Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571

https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/2413-1571-2022-037-5-002 УДК 373:512

ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ РОЗКРИТТЯ СУТНОСТІ ТЕОРІЇ ТОТОЖНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ МАТЕМАТИЧНИХ ВИРАЗІВ У КУРСАХ МАТЕМАТИКИ ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Ірина ВАСІЛІОГЛО
Арцизький ліцей №5 з початковою школою та гімназією Арцизької міської ради,
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
iwanowkina19081998@gmail.com

Сергій ДРАГАНЮК
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
drahanyuk.sv@pdpu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-7697-3480

Олена СИНЮКОВА ✉
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
olachepok@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-8340-6940

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *У курсах математики закладів загальної середньої освіти змістова лінія перетворень математичних виразів, їхніх так званих тотожних перетворень, є безпосередньо наступною до змістової лінії числа, навіть, невід'ємною складовою останньої. Виходячи з позиції практико-орієнтованої концепції навчання, зрозуміло, що у навчальних курсах математики виконання тотожних перетворень математичних виразів не повинне бути самоціллю. Теорія тотожних перетворень математичних виразів, наприклад, є безпосереднім підґрунтям для розв'язування рівнянь та нерівностей, для обчислення певних типів невизначених та визначених інтегралів. У той же час, огляд сучасних підручників з алгебри, алгебри і початків аналізу для різних класів закладів загальної середньої освіти переконливо свідчить про те, що повної математичної чіткості та однозначної визначеності по відношенню до вищевказаних понять при цьому немає. Отже, проведення необхідних досліджень теоретичного характеру, з'ясування доцільних з математичної й методичної точок зору шляхів впровадження отриманих результатів у відповідні навчальні курси, представилося авторам задачею вельми актуальною.*

Матеріали і методи. *Дослідження базується на багаторічному досвіді практичної роботи авторів статті з учнями закладів загальної середньої освіти. Воно, також, є наслідком опрацювання різних джерел інформації, проведення міркувань дедуктивного характеру, формулювання висновків внаслідок синтезу отриманих умовиводів.*

Результати. *У роботі запропоновано теоретичні основи доцільних з позиції авторів підходів до сучасного висвітлення теорії тотожних перетворень математичних виразів у курсах математики закладів загальної середньої освіти, визначено практичні напрямки впровадження таких підходів у контент відповідного навчального матеріалу.*

THEORETICAL ASPECTS OF HIGHLIGHTING THE ESSENS OF THE THEORY OF IDENTICAL TRANSFORMATIONS OF MATHEMATICAL EXPRESSIONS I N MATH COURSES OF INSTITUTIONS OF GENERAL SECONDARY EDUCATION

Iryna VASILIOGLO
Artsysk Lyceum No. 5 with primary school and gymnasium of the Artsysk City Council,
State institution «South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushinsky», Ukraine
iwanowkina19081998@gmail.com

Sergey DRAHANYUK
State institution «South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushinsky», Ukraine
drahanyuk.sv@pdpu.edu.ua
https://orcid.org/0000-0001-7697-3480

Helena SINYUKOVA ✉
State institution «South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushinsky», Ukraine
olachepok@ukr.net
https://orcid.org/0000-0002-8340-6940

ABSTRACT

Formulation of the problem. *In math courses of institutions of general secondary education the content line of transformations of mathematical expressions, their so-called identical transformations directly follows the content line of a number, in fact is an integral part of the last one. According to position of practical-orientated training it is clear that carrying-out identical transformations of math expressions in training math courses mustn't be an end in itself. For example, the theory of identical transformations of math expressions forms the first-hand basis for the theory of the solution of equations and inequalities, for the calculation of some indefinite and definite integrals, and so on. At the same time, any review of the present textbooks on algebra, algebra, and the elements of cultures for different classes of the institution of general secondary education undoubtedly indicates the lack of total mathematical accuracy and the unique determinacy according to the mentioned concepts. Thus, carrying out the necessary investigations of theoretical character, clearing up the expedient from mathematical and methodical points of view steps of their introduction into corresponding training courses seem rather actual to the authors.*

Materials and methods. *The investigation is based on the author's experience of a long time of practical work with students of institutions of general secondary education. It is also a result of processing different informational sources, conducting reasoning of deductive character, and formulating conclusions with the help of the synthesis of obtained inferences.*

Results. *Expedient from the authors' point of view theoretical principles of the up-to-date highlighting the theory of identical transformations of mathematical expressions in math courses of institutions of general secondary education are suggested in the article, the practical steps of their implementation to the corresponding training content are determined.*

Для цитування:	Васіліогло І., Драганюк С., Синюкова О. Теоретичні аспекти розкриття сутності теорії тотожних перетворень математичних виразів у курсах математики закладів загальної середньої освіти. *Фізико-математична освіта*, 2022. Том 37. № 5. С. 17-24. DOI: 10.31110/2413-1571-2022-037-5-002
	Васіліогло, І., Драганюк, С., & Синюкова, О. (2022). Теоретичні аспекти розкриття сутності теорії тотожних перетворень математичних виразів у курсах математики закладів загальної середньої освіти. *Фізико-математична освіта*, 37(5), 17-24. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-037-5-002
For citation:	Vasilioglo, I., Drahanyuk, S., & Sinyukova, H. (2022). Theoretical aspects of highlighting the essens of the theory of identical transformations of mathematical expressions in math courses of institutions of general secondary education. *Physical and Mathematical Education*, 37(5), 17-24. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-037-5-002
	Vasilioglo, I., Drahanyuk, S., & Sinyukova, H. (2022). Teoretychni aspekty rozkryttia sutnosti teorii totozhnykh peretvoren matematychnykh vyraziv u kursakh matematyky zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Theoretical aspects of highlighting the essens of the theory of identical transformations of mathematical expressions in math courses of institutions of general secondary education]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 37(5), 17-24. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-037-5-002

✉ Corresponding author

Висновки. *Для курсів математики закладів загальної середньої освіти доцільною представляється розробка сучасної теорії абсолютних та відносних тотожних перетворень математичних виразів, теоретичні аспекти якої автори намагалися висвітлити у даній роботі. Запропоновані шляхи розв'язання визначених при цьому проблем вимагають подальшого ретельного обговорення.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: заклад загальної середньої освіти; курси математики; математичний вираз; тотожність; тотожне перетворення.

