмножини площини $R^2$ з природною топологією є гомеоморфними між собою:

(1) півплощина $\mathrm{A} = \{(x;y) | x \geq 0\}$ ;

(2) квадрант $\mathrm{B} = \left\{ (x; y) \middle| x \geq 0; y \geq 0 \right\}$;

(3) угол $C = \left\{ (x; y) \mid x \geq y \geq 0 \right\}$;

(4) напіввідкрита смуга $D = \{(x; y) \mid y \in [0;1)\}$;

(5) квадрат без трійок сторін $E = \left\{ (x; y) \mid 0 < x < 1; 0 \leq y < 1 \right\}$;

(6) квадрат без двох сторін $F = \left\{ (x; y) \mid 0 \leq x < 1; 0 \leq y < 1 \right\}$;

(7) квадрат без однієї сторони $G = \left\{ (x; y) \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y < 1 \right\}$;

(8) квадрат без вершини $H = \left\{ (x; y) \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 \right\} \setminus \left\{ (1;1) \right\}$;

(9) круг без однієї граничної точки $K = \left\{ (x; y) \middle| x^2 + y^2 \leq 1; y \neq 1 \right\}$;

(10)півкруг без діаметра $L = \left\{ (x; y) \middle| x^2 + y^2 \leq 1; y > 0 \right\}$;

(11) круг без радіуса $M = \left\{ (x; y) \middle| x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \setminus [0;1]$;

(12) квадрат без половини діагоналі

$N = \left\{ (x; y) \middle| |x| + |y| \leq 1 \right\} \setminus [0;1]$.

2.22 Наведіть приклад таких топологічних просторів $(X;\tau)$ і $(Y;\mu)$, які є не гомеоморфними, але існують взаємно однозначні та неперервні відображення $f_1 : X \to Y$ і $f_2 : Y \to X$.

2.23. Наведіть приклад ін'єктивного неперервного відображення топологічного простору, яке не є топологічним вкладенням.

2.24. Доведіть, що кожний метричний простір є гомеоморфним до метричного простору скінченого діаметру.

2.25. Доведіть, що повний метричний простір може бути гомеоморфним до неповного метричного простору.

2.26. Доведіть, що підпростір всіх ірраціональних чисел простору $R$ з природною топологією є гомеоморфним до повного метричного простору.

27. Доведіть, що для довільних двох злічених скрізь щільних підмножин $A$ і $B$ топологічного простору $R^n, n \in N$, з природною топологією існує такий гомеоморфізм $f: R^n \to R^n$, для якого $f(A) = B$.

# ЛІТЕРАТУРА

1. Frechet M. Les dimensions d’un ensemble abstrait. – Math. Ann. 68(1910). – С. 145-168.

2. Синюков Н. С., Матвеенко Т. И. Топология – Київ :Вища школа,1984. –264 с.

3. Борисович Ю. П., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н. Введение в топологию. – М.: Высшая школа, 1980. – 295 с.

4. Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. - М.: Высшая школа, 1979. – 336 с.

5. Энгелькинг Р.  Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

6. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометри и топологии.-М.: МГУ,1980. – 440 с.

7. Архангельский А. В., Пономарёв В. И. Основы общей топологи в задачах и упражнениях.-М.:Наука., 1974. – 423 с.

8. Келли Дж. Л. Общая топология. – М.:Наука., 1981. – 432 с.