Conclusions. *Development of the up-to-date theory of absolute and comparative identical transformations of math expressions theoretical aspects of which the authors tried to highlight in the present paper seems to be expedient for math courses in institutions of general secondary education. Suggested ways of solving the arising problems need subsequent careful discussion.*

KEYWORDS: institution of general secondary education; mathematical courses; mathematical expression; identity; identical transformation.

ВСТУП

Постановка проблеми. В Україні, як і в усьому світі, на сучасному етапі розвитку середньої математичної освіти, так само, як і на попередніх етапах її розвитку принаймні протягом дев'ятнадцятого і двадцятого століть, змістова лінія математичних виразів, перетворень математичних виразів, їхніх так званих тотожних перетворень є безпосередньо наступною до змістової лінії числа, насамперед дійсного числа. При цьому вона одночасно є фактично і невід'ємною складовою останньої, бо вже найпростіші загальні арифметичні властивості дійсних чисел традиційно формулюються за допомогою математичних виразів, що містять букви (або змінні), у вигляді співвідношень, які для тієї чи іншої підмножини множини дійсних чисел представляють собою тотожності і забезпечують, в силу останнього, відповідну заміну одного математичного виразу іншим унаслідок так званого тотожного перетворення (див., наприклад, (Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-9 класи, 2017), (Навчальна програма з математики (алгебри і початків аналізу та геометрії) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту, 2017), (Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів для загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики), 2017), (Навчальна програма з математики для учнів 10 – 11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень, 2017)). Вища математика, здається, не вимагає розбудови спеціальної теорії тотожностей та тотожних перетворень математичних виразів. Використання квантора загальності та термінології теорії множин завжди дозволяють точно вказати множини значень змінних, для яких ті чи інші математичні вирази зі змінними приймають однакові значення (Arzarello et al., 1993; Arzarello et al., 1994). У той же час по-іншому склалася ситуація у загальній середній математичній освіті (Bednarz et al., 1992; MATHEMATICS Grades Pre-Kindergarten to 12, 2017).

Аналіз актуальних досліджень. Цілком природно, що курси математики закладів загальної середньої освіти сьогодні не оперують таким достатньо загальним поняттям як математичний вираз у цілому. Тут превалює доцільніший з методичної і, одночасно, точніший з математичної точки зору підхід, згідно якого у відповідних розділах цих курсів означують і досліджують математичні вирази лише конкретних, визначених змістом самих розділів, типів, починаючи з цілих раціональних, дробово-раціональних та ірраціональних. Але огляд сучасних підручників з алгебри, алгебри і початків аналізу, що відповідають різним рівням заглибленості у навчальний контент, для різних класів таких закладів переконливо свідчить про те, що повної математичної чіткості та однозначної визначеності при цьому немає, навіть, по відношенню до означень (див., наприклад, (Істер, 2020); (Кравчук та ін., 2015)). У той же час зрозуміло, що саме це є вкрай необхідним не лише для учнів, а й, у першу чергу, для їхніх вчителів.

У якості об'єкту дослідження в даній роботі прийнято концепції математичного виразу над певною числовою множиною, тотожно рівних математичних виразів, тотожного перетворення математичного виразу.

Мета дослідження полягає у висвітленні математичної сутності зазначених вище понять, визначенні доцільних з математичної й методичної точок зору шляхів відображення встановленої сутності у сучасних курсах математики закладів загальної середньої освіти України. З огляду на наведені вище міркування, подібна тематика дослідження авторам представляється актуальною.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Відомо, що у буденному розумінні слово «тотожність» означає однаковість, збіг, співпадіння, еквівалентність, ідентичність предметів або думок. У той же час, у курсах алгебри, алгебри і початків аналізу закладів загальної середньої освіти, так само, як і при вивченні відповідних питань у курсах вищої математики, мова, фактично йде про бінарне відношення (або бінарні відношення) тотожності на множині математичних виразів.

При цьому зрозуміло, що вже саме поняття математичного виразу вимагає уточнення. Можна було би, здається, стверджувати, що математичний вираз – це усвідомлена як єдине ціле сукупність чисел та букв певних алфавітів, пов'язаних між собою знаками математичних операцій таким чином, що утворений набір символів має математичний зміст. Наведене формулювання представляється більш-менш точним. Одночасно, воно явним чином носить занадто абстрактний, навіть, філософський характер. Цілком зрозуміло, що формулювання наведеного типу не підходять для учнів закладів загальної середньої освіти. Вони можуть здаватися не чіткими і не зрозумілими, навіть, для їхніх вчителів. Найбільш доцільним з методичної точки зору і таким, що найкращим чином відповідає математичній сутності питання, обґрунтовано визнано підхід, згідно якого у курсах математики закладів загальної середньої освіти означують і розглядають математичні вирази лише конкретних найпростіших типів. Традиційно, це цілі раціональні вирази, дробово-раціональні вирази, ірраціональні вирази, степеневі вирази, тригонометричні вирази, показникові та логарифмічні вирази, вирази мішаного характеру. При цьому вирази всіх перелічених вище типів можуть бути як суто числовими, так і такими, що містять букви, тобто, змінні, які можуть приймати значення у межах певних визначених числових множин. Той же самий математичний вираз може бути, наприклад, ірраціональним по відношенню до чисел, які містить, і цілим раціональним по відношенню до вміщених у нього букв, квадратичним по відношенню до однієї з букв і кубічним по відношенню до іншої. (Визначення типу математичного виразу по відношенню до тієї чи іншої складової є невід'ємним елементом його досконалого дослідження. Проведення подібного дослідження варто визнати доцільною тренувальною вправою для учнів.)

Усвідомлення поняття математичного виразу передбачає усвідомлення поняття про його область допустимих значень (ОДЗ). При цьому слід зауважити, що традиційну назву у даному випадку, згідно її змістового наповнення, варто визнати невдалою. Якщо розуміти словосполучення «область допустимих значень» буквально, то можна дійти до висновку, що мова йде про множину тих значень, які відповідний вираз може приймати. А тим часом, насправді, мова йде про допустимі для даного виразу значення змінних або букв, що до нього входять. Областю допустимих значень змінних (букв), що входять до заданого математичного виразу називають множину тих та тільки тих значень цих букв, при яких даний вираз має зміст як математичний вираз. Знаходженню ОДЗ математичного виразу передує встановлення типу даного виразу по відношенню до тієї чи іншої його змінної. Отже, вищевказані вправи мають тут пропедевтичний характер.

Зрозуміло, що для кожного математичного виразу, якщо він взагалі містить змінні, тобто, не є математичним виразом суто числовим, область допустимих значень його змінних існує. Суттєвим при цьому є той факт, на якій числовій множині або на яких числових множинах розглядають той чи інший математичний вираз. У курсах математики закладів загальної середньої освіти змістова лінія числа традиційно відповідає етапами свого історичного розвитку і будується за принципом розширення, зокрема з метою того, щоб на розширеній множині розширена кількість видів математичних виразів мала зміст. Так, наприклад, вираз $(\mathrm{a}\ +\ -\mathrm{b})$ взагалі не має математичного змісту і, відповідно, не є математичним виразом; на множині натуральних чисел математичний вираз $(a - b)$ має зміст тоді та тільки тоді, коли правильною є строга числова нерівність $(a > b)$. На множині натуральних чисел разом з числом нуль цей же самий вираз вже має зміст тоді та тільки тоді, коли правильною є нестрога числова нерівність $(a \geq b)$, на множинах цілих чисел, раціональних чисел, дійсних чисел, комплексних чисел він має зміст при будь-яких значеннях своїх змінних a і b. Математичний вираз $\sqrt{a}$ на множині дійсних чисел має зміст тоді та тільки тоді, коли змінна a приймає невід'ємні значення, а на множині комплексних чисел він має зміст при будь-яких комплексних значеннях змінної a. Якщо в умові задачі область допустимих значень не означається спеціально, то у курсах математики закладів загальної середньої освіти математичні вирази досліджують на множині всіх дійсних чисел.

Наступне питання, що виникає при дослідженні кожного математичного виразу, це питання про те, скільки і які саме змінні містить вираз. І лише на перший погляд таке питання здається простим. По-перше, у математиці є математичні вирази, що містять безліч букв або змінних. Але, як правило, подібні вирази не зустрічаються у курсах математики закладів загальної середньої освіти. Отже, у подальшому, мова буде йти виключно про вирази, що містять скінченну кількість змінних. По-друге, якщо, припустимо, вираз $f(a)$ містить змінну a, то, звичайно, можна вважати, що він у неявному вигляді містить, наприклад, і змінну b, тобто, $f(a;\, b) = f(a) + 0 \cdot b$. На перший погляд, вирази $f(a)$ та $f(a;\, b)$ виглядають по-різному, але тут суттєвими представляються додаткові умови кожної конкретної задачі, які можуть дозволити вважати їх однаковими. Добуток кожного дійсного (і комплексного) числа на число 0 дорівнює нулю, жодне дійсне (і комплексне) число не змінюється, якщо до нього додати число 0. Отже, за певних додаткових умов можна вважати, прийнято вважати, що вираз $f(a)$ містить, наприклад, і змінну b, змінна b у даному виразі може приймати довільні дійсні значення. І подібним чином, за потреби, кількість «уявних» змінних у кожному математичному виразі можна необмежено збільшувати.

У випадках, коли математичний вираз не є суто числовим, та у випадках, коли ОДЗ даного виразу (тобто, область допустимих значень тих змінних, що до нього входять) не є порожньою множиною, постає питання про множину значень, які цей вираз може приймати. Кожний математичний вираз після підстановки у нього замість всіх його змінних їх допустимих числових значень, стає числовим виразом, значення якого можна обчислити як результат виконання у визначеній цим виразом послідовності всіх передбачених ним дій. Кожна з подібних дій у переважній більшості випадків представляє собою алгебраїчну операцію, результат виконання якої є визначеним однозначно. Принаймні, саме цей факт має місце для переважної більшості виразів, що натепер розглядаються у курсах математики закладів загальної середньої освіти. Одночасно, математика містить і певні так звані многозначні математичні вирази. Наприклад, квадратний корінь з числа 4 приймає два значення 2 та -2, корінь кубічний з комплексного числа приймає точно три різних комплексні значення, числовий вираз $\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{2}$, на відміну від числового виразу $\arcsin\frac{1}{2}$, має нескінченне число різних дійсних значень. Отже, у переважній більшості випадків, множина значень математичного виразу, множина всіх значень, які він може приймати при тих значеннях його змінних, що входять до його ОДЗ, є певною непорожньою підмножиною множини R всіх дійсних чисел (або множини C всіх комплексних чисел), але у математиці розглядаються випадки, коли ця множина, взагалі, є підмножиною множини R^n, $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$, або, навіть, R^{∞}($C^n, \mathrm{n} \in \mathrm{N};\, C^{\infty}$).

Для суто числових виразів термін «тотожна рівність», як правило, не використовують. Точніше, кожне число вважають «тотожно рівним» лише самому собі, і у більшості випадків просто використовують термін «рівність» (звичайно, тут не повинно бути плутанини з тим фактом, що існують різні форми запису як дійсного, так і комплексного числа). Два числових вирази вважають рівними, якщо їх значення (множини їх значень) співпадають. При цьому зрозуміло, що числа обох числових виразів можна і потрібно розглядати як елементи однієї й тієї ж числової множини. Так, навіть, не можна стверджувати, що $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}$, якщо вираз, що записано ліворуч, розглядають на множині дійсних чисел, а вираз, що записано праворуч, – на множині комплексних чисел. На множині дійсних чисел $\sqrt[3]{1}=1$, а на множині комплексних чисел $\sqrt[3]{1}$ набуває кожного з трьох значень із множини $\{1, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\}$. Ці множини, очевидно, є різними. (Слід зазначити, що ми ведемо розмову і про множину комплексних чисел, принаймні, у загальнотеоретичному розділі. Опанування елементів теорії комплексних чисел для учнів одинадцятих класів передбачено навчальною програмою з математики профільного рівня з початком вивчення математики на поглибленому рівні з восьмого класу (Навчальна програма з математики для учнів 10 – 11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень, 2017).

Два математичні вирази зі змінними називають **абсолютно тотожно рівними на множині** M **або тотожно рівними на множині** M **у вузькому розумінні,** якщо вони: 1) містять однакові змінні та мають на M однакові області допустимих значень цих змінних; 2) приймають однакові значення при будь-яких однакових допустимих значеннях змінних, що до них входять, із множини M.

Наведене означення здається цілком зрозумілим. Важливо лише підкреслити, що однакові змінні обох виразів повинні розглядатися як змінні однієї й тієї ж числової множини (як то кажуть, над однією й тією ж числовою множиною), саме у межах цієї множини мати однакові області допустимих значень. Розглянемо, наприклад, вирази $\mathrm{F}_1 = \sqrt{a^2}$ і $\mathrm{G}_1 = \sqrt[4]{a^4}$. Обидва вирази містять одну однакову змінну a. Обидва мають зміст як при будь-якому дійсному значенні цієї змінної, так і при будь-якому комплексному її значенні. Отже, якщо ми розглядаємо обидва вирази на множині R всіх дійсних чисел, то ОДЗ (F_1) = ОДЗ (G_1) = R. Аналогічно, якщо ми розглядаємо обидва вирази на множині C всіх комплексних чисел, то ОДЗ (F_1) = ОДЗ (G_1) $=$ C. Але на множині всіх дійсних чисел маємо абсолютну тотожність $\mathrm{F}_1 \equiv \mathrm{G}_1$ тому, що на множині всіх дійсних чисел, при традиційному розумінні знаку кореня парного степеню як арифметичного, одночасно, мають місце абсолютні тотожності $\sqrt{a^2} \equiv |a|$, $\sqrt[4]{a^4} \equiv |a|$, обидва вирази при будь-якому дійсному значенні змінної a приймають одне й теж дійсне значення. З іншого боку, на множині C комплексних чисел для будь-якого значення змінної a вираз F_1 приймає два різних значення, а вираз G_1 – чотири. Тому на множині комплексних чисел $\mathrm{F}_1 \not\equiv \mathrm{G}_1$.

Розглянемо тепер вирази $\mathrm{F}_2 = \sqrt{a^2}$ і $\mathrm{G}_2 = a$. Якщо вважати, що змінна a може змінюватися у межах множини R всіх дійсних чисел, то ОДЗ (F_2) $=$ R так само, як і ОДЗ (G_2). Одночасно зрозуміло, що, для кожного невід'ємного значення змінної a, $\mathrm{F}_2(a) = \mathrm{G}_2(a)$, проте, для кожного від'ємного значення змінної a вказана рівність не справджується, має місце інша: $\mathrm{F}_2(a) = \sqrt{a^2} = -a$, зокрема, у випадку $a = -1$, $\sqrt{(-1)^2} = -(-1) = 1$. Отже, на множині R всіх дійсних чисел $\mathrm{F}_2(a) \not\equiv \mathrm{G}_2(a)$. З іншого боку, безумовно, на множині $R^{+} \cup \{0\}$ всіх невід'ємних дійсних чисел, тотожність $\mathrm{F}_2(a) \equiv \mathrm{G}_2(a)$ має місце.

У розумінні вищенаведених прикладів можна, здається, стверджувати, що кожне рівняння, яке має розв'язки, представляє собою тотожність на множині своїх розв'язків, кожна тотожність зі змінними над певною числовою множиною представляє собою рівняння, розв'язками якого є всі числа даної множини.

Розглянемо тепер математичні вирази $\mathrm{F}_3(a) = (a+1) - a$ та $\mathrm{G}_3 = 1$. Обидва вирази, як математичні вирази, можна розглядати, наприклад, над множиною всіх дійсних чисел. Перший вираз містить одну змінну a, він має сенс при будь-яких значеннях цієї змінної у межах вищевказаної множини, при будь-яких значеннях цієї змінної він приймає значення 1. Другий вираз взагалі не має змінних, є числовим виразом, що дорівнює одиниці. Чи варто вважати на множині всіх дійсних чисел вирази F_3 та G_3 абсолютно тотожно рівними? Якщо замість виразу G_3 припускати розглядання виразу $\mathrm{G}_4(a) = 1 + 0 \cdot a$, то зрозуміло, що можна. А от чи варто подібне припускати? Питання аналогічного характеру виникають і при розгляді інших виразів, наприклад, $\mathrm{F}_4(a) = (a+1) - a$ та $\mathrm{G}_4(\mathrm{b}) = (\mathrm{b} + 1) - \mathrm{b}$. Обидва випадки під наведене вище означення не підпадають. Виходячи із здорового глузду, здається, можна вважати (насправді, так і вважають), що $\mathrm{F}_3 \equiv \mathrm{G}_3$, для F_4 і G_4 вже виникають певні сумніви (хоча, ці вирази, звичайно рівні).

Два математичні вирази зі змінними називають **відносно тотожно рівними на множині** M **або тотожно рівними на множині** M **у широкому розумінні,** якщо вони: 1) містять однакові змінні; 2) приймають однакові числові значення при будь-яких однакових допустимих для обох з них значеннях змінних із множини M.

Як і у випадку попереднього означення при цьому треба лише підкреслити, що значення однакових змінних обох виразів повинні розглядатися у межах однієї й тієї ж числової множини, саме у межах цієї множини повинні визначатися їх області допустимих значень.

Подібне означення також здається цілком зрозуміло. З нього, зокрема, випливає, що будь-які абсолютно тотожно рівні математичні вирази є й відносно тотожно рівними. Це представляється фактом цілком природнім. Можна достатньо легко навести приклади відносно, але не абсолютно тотожно рівних математичних виразів. Нехай $\mathrm{F}_5(a) = \frac{(a-1)(a+2)^2}{a+2}$, $\mathrm{G}_5(a) = (a-1)(a+2)$ і вирази $\mathrm{F}_5(a)$ та $\mathrm{G}_5(a)$ розглядають на множині всіх дійсних чисел. Згідно свого математичного змісту, вираз $\mathrm{F}_5(a)$ є визначеним для всіх дійсних значень змінної a, за виключенням того її значення, при якому $a + 2 = 0$, тобто, $a = -2$. Отже, ОДЗ (F_5) $= (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$. Вираз $\mathrm{G}_5(a)$ має зміст для всіх дійсних значень змінної a, ОДЗ (F_5) $\neq$ ОДЗ (G_5). Але ОДЗ (F_5) $\subset$ ОДЗ (G_5), для кожного значення змінної a із ОДЗ (F_5), згідно властивостей арифметичних дій над дійсними числами, значення обох виразів співпадають. Отже, можна стверджувати, що по відношенню до множини дійсних чисел має місце відносна, але не абсолютна, тотожність. У той же час зрозуміло, що, якщо вирази $\mathrm{F}_5(a)$ та $\mathrm{G}_5(a)$ розглядати лише на множині $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ або на певній непорожній підмножині цієї множини, зокрема, на множині $R^{+} \cup \{0\}$ або на множині N всіх натуральних чисел, то вищевказана тотожність стане абсолютною.

Нехай тепер $\mathrm{F}_6(a) = \frac{(a-1)(a+2)}{(a+2)^2}$, $\mathrm{G}_6(a) = \frac{a-1}{a+2}$ і $\mathrm{F}_6(a)$ та $\mathrm{G}_6(a)$ розглядаються над множиною дійсних чисел. Очевидно, що на цій множині ОДЗ (F_6) $=$ ОДЗ (G_6) $= (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$. Для всіх значень змінної a з множини $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ значення виразів $\mathrm{F}_6(a)$ та $\mathrm{G}_6(a)$ співпадають. Отже, відповідно до наведених означень на множині дійсних чисел має місце абсолютна тотожність: $\mathrm{F}_6(a) \equiv \mathrm{G}_6(a)$.

Наведемо ще один приклад. Нехай $\mathrm{F}_7(a) = \sqrt{a} + \sqrt{-a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a}$; $\mathrm{G}_7(a) = \sqrt{a} + \sqrt{-a}$ і обидва вирази розглядають як вирази над множиною дійсних чисел. Зрозуміло, що ОДЗ (F_7) = $\emptyset$, ОДЗ (G_7) = $\{0\}$. Оскільки ОДЗ (F_7) $\neq$ ОДЗ (G_7), то спільних значень ОДЗ (F_7) і ОДЗ (G_7) не мають. Отже, вирази $\mathrm{F}_7(a)$ і $\mathrm{G}_7(a)$ не є ні абсолютно, ні відносно тотожно рівними.

Одночасно, вирази $\mathrm{F}_7(a) = \sqrt{a} + \sqrt{-a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a}$ та $\mathrm{G}_8(a) = \sqrt{a} + \sqrt{-a} + \frac{1}{a}$, які розглядають над множиною дійсних чисел, прийнято вважати абсолютно тотожно рівними, незважаючи на той факт, що ОДЗ (F_7) $=$ ОДЗ (G_8) $= \emptyset$. Аналогічне твердження по відношенню до множини дійсних чисел є справедливим, наприклад, і для виразів $F_7(a)$ та $G_7(a) = \sqrt{-1-a^2}$.

У підсумку, невизначеним залишається питання про те, чи можна та чи варто вести мову про абсолютну та відносну тотожність двох виразів, які мають різну кількість змінних, або однакову кількість змінних для позначення яких обрано різні букви. У сучасній і не лише у сучасній літературі методичного характеру нам не вдалося знайти чітких відповідей на поставлені питання, хоча, за своєю сутністю вони здаються вельми нагальними.

Тотожним перетворенням математичного виразу називається заміна його тотожно рівним до нього математичним виразом. Зрозуміло, що мова може йти як про абсолютні, так і про відносні тотожні перетворення. Зрозуміло, що при цьому повинна бути означена числова множина, у межах якої можуть розглядатися значення змінних відповідних виразів, та у межах якої визначаються області їхніх допустимих значень.

Цікаво, що у 50-60 роки XX століття теорія тотожних перетворень математичних виразів зі змінними у курсах математики закладів загальної середньої освіти була представлена зовсім у іншому ракурсі (Новоселов, 1962). Про абсолютні й відносні тотожні перетворення взагалі мови не було. По-перше, по-іншому вводилося поняття про область допустимих значень змінних математичного виразу зі змінними. Існувала концепція «продовження» ОДЗ «за неперервністю». Це означало наступне. Розглянемо, наприклад, на множині всіх дійсних чисел математичний вираз $F(a) = \frac{(a+1)(a-1)^2}{a-1}$. У розумінні сьогодення, у випадку, коли змінна a приймає значення 1, цей вираз значення не має, $\text{ОДЗ}(F(a)) = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. Одночасно, існує $\lim\limits_{a\to1} F(a) = (1+1)(1-1) = 0$. В силу цього, у ті часи за «принципом неперервності» вважали, що число 1 входить до ОДЗ даного виразу, F(1) =0, справедливою є тотожність $\frac{(a+1)(a-1)^2}{a-1} \equiv (a+1)(a-1)$. У сучасному розумінні – це відносна тотожність, а за концепцією «продовження» – просто тотожність, причому $F(1) = 0$ (з сучасної точки зору $F(1)$ не існує) . З позиції сьогодення, як з методичної, так і з математичної точок зору прийнятий у ті роки підхід варто визнати недоречним. Можна було би взагалі про нього не згадувати, але саме ідейним наслідком подібного підходу, здається, представляється відсутність вимоги визначення ОДЗ двох математичних виразів при з'ясуванні питання про їхню тотожну рівність.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідження базується на багаторічному досвіді практичної роботи авторів статті з учнями закладів загальної середньої освіти, який свідчить про доцільність і в силу цього необхідність дослідження можливих змін ОДЗ математичних виразів під час виконання перетворень таких виразів принаймні у випадках, коли проведення подібних перетворень не є самоціллю відповідного завдання, на переконанні у тому, що відсутність на певних етапах навчання обов'язкової вимоги проведення таких досліджень є помилкою методичного характеру, наслідком якої часто виступають помилки чи утруднення математичного характеру. Дослідження носить теоретичний характер. Воно є наслідком опрацювання та проведення всебічного аналізу відповідних джерел інформації, проведення міркувань дедуктивного типу (від загального до конкретного), формулювання висновків внаслідок синтезу отриманих умовиводів.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Традиційно, змістова лінія тотожних перетворень математичних виразів є однією з основних, найфундаментальніших змістових ліній курсів математики закладів загальної середньої освіти (Василіогло, Синюкова, 2021). Здається доцільним у випадку, коли поставлено питання про тотожну рівність двох математичних виразів, які містять різну кількість змінних (один з яких, можливо, взагалі є суто числовим) або однакову кількість змінних але позначених різними буквами, вважати, що обидва вирази все ж таки містять однакову кількість однакових змінних, але певні змінні входять до них «неявно», у вигляді доданків типу (0·a), тобто, таких доданків, які не встановлюють обмеження на ОДЗ відповідної змінної у межах визначеної множини. Подібне припущення дозволяє подалі застосовувати наведені вище міркування. Згідно нього, наприклад, на множині всіх дійсних чисел, як і на множині всіх комплексних чисел, математичні вирази $F_3(a) = (a+1) - a$ і $G_3(a) = 1 = 1 + 0 \cdot a$ є абсолютно тотожно рівними, вирази $F_4(a;b) = (a+1) - a = (a+1) - a + 0 \cdot b$ і $G_4(a;b) = (b+1) - b = (b+1) - b + 0 \cdot a$ на множині $(a;b) \in R^2$ є абсолютно тотожно рівними вирази $F_4(a;b) = (a+1) - a + 0.b$ і $G_9(a;b) = (a+1) - a + 0{:}b$ є відносно тотожно рівними, і подалі, і тому подібне.

У підсумку, якщо визначено числову множину, на якій можуть розглядатися значення змінних математичних виразів (у курсах математики закладів загальної середньої освіти переважно це множина всіх дійсних чисел), для будь-яких двох математичних виразів можна однозначно встановити, чи є вони абсолютно тотожно рівними один до одного, чи ні; чи є вони відносно тотожно рівними один до одного, чи ні. Це означає існування на множині математичних виразів двох бінарних відношень: абсолютної тотожної рівності і відносної тотожної рівності. Зрозуміло, що обидва відношення є рефлексивними та симетричними. Бінарне відношення абсолютної тотожної рівності є ще й транзитивним і, таким чином, є відношенням еквівалентності. Бінарне відношення відносної тотожної рівності транзитивним не є. Останнє твердження справджується, зрозуміло, за умови того, що математичні вирази, які мають однакові змінні та ОДЗ яких мають порожній перетин, відносно тотожно рівними не вважаються. Розглянемо, наприклад, вирази $F_8(a) = \sqrt{(a-1)(2-a)}$; $F_9(a) = \sqrt{1-a}$; $F_{10}(a) = \sqrt{a-2}$, де змінна a приймає значення на множині дійсних чисел. ОДЗ (F_8) = $[1;2]$; ОДЗ (F_9) = $(-\infty;\ 1]$; ОДЗ (F_8) ∩ ОДЗ (F_8)={1}; $F_8(1)$=0 = $F_9(1)$. Отже, вирази F_9 та F_8 є відносно тотожно рівними. ОДЗ (F_{10}) = [2; +∞); ОДЗ (F_{10}) ∩ ОДЗ (F_8) = {2}; $F_8(2)$ = 0 = $F_{10}(2)$, вирази F_8 і F_{10} також є відносно тотожно рівними, ОДЗ (F_9) ∩ ОДЗ (F_{10}) = ∅, вирази F_9 та F_{10} не є відносно тотожно рівними.

Строга теорія тотожностей і тотожних перетворень є необхідною по-перше, для розв'язування вправ на спрощення заданого математичного виразу. При цьому зрозуміло, що термін «спростити» носить досить умовний характер. З одного боку, можна вважати, що математичний вираз є тим більш простим, чим менше математичних символів він містить. З іншого, під спрощенням, наприклад, цілого раціонального виразу можна розуміти представлення його у вигляді многочлена, а це часто не призводить до зменшення кількості математичних символів у відповідному записі. У будь-якому разі подібна умова завдання для заданого виразу передбачає послідовне виконання однокрокових тотожних перетворень і, у загальному випадку, не лише абсолютних. Кожне конкретне однокрокове тотожне перетворення являє собою застосування певного стандартного тотожного перетворення, що висловлює встановлені властивості відповідних математичних дій, до окремих складових заданого математичного виразу. Воно може буди як абсолютним, так і відносним. Виникає питання про те, чи варто кожного разу усвідомлювати, перетворення якого саме типу є виконаним. З практичної точки зору це означає визначеність з відповідями на питання, чи треба перед початком виконання тотожних перетворень математичного виразу знаходити його ОДЗ, чи треба досліджувати питання про зміни ОДЗ на кожному кроці перетворень. Виходячи із загальнотеоретичних міркувань, ми, безумовно, повинні відповісти, що «так». Чи завжди при проведенні тотожних перетворень математичних виразів варто вказувати область допустимих значень їхніх змінних? З математичної точки зору відповідь може бути лише наступною: при виконанні абсолютних тотожних перетворень необхідності вказувати ОДЗ відповідних виразів немає. При виконанні відносних тотожних перетворень, які не є абсолютними, вказівка, навпаки, є необхідною.

Одночасно, на жаль, якщо умова запропонованого завдання містить лише вимогу «спростити», то відповідно до сучасних вимог методичного характеру для учнів закладів загальної середньої освіти, типи виконаних тотожних перетворень можна не досліджувати. Так, допустимим вважається виконання у вигляді окремих завдань без додаткових коментарів таких відносних тотожних перетворень, наприклад, як $\frac{(a-1)(a+1)^2}{a+1} = (a-1)(a+1)$; $\operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x$. У обох випадках, при переході від першого математичного виразу до другого, відбувається поширення ОДЗ. Обернені переходи, які відбуваються із звуженням ОДЗ, без коментарів, як правило, допустимими не вважаються (хоча, звичайно, якщо ОДЗ не знаходиться, подібні міркування носять виключно інтуїтивний характер).

Важливо підкреслити, що знаходження ОДЗ заданого математичного виразу у певних випадках дозволяє встановити найбільш раціональні шляхи реалізації проголошених за необхідне тотожних перетворень. Якщо заданий вираз одночасно містить, наприклад, ірраціональні вирази $\sqrt[3]{a}$ та $\sqrt{a}$ і мається на увазі, що змінна a приймає значення на множині дійсних чисел, то, замість цих ірраціональних виразів, можна записати степеневі вирази $a^{\frac{1}{3}}$ та $a^{\frac{1}{2}}$, це буде абсолютним тотожнім перетворенням. Якщо же заданий вираз містить лише ірраціональні підвирази виду $\sqrt[3]{a}$, то, відповідно до того, що, згідно означення і властивостей кубічного кореня, змінна a може приймати довільні дійсні значення, для виконання абсолютних тотожних перетворень, можна розглянути два випадки: $a \geq 0$ і $a < 0$. У першому випадку вираз $\sqrt[3]{a}$ можна замінити на вираз $a^{\frac{1}{3}}$, у другому – на вираз $\left(-(-a)^{\frac{1}{3}}\right)$, другий варіант заміни важко вважати спрощенням.

По-друге, теорія тотожних перетворень є цілком необхідною для виконання вправ типу «спростити заданий математичний вираз F та обчислити його значення при вказаних значеннях змінних, які він містить». Для розв'язання подібного завдання спочатку треба переконатися у тому, що при вказаних значеннях змінних заданий вираз F має зміст. Це означає, що треба визначитися з ОДЗ виразу F і перевірити, чи входять до цього ОДЗ заданні значення змінних. Далі, зрозуміло, що у процесі спрощення виразу F можна виконувати його абсолютні тотожні перетворення і такі відносні тотожні перетворення, які не призводять до вилучення з ОДЗ вказаних умовою завдання значень змінних. Отже, для розв'язання вправ подібного типу дослідження питань про зміни ОДЗ на кожному кроці тотожних перетворень є необхідними.

Теорія тотожних перетворень математичних виразів є обов'язковим підґрунтям загальної теорії рівнянь, нерівностей, їх систем та сукупностей. Мають місце наступні фундаментальні теореми.

Теорема 1. Виконання у певній частині рівняння (нерівності) абсолютних тотожних перетворень призводить до рівняння (нерівності), рівносильного (рівносильної) до даного (даної).

Теорема 2. Виконання у певній частині рівняння (нерівності) відносних тотожних перетворень, які не змінюють ОДЗ даного рівняння (даної нерівності) призводить до рівняння (нерівності), рівносильного (рівносильної) до даного (даної).

Теорема 3. Виконання у певній частині рівняння (нерівності) відносних тотожних перетворень, які змінюють ОДЗ даного рівняння (даної нерівності) може привести до рівняння (нерівності) – наслідку, яке (яка) не є рівносильним (рівносильною) до даного (даної). У такому випадку, після розв'язання отриманого рівняння (нерівності), для визначення коренів заданого рівняння (заданої нерівності) необхідною є перевірка.

Щодо останньої теореми, то варто зауважити, що виконання у певній частині рівняння (нерівності) відносних тотожних перетворень, які змінюють ОДЗ даного рівняння (даної нерівності), може також привести до такого рівняння (такої нерівності), наслідком якого (якої), навпаки, є задане рівняння (задана нерівність). Тобто, можливим є звуження ОДЗ заданого рівняння (нерівності). У цьому випадку корені заданого рівняння (заданої нерівності) треба шукати ще й серед елементів тієї числової множини, на яку відбулося звуження.

ОБГОВОРЕННЯ

Виходячи з концепції практико-орієнтованої системи навчання можна впевнено стверджувати, що для курсів математики закладів загальної середньої освіти виконання тотожних перетворень математичних виразів не повинне представлятися самоціллю (Powel, 2012). Завдання типу «спростити заданий математичний вираз» повинні відігравати головним чином допоміжну, тренувальну роль. Основними напрямками застосування теорії тотожних перетворень математичних виразів представляються виконання завдань типу «обчислити значення заданого математичного виразу при вказаних значеннях змінних, які він містить; у разі доцільності, попередньо провести спрощення заданого математичного виразу», загальна теорія розв'язання рівнянь, нерівностей, їхніх систем та сукупностей, обчислення певних типів невизначених та визначених інтегралів. Для правильного застосування тотожних перетворень математичних виразів у вказаних основних напрямках необхідним є дослідження для відповідних виразів змін їхніх ОДЗ. Отже, для курсів математики закладів загальної середньої освіти доцільною представляється розробка сучасної теорії абсолютних та відносних тотожних перетворень математичних виразів, теоретичні аспекти якої автори намагалися висвітлити у своїй роботі. Впровадження елементів такої теорії у навчальний процес з математики, безумовно, сприятиме формуванню буденної логіки учнів, що представляється однією з його основних задач (Sinyukova et al., 2021). Зрозуміло, що запропоновані шляхи розв'язання визначених при цьому проблем вимагають ретельного подальшого обговорення.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі представлено теоретичні основи доцільних з позиції авторів підходів до сучасного висвітлення теорії тотожних перетворень математичних виразів у курсах математики закладів загальної середньої освіти. Автори вважають, що подібні підходи варто впроваджувати незалежно від рівня заглибленості у предмет навчання. Для різних рівнів навчання виключно математичні вирази, що вимагають перетворень, повинні розрізнятися за рівнем своєї складності. Подальшого вдосконалення вимагають і безпосередньо теорія тотожних перетворень математичних виразів, принаймні по відношенню до курсів математики закладів загальної середньої освіти, і концепції застосування таких перетворень під час розв'язання відповідних задач математики і задач математичного змісту інших наук.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Василіогло, І. П., & Синюкова, О. М. (2021). Раціональні математичні вирази та їх тотожні перетворення у курсах математики закладів загальної середньої освіти. *Матеріали Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції «Тенденції та перспективи розвитку науки і освіти в умовах глобалізації»: збірник наукових праць* (С. 244–247). Переяслав, №70. https://drive.google.com/file/d/1MgQbIdCG3N4Oa1y1aqUKhKD5cuhT0rRR/view
2. Істер, О. С. (2021). *Алгебра: підруч. для 8-го кл. закл. заг. серед. освіти.* К: «Генеза». https://pidruchnyk.com.ua/797-ister-8-klas-2016-algebra.html
3. Кравчук, В. Р., Підручна, М. В., & Янченко, Г. М. (2015). *Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл*. Т: «Підручники і посібники». https://pidruchnyk.com.ua/768-algebra-7klas-kravchuk-pidruchna-2015.html
4. *Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-9 класи.* Затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas
5. *Навчальна програма з математики (алгебри і початків аналізу та геометрії) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту.* Затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
6. *Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів для загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики).* Затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
7. *Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень.* Затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
8. Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (1993). Cognitive Processes in Algebraic Thinking: towards a Theoretical Framework, *Proceedings of PME-XVII*, 1, 138-145.
9. Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (1994). Intensional Semantics as a Tool to Analyze Algebraic Thinking, *Rendiconti dell'Università e del Politecnico di Torino*, 52, 105-125.
10. Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B., & Lepage, A. (1992). Arithmetical and Algebraic Thinking in Problem Solving, *Proceedings of PME-XVI*, 1, 65-72.
11. *MATHEMATICS Grades Pre-Kindergarten to 12.* (2017). Massachusetts Curriculum Framework. https://www.doe.mass.edu/frameworks/math/2017-06.pdf
12. Powel, S.R. (2012). Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks. *Elem Sch J. Jun*; 112(4): 627-648. https://doi.org/10.1086/665009.
13. Sinyukova, E. N., Drahanyuk, S. V., & Chepok, O. O. (2021). On the Up-to-date Course of Mathematical Logic for the Future Math Teachers, *Mathematics and Statistics*, 9 (3), 335-341.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Vasyliohlo, I. P., & Synyukova, O. M. (2021). Ratsional'ni matematychni vyrazy ta yikh totozhni peretvorennya u kursakh matematyky zakladiv zahal'noyi seredn'oyi osvity [Rational mathematical expressions and their identical transformations in mathematics courses of general secondary education institutions.] Materialy Mizhnarodnoyi naukovo-praktychnoyi internet-konferentsiyi «*Tendentsiyi ta perspektyvy rozvytku nauky i osvity v umovakh hlobalizatsiyi*»: zbirnyk naukovykh prats' (S. 244–247). Pereyaslav, №70. https://drive.google.com/file/d/1MgQbIdCG3N4Oa1y1aqUKhKD5cuhT0rRR/view (in Ukrainian).
2. Ister, O. S. (2021). *Alhebra: pidruch. dlya 8-ho kl. zakl. zah. sered. osvity [Algebra: tutorial. for the 8th grade closing general among. Education]*. K: «Heneza». https://pidruchnyk.com.ua/797-ister-8-klas-2016-algebra.html (in Ukrainian).
3. Kravchuk, V. R., Pidruchna, M. V., & Yanchenko, H. M. (2015). *Alhebra: pidruch. dlya 7 kl. zahal'noosvit. navch. zakl.[Algebra: tutorial. for 7th grade general education education closing].* T: «Pidruchnyky i posibnyky». https://pidruchnyk.com.ua/768-algebra-7klas-kravchuk-pidruchna-2015.html (in Ukrainian).
4. *Navchal'na prohrama dlya zahal'noosvitnikh navchal'nykh zakladiv. Matematyka 5-9 klasy* [*Curriculum for general educational institutions. Mathematics 5-9 grades.]* Zatverdzhena Nakazom Ministerstva osvity i nauky Ukrayiny vid 07.06.2017 № 804. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas. (in Ukrainian).
5. *Navchal'na prohrama z matematyky (alhebry i pochatkiv analizu ta heometriyi) dlya uchniv 10-11 klasiv zahal'noosvitnikh navchal'nykh zakladiv. Riven' standartu* [*The curriculum in mathematics (algebra and the beginnings of analysis and geometry) for students of 10-11 grades*

of general educational institutions. Standard level.] Zatverdzhena Nakazom Ministerstva osvity i nauky Ukrayiny vid 07.06.2017 № 804. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (in Ukrainian).

6. *Navchal'na prohrama z matematyky dlya uchniv 10-11 klasiv dlya zahal'noosvitnikh navchal'nykh zakladiv (dlya klasiv z pohlyblenym vyvchennyam matematyky)* [*Mathematics curriculum for students of grades 10-11 for general educational institutions (for classes with in-depth study of mathematics).]* Zatverdzhena Nakazom Ministerstva osvity i nauky Ukrayiny vid 07.06.2017 № 804. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (in Ukrainian).
7. *Navchal'na prohrama z matematyky dlya uchniv 10-11 klasiv (pochatok vyvchennya na pohlyblenomu rivni z 8 klasu) zahal'noosvitnikh navchal'nykh zakladiv. Profil'nyy riven' [Mathematics curriculum for students of grades 10-11 (beginning of study at an advanced level from grade 8) of general educational institutions. Profile level].* Zatverdzhena Nakazom Ministerstva osvity i nauky Ukrayiny vid 07.06.2017 № 804. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (in Ukrainian).
8. Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (1993). Cognitive Processes in Algebraic Thinking: towards a Theoretical Framework, *Proceedings of PME-XVII*, 1, 138-145.
9. Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (1994). Intensional Semantics as a Tool to Analyze Algebraic Thinking, *Rendiconti dell'Università e del Politecnico di Torino*, 52, 105-125.
10. Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B., & Lepage, A. (1992). Arithmetical and Algebraic Thinking in Problem Solving, *Proceedings of PME-XVI*, 1, 65-72.
11. *MATHEMATICS Grades Pre-Kindergarten to 12.* (2017). Massachusetts Curriculum Framework. https://www.doe.mass.edu/frameworks/math/2017-06.pdf
12. Powel, S.R. (2012). Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks. *Elem Sch J. Jun*; 112(4): 627-648. https://doi.org/10.1086/665009.
13. Sinyukova, E. N., Drahanyuk, S. V., & Chepok, O. O. (2021). On the Up-to-date Course of Mathematical Logic for the Future Math Teachers, *Mathematics and Statistics*, 9 (3), 335-341.